

**Т. Леви-Чивита**

**Курс теоретической  
механики**

**Том 2, Часть 1**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 53  
ББК 22.3  
Т11

Т11      **Т. Леви-Чивита**  
Курс теоретической механики: Том 2, Часть 1 / Т. Леви-Чивита – М.: Книга  
по Требованию, 2014. – 436 с.

**ISBN 978-5-458-34265-0**

**ISBN 978-5-458-34265-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2014

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



## ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Еще в 1935 г. вышел в свет русский перевод первой части первого тома „Курса теоретической механики“ Т. Леви-Чивита и У. Амальди. Однако в дальнейшем издание последующих частей курса осуществлено не было, хотя для широких кругов советских механиков курс в целом имеет значительный интерес как хорошее дополнение к имеющимся на русском языке руководствам по теоретической механике \*).

Настоящая книга, представляющая собой первую часть второго тома, помимо основных вопросов динамики материальной точки и системы, содержит также целый ряд приложений, интересных для весьма широкого круга читателей. Вопросы внешней баллистики, элементы небесной механики, системы со связями второго класса (сервомоторные связи), неголономные системы, системы с неидеальными связями, вопросы, относящиеся к устойчивости равновесия и движения, — весь этот материал изложен с такой полнотой и обстоятельностью, какие обычно не встречаются в руководствах по общей механике. Упражнения, помещенные в конце каждой главы, дополняют теоретический материал большим количеством примеров, которые в большинстве своем интересны по своему математическому или физическому содержанию.

Изложение отличается образностью; при разборе того или иного вопроса авторы стремятся не только к полной математической строгости изложения, но всегда подробно выясняют физическую картину рассматриваемого явления.

В большинстве случаев авторы обходятся без громоздких выкладок при выводе необходимых результатов, но каждую полученную формулу тщательно анализируют; получение той или иной формулы не является при этом конечной целью, а служит только средством для выяснения физической сущности явления путем ее анализа. Эта особенность изложения характерна для предлагаемого

---

\*) Издание курса Т. Леви-Чивита и У. Амальди предполагается осуществить в следующем порядке. Сначала выпускается первая часть второго тома, потом вторая часть второго тома (том второй посвящен динамике систем с конечным числом степеней свободы) и лишь затем вторая часть первого тома. Такой порядок издания не будет затруднять читателя, поскольку второй том в большей своей части опирается только на изданную первую часть первого тома. Подробная характеристика всего курса дана в предисловии проф. В. Ф. Кагана к русскому изданию первой части первого тома.

курса и выгодно отличает его от ряда других аналогичных по содержанию и объему руководств по теоретической механике.

Весь курс изложен в векторной форме, но авторы пользуются векторным методом очень осторожно и применяют его при выводах только в тех случаях, когда это, во-первых, сокращает выкладки и, во-вторых, не подменяет образного геометрического толкования.

Для понимания текста требуется только знание элементов векторной алгебры и векторного анализа в объеме программ высшей технической школы. При этом следует обратить внимание на одну особенность в обозначениях. Радиус-вектор точки  $P$ , проведенный из начальной точки  $O$ , авторы обозначают просто одной буквой  $P$  (о происхождении этого обозначения и о его связи с точечным исчислением можно найти сведения в дополнении к первой части первого тома, принадлежащем проф. В. Ф. Кагану). В этих обозначениях, например, известная формула для радиуса-вектора центра тяжести

$$m\vec{OG} = m_1\vec{OG}_1 + m_2\vec{OG}_2 + \dots + m_n\vec{OG}_n,$$

где

$$m = m_1 + m_2 + \dots + m_n,$$

принимает следующий вид:

$$mG = m_1G_1 + m_2G_2 + \dots + m_nG_n.$$

Скорость точки записывается в виде

$$\vec{v} = \frac{dP}{dt} = \dot{P}.$$

Эти обозначения не вносят в изложение никаких осложнений, и потому они сохранены без изменений.

Что касается терминологии, то она в подавляющем большинстве случаев совпадает с общепринятой в советской литературе по механике, а там, где она резко расходится с ней, соответствующие термины заменены принятыми в советской литературе.

Авторы снабдили свой курс большим количеством ссылок на оригинальные работы и дополнили основной текст краткими биографическими сведениями о тех ученых, трудами которых создана классическая механика. Можно приветствовать это начинание, столь необычное для учебных руководств по механике, но при условии, что роль каждого ученого правильно взвешена и освещена. Однако авторы несколько переоценили, по нашему мнению, роль итальянских деятелей науки в развитии механики, так как наряду с биографиями первоклассных ученых в книге помещены также и биографии лиц, научная деятельность которых оставила только едва заметный след в механике. Вместе с тем не всегда правильно отражена роль русских ученых в развитии механики, а их биографии или отсутствуют, или сводятся к упоминанию даты и места рожде-

ния и смерти без указания, хотя бы и краткого, их роли в науке. Излагая, например, преобразования уравнений движения негोलомонных систем, авторы совершенно обходят молчанием работы С. А. Чаплыгина, впервые установившего некоторые формы этих уравнений. При изложении теории колебаний и вопросов устойчивости авторы не упоминают о работах Н. Е. Жуковского, а теоремы А. М. Ляпунова, не приводя их доказательств, формулируют не всегда точно, вследствие чего читатель не получает надлежащего представления о роли Ляпунова в развитии теории устойчивости и о добытых им результатах. Точно так же нельзя согласиться со взглядом авторов на теорию малых колебаний, тем более что для установившихся движений вопрос о границах ее применимости разрешен в диссертации А. М. Ляпунова 60 лет назад. Мы сочли необходимым в соответствующих местах книги восполнить эти пробелы дополнительными примечаниями. Часть этих примечаний, ввиду довольно значительного их объема, вынесена в конец книги. Ссылки на них в тексте книги отмечены цифрами, заключенными в квадратные скобки.



## Глава I

### ДВИЖЕНИЕ ТОЧКИ ПО ЗАДАННОЙ ТРАЕКТОРИИ

#### § 1. Система отсчета для механических явлений

1. Во второй части первого тома (гл. VII—XIV) мы установили законы механики и изложили систематически наиболее важные следствия из них, относящиеся к явлениям покоя, или, поскольку имелись в виду силы, к явлениям равновесия (статика). Теперь, отправляясь от тех же законов, мы перейдем к механике в собственном смысле, т. е. к явлениям движения, или к динамике; при этом мы начнем с рассмотрения движения одной материальной точки, или, как принято говорить для краткости, с динамики точки.

Этот частный случай движения важен не только вследствие своей схематической простоты, но также и благодаря тому, что он составляет основу динамики произвольных материальных систем, так как каждую такую систему при изучении механических явлений можно рассматривать как образованную из совокупности материальных точек или элементарных частиц.

Вся динамика точки основывается на уравнении

$$F = ma, \quad (1)$$

которое для случая одной материальной точки дает полный синтез всех постулатов механики (т. I, гл. VII). В этом уравнении скалярный, существенно положительный коэффициент  $m$  обозначает массу точки. Сила  $F$  представляет собой все действия на точку со стороны внешней среды или, говоря точнее, является равнодействующей всех сил (активных и реакций связей), действующих на точку, и  $a$  обозначает ускорение точки. Так как ускорение имеет относительный характер, то всегда необходимо иметь в виду, что уравнение (1) будет вполне строгим только при условии, что ускорение  $a$  отсчитывается *в системе координат, не изменяющей своего положения относительно неподвижных звезд* (т. I, гл. VII, § 7).

Чтобы исключить все несущественные ограничения, относящиеся к системе отсчета, сделаем одно замечание. Пусть  $\mathcal{O}\xi\eta\zeta$  есть система осей координат, не изменяющая своего положения относительно неподвижных звезд,  $\mathcal{O}'\xi'\eta'\zeta'$  — другая система осей, совершающая относительно первой системы прямолинейное и равномерное поступательное движение; тогда из теории относительного движения непосредственно следует, что ускорение какой-нибудь

точки относительно системы  $\Omega\xi'\eta'\zeta'$  в любой момент будет тождественно с ускорением этой же точки относительно системы  $\Omega\xi\eta\zeta$  (т. I, гл. IV, п. 4); таким образом, *основное уравнение (1) будет вполне строгим во всех тех случаях, когда движение точки рассматривается в системе координат, движущейся поступательно и притом прямолинейно и равномерно относительно неподвижных звезд, или, другими словами, в системе координат, оси которой сохраняют неизменные направления относительно неподвижных звезд, а начало движется прямолинейно и равномерно.*

В дальнейшем, когда мы будем пользоваться уравнением (1), мы всегда будем подразумевать (если не будет оговорено противное), что движение точки относится к только что указанной системе отсчета. Такую систему для краткости будем называть *инерциальной* или *галилеевой* системой. Последнее название было предложено Эйнштейном в его первой статье (1905 г.) о теории относительности и теперь всюду принято. Оно вполне оправдывается тем, что в сочинениях Галилея с удивительной ясностью и точностью подчеркнут тот факт, что для двух наблюдателей, находящихся относительно друг друга в прямолинейном и равномерном поступательном движении, физические явления протекают по одним и тем же законам.

Однако мы будем пользоваться уравнением (1) также и для систем отсчета, отличных от указанной [так, мы знаем (т. I, гл. VII, § 7), что оно приближенно справедливо и для осей, неизменно связанных с Землей], но в каждом таком случае мы будем указывать на характер и пределы ошибок, которые при этом будут получаться.

Необходимо добавить, что при формулировке механических задач мы часто будем говорить о неподвижных точках, прямых и плоскостях. Под этим мы будем подразумевать такие точки, прямые и плоскости, которые неподвижны относительно заданной системы отсчета; за такую систему в большинстве случаев будем принимать или галилееву систему, или систему, неизменно связанную с Землей.

## § 2. Общие соображения о движении точки по заданной траектории

2. Пусть  $P$  есть материальная точка с массой  $m$ , движущаяся (или, в предельном случае, находящаяся в покое) под действием сил, равнодействующая которых есть  $F$ . Предположим, что мы заранее знаем траекторию  $s$  точки (иногда это вполне возможно, если, например, у нас имеются некоторые данные о характере действующих сил). Тогда для определения движения точки  $P$  достаточно найти зависимость между положением точки на траектории и временем (т. е. закон движения). Точнее, если  $s$  есть длина дуги траектории  $s$  между произвольной начальной точкой и точкой  $P$ , отсчитываемая в заданном направлении (*криволинейная абсцисса* точки  $P$ ), то все

сводится к нахождению уравнения движения в конечной форме  $s = s(t)$ , определяющего положение точки  $P$  на заданной траектории  $c$ .

Для этой цели возьмем основное уравнение (1)

$$ma = F$$

и спроектируем обе его части в любой точке кривой  $c$  на касательную, проведенную в направлении возрастающих значений  $s$ . Так как касательное ускорение точки  $P$  равно  $\ddot{s}$  (т. I, гл. II, п. 26), то мы получим следующее скалярное уравнение:

$$m\ddot{s} = F_t \quad (2)$$

(первое внутреннее уравнение движения точки  $P$ ; см. т. I, гл. VII, п. 31). Предположим, что касательная составляющая  $F_t$  силы  $F$  известна. Согласно сказанному в п. 22 гл. VII т. I, это означает, что  $F_t$  должна быть известной функцией от положения и скорости точки  $P$  и, может быть, также и от времени  $t$ . Так как на заданной траектории  $c$  положение точки  $P$  однозначно определяется ее криволинейной абсциссой  $s$ , а скорость — скалярной величиной  $\dot{s}$  (поскольку направлением скорости в любой точке является направление касательной), то из только что сказанного следует, что составляющая  $F_t$  представляет собой известную функцию  $f(s, \dot{s} | t)$  от трех аргументов,  $s, \dot{s}, t$ , и равенство (2) принимает вид

$$m\ddot{s} = f(s, \dot{s} | t). \quad (2')$$

Таким образом, задача о движении точки  $P$  по траектории  $c$  сводится к определению всех функций  $s(t)$ , удовлетворяющих уравнению (2'), т. е. к интегрированию одного единственного дифференциального уравнения второго порядка.

В общем случае это уравнение не интегрируется в конечном виде; только в редких случаях, примеры которых мы дадим в §§ 4 и 5, его удается интегрировать в квадратурах.

Однако в анализе доказывається, что при достаточно широких качественных условиях для функции от трех аргументов  $f(s, \dot{s} | t)$  уравнение (2') имеет общий интеграл, зависящий от двух произвольных постоянных. Так как в нашей механической интерпретации функция  $F_t = f(s, \dot{s} | t)$  в конкретных задачах этим условиям полностью удовлетворяет, то можно сказать, что на траектории  $c$  при заданных действующих силах возможны  $\infty^2$  отличных друг от друга движений; из всех этих движений мы сможем выделить одно, если будем иметь достаточно данных для определения двух постоянных интегрирования.

Так, например, можно доказать, что если функция  $f(s, \dot{s} | t)$  в определенной области конечна, непрерывна и дифференцируема по любому из трех ее аргументов, то среди интегралов уравнения (2') всегда существует такая функция  $s(t)$ , которая однозначно

определяется следующими условиями: функция  $s$  и ее производная при заданном значении  $t_0$  независимой переменной (принадлежащем рассматриваемой области) принимают произвольно заданные (тоже из рассматриваемой области) значения  $s_0, \dot{s}_0$ . Поэтому мы можем сказать, что при заданных условиях среди возможных движений точки  $P$  по траектории  $s$  имеется одно и только одно движение, при котором точка  $P$  пройдет через произвольно выбранное положение в заданный момент времени и с заданной скоростью.

Подобным же образом в анализе доказывается, что при условиях, которых мы здесь точно не будем указывать, уравнение (2') имеет (по крайней мере для некоторого промежутка времени, или, если угодно, для надлежащим образом выбранной дуги кривой) один и только один интеграл, принимающий для двух заданных значений времени  $t$  два произвольно выбранных значения. Поэтому мы можем утверждать, что среди движений точки  $P$  по траектории  $s$ , определяемых уравнением (2'), существует одно и только одно движение, при котором  $P$  в два заданных момента времени проходит через два предписанных положения.

3. Среди  $\infty^2$  движений, определяемых уравнением (2'), может заключаться, в частности, и положение равновесия в какой-нибудь точке  $s_0$ . Для того чтобы это имело место, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (2') удовлетворялось тождественно (т. е. для всякого значения независимого переменного  $t$ ), если в него подставить вместо функции  $s(t)$  постоянную  $s_0$ ; следовательно, должно быть

$$f(s_0, 0|t) = 0$$

при всяком  $t$ . Это можно было предвидеть. В самом деле, общее условие равновесия состоит, как мы знаем, в том, что сила должна быть равна нулю, а  $f(s_0, 0|t)$  есть не что иное, как касательная составляющая  $F_t$  такой силы, которая удовлетворяет предполагаемому состоянию равновесия движущейся точки в положении  $s = s_0$ .

### § 3. Несвободное движение точки по кривой. Центростремительная реакция и центробежная сила. Приложения

4. Во многих случаях точка  $P$  может двигаться только по заданной линии  $s$  благодаря специальным приспособлениям (направляющим, трубам, рельсам, нитям, связи с другими телами). Иными словами, движение точки направляется связями, влияние которых на движение можно представить, как мы знаем (т. I, гл. VII, п. 15), в виде некоторой силы, так называемой реакции связи  $R$ , заранее неизвестной.

В этих случаях для определения движения точки вообще недостаточно знать тангенциальную составляющую  $F_t$  активной силы  $F$

(т. е. той силы, которая одна приводила бы в движение точку, если бы не было связей). Поэтому при указанном предположении мы должны заменить основное уравнение (1) следующим уравнением:

$$ma = F + R; \quad (1')$$

проектируя обе части его на касательную, получим

$$m\dot{s} = F_t + R_t. \quad (2'')$$

Здесь тангенциальная составляющая  $R_t$  силы  $R$  тоже неизвестна.

Однако бывают случаи, когда составляющую  $R_t$  можно заранее определить. Ниже, в § 8, мы остановимся подробнее на действии реакции  $R$  во время движения, аналогично тому, как это было сделано в гл. IX т. I для случая равновесия. Но уже теперь, если принять во внимание полученные там результаты (а также общие рассуждения п. 3 гл. XV), мы можем путем обобщения заключить, что если речь идет о таких связях, для которых в статических условиях трением можно пренебречь (т. е. о связях идеальных, без трения), то реакция будет нормальна к траектории также и при движении в любом положении движущейся точки. Следовательно,  $R_t$  будет равна нулю, и движение будет определяться опять уравнением (2).

Таким образом, *точка, вынужденная* (вследствие связей без трения или приближенно без трения) *оставаться на некоторой кривой, движется по ней так, как если бы она находилась исключительно под действием активной (касательной) силы.*

5. Независимо от того, имеется трение или нет, основное уравнение (1')

$$ma = F + R$$

приводит нас к замечательным выводам. Спроектируем для любой точки траектории обе части уравнения на соответствующую главную нормаль (направленную к центру кривизны) и решим полученное уравнение относительно  $R_n$ . Вспоминая выражение  $a_n = \frac{v^2}{r}$  для нормального ускорения (т. I, гл. II, п. 26), где  $v$  есть абсолютная величина скорости и  $r$  — радиус кривизны траектории, получим

$$R_n = m \frac{v^2}{r} - F_n. \quad (3)$$

Составляющая  $R_n$  полной реакции  $R$  связей, т. е. тел (трубы, рельсов и т. п.), материализующих кривую  $c$ , называется центростремительной реакцией связи.

В то время как в случае покоя ( $v=0$ ) эта составляющая в точности равна и противоположна аналогичной составляющей активной силы, при движении, т. е. когда  $v \neq 0$ , она содержит в себе в

качестве слагаемого, как это видно из равенства (3), величину  $m \frac{v^2}{r}$ , всегда положительную (направленную по главной нормали в сторону вогнутости или, как иногда говорят, внутрь кривой<sup>1)</sup>), прямо пропорциональную квадрату скорости и обратно пропорциональную радиусу кривизны, т. е. по своему значению тем большую, чем больше в рассматриваемом положении кривизна траектории  $c$ .

6. На основании закона равенства действия и противодействия силе  $R$ , с которой связь (т. е. тело или тела, которые ее осуществляют) действует на движущуюся точку, соответствует равная и противоположная сила  $-R$ , с которой движущаяся точка действует на связь (в положении, занимаемом точкой в какой-нибудь момент времени).

Составляющая силы  $-R$  в направлении *внешней* нормали, действующая на связь и равная по величине  $R_n$ , называется *центробежной силой* \*).

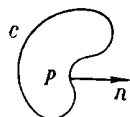
Заметим, что центробежная сила здесь понимается в смысле, отличном от того, в каком она применяется в теории относительного равновесия, гл. XVI, п. 6.

Указанная центробежная сила проявляется, например, в праше, когда ее вращают для метания камня; она же проявляется и тогда, когда шарик, быстро пробега по кривому жолобу (например, круговому), стремится разрушить внешний его край.

7. Для приспособлений, осуществляющих связи, имеет важное практическое значение, иногда даже большее чем  $R_n$ , другая составляющая силы  $-R$ , нормальная к траектории. Пусть  $\chi$  — какое-нибудь направление (ориентированное), нормальное к кривой, и  $\theta$  — угол, который оно образует с главной нормалью  $n$ . Так как вектор ускорения является суммой двух составляющих, одной — направленной по касательной и другой — по главной нормали  $n$ , то его проекцией  $a_\chi$  по ориентированному направлению  $\chi$  будет

$$a_\chi = a_n \cos \theta = m \frac{v^2}{r} \cos \theta$$

<sup>1)</sup> Строго говоря, это выражение неправильно, так как в случае замкнутой кривой оно может привести к недоразумению. Это видно, например, из прилагаемой фигуры, где нормаль  $n$  направлена в сторону вогнутости, и все же не внутрь кривой  $c$ , если рассматривать ее в целом. Однако возможности недоразумения не будет, если мы ограничимся, как это обычно и имеет место, рассмотрением кривой в ближайшей окрестности любого положения точки.



Фиг. 1.

\*) *Центробежная сила* в том смысле, в каком она введена здесь авторами, представляет собой *нормальное давление движущейся точки на связь*. (Прим. ред.)