**В. П. Минорский, В. П. Улановский**

# Векторная алгебра

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М62

**Минорский В.П.**
М62 Векторная алгебра / В. П. Минорский, В. П. Улановский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 80 с.

**ISBN 978-5-458-25715-2**

Книга излагает элементарные сведения из векторной алгебры и предназначается как учебное пособие для учащихся высших технических учебных заведений, а также и для лиц с инженерным образованием, которым приходится иметь дело с векторными обозначениями и операциями.

**ISBN 978-5-458-25715-2**

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

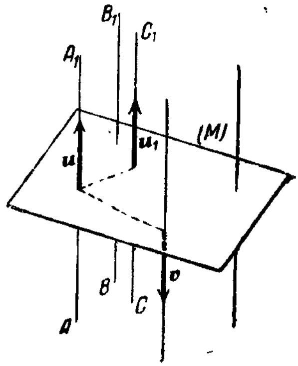
Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

## § 1. НАПРАВЛЕНИЕ В ПРОСТРАНСТВЕ. СТОРОНА НАПРАВЛЕНИЯ

Пусть в пространстве дана какая-нибудь прямая $AA_1$ (черт. 1). Рассмотрим совокупность (*пучок*) ($M$) всех прямых, параллельных прямой $AA_1$ (включая и саму прямую $AA_1$). Если дан такой пучок, то говорят, что в пространстве задано *направление*, определяемое прямой $AA_1$. Для определения этого направления может служить любая другая прямая, принадлежащая пучку ($M$). Если на какой-нибудь прямой пучка поставлена стрелка, то говорят, что задана *сторона* направления, определяемая этой стрелкой. У каждого пучка могут быть две противоположные стороны направления. Так, на черт. 1 на разных прямых пучка ($M$) указаны стрелками $\boldsymbol{u}$ и $\boldsymbol{u}_1$ одинаковые стороны направления пучка и стрелкой $\boldsymbol{v}$ — противоположная им сторона того же направления.




Черт. 1.

## § 2. ВЕКТОР И ЕГО ЭЛЕМЕНТЫ

*Вектором* называется *направленный прямолинейный отрезок* $AB$ (черт. 2), в котором точка $A$ рассматривается как *начало*, а точка $B$ — как *конец*.

Из этого определения следует, что вектор определяется следующими четырьмя *элементами*:

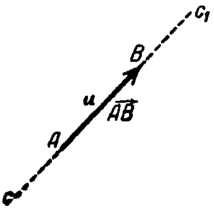
1) *началом* $A$ вектора;

2) *направлением*, определяемым прямой, на которой он лежит;

3) *стороной* направления, указываемой стрелкой вектора;

4) длиной отрезка $AB$, которая называется *модулем* вектора.

Вектор обозначается или указанием его начала и конца $\overrightarrow{AB}$, или одной какой-нибудь буквой, например $\boldsymbol{u}$ (в печати жирной, а в письме с чертой наверху $\bar{u}$). Модуль вектора обозначается $|\overrightarrow{AB}|$, или $|\boldsymbol{u}|$, или $AB$, или $u$.




Черт. 2.

Вектор, начало и конец которого совпадают, называется *нуль-вектором* и обозначается $\mathbf{0}$ или $\vec{0}$ (в письме $\bar{0}$). Модуль его равен 0, а направление неопределённо.

Векторы, параллельные одной прямой называются *коллинеарными*. Векторы, параллельные одной плоскости, называются *компланарными*.

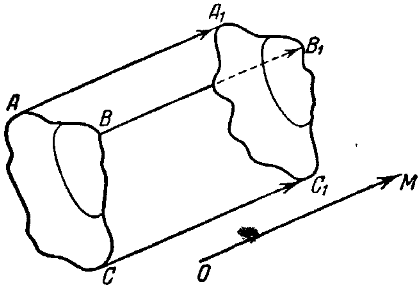
## § 3. СКАЛЯРНЫЕ И ВЕКТОРНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ. ТРИ ТИПА ВЕКТОРОВ

Величины, вполне определяемые одним численным значением (например масса, температура и т. п.), называются *скалярными* величинами или *скалярами*. Отсюда следует, что любое вещественное число есть также скаляр.

Величины, которые определяются не только численным значением, но и направлением (например сила, скорость и т. п.), называются *векторными* величинами (или иногда короче *векторами*).

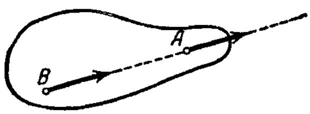
Покажем на примерах, что для математического выражения векторной величины первый элемент вектора (см. § 2), а именно его начало, не всегда является существенным.

Пример 1. При поступательном движении твёрдого тела точки $A$, $B$, $C$,... этого тела опишут за некоторое время векторы $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{BB_1}$, $\overrightarrow{CC_1}$,... (черт. 3), имеющие одинаковые три элемента: длину, направление и сторону направления. Перемещение тела вполне определится любым из этих векторов и даже произвольным вектором $\overrightarrow{OM}$, имеющим те же: длину, направление и сторону направления. Таким образом, при изображении вектором поступательного перемещения твёрдого тела за начало этого вектора можно принять любую точку пространства. Такие векторы с произвольным началом называются *свободными.*



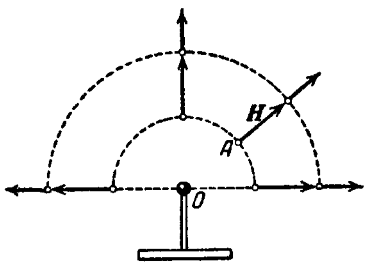

Черт. 3.

Пример 2. Известно, что результат действия силы, приложенной к точке $A$ твёрдого тела (черт. 4), не изменится, если точку приложения силы переместить в точку $B$ по прямой $AB$ действия силы. Таким образом, при изображении вектором силы, действующей на твёрдое тело, за начало вектора можно принять любую точку прямой $AB$, по которой направлена сила. Такие векторы называются *скользящими.*




Черт. 4.

Пример 3. Металлический шарик $O$ (черт. 5), заряженный электричеством, образует в пространстве вокруг себя *электрическое поле*, в каждой точке $A$ которого действует напряжение или сила, изображаемая вектором $\boldsymbol{H}$, имеющим уже определённое начало. Такие векторы с определённым началом называются *связанными.*




Черт. 5.

Итак, существуют три типа векторов:

1) *свободные* векторы, определяемые только тремя элементами: модулем, направлением и стороной направления; за начало свободного вектора можно принять любую точку пространства;

2) *скользящие* векторы, определяемые модулем, прямой, на которой вектор лежит, и стороной направления;

за начало скользящего вектора можно принять любую точку прямой, на которой он расположен;

3) *связанные* векторы, определяемые всеми четырьмя элементами, в том числе и началом вектора.

## § 4. РАВЕНСТВО ВЕКТОРОВ

Два *свободных* вектора $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ (черт. 6) называются *равными*, если они имеют:

1) равные *модули*: $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$,

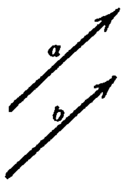
2) одинаковые *направления*: $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$,

3) одинаковые *стороны* направлений: $\boldsymbol{a} \uparrow\uparrow \boldsymbol{b}$.

Равенство векторов записывается в виде $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

Из определения равенства следует, что свободный вектор можно переносить параллельно самому себе.

Для равенства *скользящих* векторов нужно потребовать ещё, чтобы они лежали на одной прямой, а для равенства *связанных* векторов нужно потребовать, чтобы они имели ещё общее начало, т. е. полностью совпадали. Можно показать, что действия над скользящими и связанными векторами основаны *на алгебре свободных векторов*, которая и излагается в настоящей книге. Таким образом, во всём дальнейшем под словом «вектор» мы будем подразумевать «свободный вектор», определяемый тремя элементами: модулем, направлением и стороной направления.



Черт. 6.

Примечание. Из первого условия равенства векторов следует, что, если $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$, то, конечно, и $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, но обратное неверно. Например, рассматривая стороны $OA$ и $OB$ квадрата на черт. 10 как векторы, получим $|\overrightarrow{OA}| = |\overrightarrow{OB}|$, но $\overrightarrow{OA} \neq \overrightarrow{OB}$. Заметим ещё, что понятия «больше» и «меньше» к векторам неприменимы, векторные неравенства невозможны, и неравные векторы можно сравнивать только по модулю, т. е. если $\boldsymbol{a} \neq \boldsymbol{b}$, то или $|\boldsymbol{a}| = |\boldsymbol{b}|$, или $|\boldsymbol{a}| > |\boldsymbol{b}|$, или $|\boldsymbol{a}| < |\boldsymbol{b}|$.

## § 5. УМНОЖЕНИЕ ВЕКТОРА НА СКАЛЯР

Определение I. *Произведением вектора* $\boldsymbol{a}$ *на вещественное число* (скаляр) $m$ *называется новый вектор* $\boldsymbol{b}$, 1) *имеющий длину* (модуль) $a \cdot |m|$, 2) *коллинеарный с вектором* $\boldsymbol{a}$ *и* 3) *направленный одинаково с* $\boldsymbol{a}$ *при* $m > 0$ *и противоположно* $\boldsymbol{a}$ *при* $m < 0$.

Результат умножения вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляр $m$ записывается векторным равенством вида:

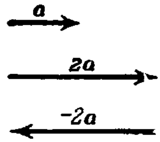
$$m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b} \quad \text{или} \quad \boldsymbol{a}m = \boldsymbol{b}. \tag{1}$$

На черт. 7 графически изображено умножение вектора $\boldsymbol{a}$ на скаляры 2 и $-2$.

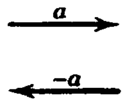
Рассмотрим два особых случая умножения вектора на скаляр $m$.

1) Пусть $m = 0$. По определению произведение $0 \cdot \boldsymbol{c}$ будет новый вектор длиною 0, т. е. нуль-вектор $\mathbf{0}$.

2) Пусть $m = -1$. По определению произведение $-1 \cdot \boldsymbol{a}$ будет вектор $\boldsymbol{b}$, направленный противоположно $\boldsymbol{a}$ и имеющий одинаковую с ним длину. Такой вектор короче обозначается через $-\boldsymbol{a}$:



Черт. 7.



Черт. 8.

$$\boldsymbol{b} = -1 \cdot \boldsymbol{a} = -\boldsymbol{a}$$

и называется *противоположным* вектору $\boldsymbol{a}$ (черт. 8).

Определение II. *Разделить вектор $\boldsymbol{a}$ на число $m$, значит умножить его на $\frac{1}{m}$*, т. е.

$$\frac{\boldsymbol{a}}{m} = \frac{1}{m}\boldsymbol{a}. \tag{2}$$

Определение III. *Отношением $\boldsymbol{b}:\boldsymbol{a}$ двух коллинеарных векторов назовём число $m$, на которое нужно умножить вектор $\boldsymbol{a}$, чтобы получить вектор $\boldsymbol{b}$*, т. е.

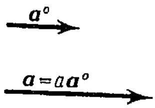
$$\boldsymbol{b}:\boldsymbol{a} = m, \quad \text{если} \quad \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}m.$$

Чтобы найти отношение двух коллинеарных векторов, достаточно найти отношение их модулей и взять его со знаком +, если векторы направлены одинаково, и со знаком —, если они направлены противоположно, т. е.

$$\frac{\boldsymbol{b}}{\boldsymbol{a}} = \pm \frac{b}{a}. \tag{3}$$

## § 6. ЕДИНИЧНЫЙ ВЕКТОР

*Единичным* вектором называется вектор, модуль которого равен единице. Всякий вектор $\boldsymbol{a}$ может быть представлен в виде произведения единичного вектора $\boldsymbol{a}^0$, определяемого тем же направлением и стороной направления, что и вектор $\boldsymbol{a}$, на модуль вектора $\boldsymbol{a}$:




Черт. 9.

$$\boldsymbol{a} = a\boldsymbol{a}^0,$$

где $\boldsymbol{a}^0$ — единичный вектор (черт. 9).

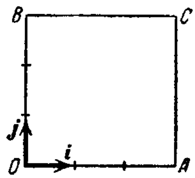
### ЗАДАЧИ

**1.** Указать, какие из следующих величин являются скалярными и какие векторными:

| | | |
|---|---|---|
| 1) время, | 2) скорость, | 3) объём, |
| 4) температура, | 5) сила, | 6) работа, |
| 7) ускорение, | 8) живая сила, | 9) количество движения. |

**2.** Дан квадрат $OACB$ (черт. 10). Рассматривая его стороны как векторы, указать равные из них и противоположные.

**3.** По сторонам $OA$ и $OB$ квадрата $OACB$ (черт. 10) отложены единичные векторы $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$. Выразить через $\boldsymbol{i}$ и $\boldsymbol{j}$ векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{BO}$, если сторона квадрата равна 3.




Черт. 10.

**4.** Дан правильный шестиугольник $OABCDE$ со стороною $a$. Обозначив единичные векторы векторов $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$ соответственно через $\boldsymbol{m}$, $\boldsymbol{n}$, $\boldsymbol{p}$, выразить через них векторы $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DE}$, $\overrightarrow{EO}$, $\overrightarrow{OC}$ и $\overrightarrow{BE}$.

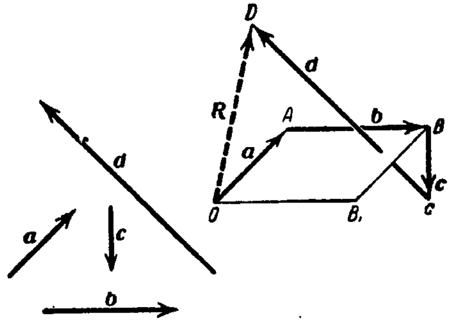
## § 7. СЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРОВ

Пусть даны несколько векторов, например четыре вектора $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}$, $\boldsymbol{d}$, произвольно расположенных в пространстве. Из произвольной точки $O$ (черт. 11) проведём вектор, равный одному из данных векторов, например вектор $\overrightarrow{OA} = \boldsymbol{a}$. Из конца его проведём вектор $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{b}$, равный второму из данных векторов, затем $\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{c}$ и, наконец, $\overrightarrow{CD}=\boldsymbol{d}$. Получим ломаную $OABCD$, построенную из данных векторов так, чтобы конец каждого вектора совместился с началом последующего. Такое построение ломаной из данных векторов называется *полигонированием* данных векторов. Вектор $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}$ (черт. 11), замыкающий векторный полигон $OABCD$, называется *суммой* векторов, составляющих полигон. Таким образом:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{OD}$$

или

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{R}.$$



Черт. 11.

Результат сложения векторов от порядка полигонирования векторов не зависит. Чтобы убедиться в этом, построим на каких-нибудь двух смежных звеньях полигона $OABCD$ параллелограмм, например параллелограмм $OABB_1$. Тогда заметим, что вектор $\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}$ замкнёт также ломаную $OB_1BCD$, т. е.

$$\overrightarrow{OD}=\boldsymbol{R}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}.$$

Точно так же, построив параллелограмм на векторах $\overrightarrow{B_1B}$ и $\overrightarrow{BC}$, переставим порядок полигонирования векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{c}$ и т. д. Так как отрезок прямой, соединяющий точки $O$ и $D$ (черт. 11), короче ломаной $OABCD$, соединяющей эти же точки, то

$$OD < OA+AB+BC+CD.$$

Это значит, что

$$|\boldsymbol{R}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|$$

или

$$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}| \leqslant |\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{c}|+|\boldsymbol{d}|, \qquad (4)$$

т. е. *модуль суммы векторов меньше суммы модулей* *векторов или равен ей* в том частном случае, когда $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ коллинеарны и определяются одной и той же стороной направления и, следовательно, полигон $OABCD$ обратится в прямую линию.

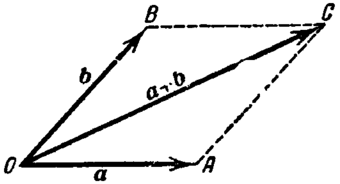
В другом частном случае конец полигона $D$ может совпасть с его началом $O$. Тогда замыкающий вектор $\mathbf{R}=0$ и

$$\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}+\mathbf{d}=0,$$

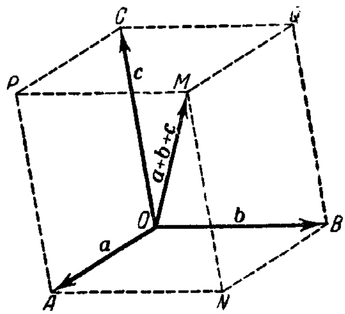
т. е. *если полигон, построенный из данных векторов, окажется замкнутым многоугольником, то сумма векторов равна* $0$.

Если векторы $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ суть векторы сил, приложенных к одной точке твёрдого тела, то, как известно из механики, их сумма $\mathbf{R}$, построенная описанным нами полигонированием, определяет равнодействующую данных сил.

Кроме полигонирования век-




Черт. 12.




Черт. 13.

торов, встречается ещё необходимость в центрировании их, т. е. в параллельном перенесении векторов к общему началу.

Сумма двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, приведённых к общему началу $O$ (черт. 12), есть вектор-диагональ $\overrightarrow{OC}$ параллелограмма, построенного на данных векторах, так как

$$\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AC}=\mathbf{b}+\mathbf{a}=\mathbf{a}+\mathbf{b}.$$

Напомним для сравнения, что по правилу параллелограмма складываются две скорости или две силы в механике.

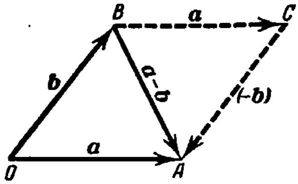
Сумма трёх векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, приведённых к общему началу $O$ (черт. 13), есть вектор-диагональ $\overrightarrow{OM}$ параллелепипеда, построенного на данных векторах, так как

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AN}+\overrightarrow{NM}=\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c}.$$

## § 8. ВЫЧИТАНИЕ ВЕКТОРОВ. ВЕКТОРНАЯ СУММА

*Разностью* $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ двух векторов называется такой третий вектор $\boldsymbol{c}$, который нужно сложить с вектором $\boldsymbol{b}$, чтобы получить вектор $\boldsymbol{a}$, т. е.

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{c}, \quad \text{если } \boldsymbol{b}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}.$$



Черт. 14.

Чтобы построить разность $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, приведём векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$ к общему началу $O$ (черт. 14) и затем соединим их концы $A$ и $B$. Вектор $\overrightarrow{BA}$ и будет разностью $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$, ибо $\boldsymbol{b}+\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}$. Из построения следует, что

$$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\geqslant|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|. \tag{5}$$

Полезно запомнить, что разность $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}$ направлена от конца $B$ вычитаемого вектора к концу $A$ уменьшаемого.

Заметим также, что в параллелограмме $OACB$ (черт. 12 и 14), построенном на векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, одна вектор-диагональ $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$, а другая $\overrightarrow{BA}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$.

Теорема. *Чтобы вычесть вектор* $\boldsymbol{b}$, *достаточно прибавить противоположный вектор* $(-\boldsymbol{b})$.

Доказательство. Из черт. 14 найдём:

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

Из теоремы следует, что всякое векторное выражение, в котором последними действиями являются сложения и вычитания векторов, можно рассматривать как *векторную сумму*, например:

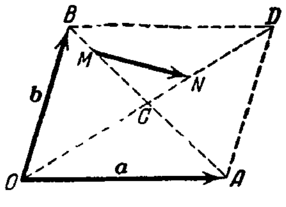
$$1)\ \boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}-\boldsymbol{c}+\boldsymbol{d}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})+(-\boldsymbol{c})+\boldsymbol{d}, \tag{6}$$

$$2)\ 2\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}+4\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}+(-3\boldsymbol{b})+4\boldsymbol{c}.$$

Таким образом, общим видом *векторной суммы* является выражение $x\boldsymbol{a}+y\boldsymbol{b}+z\boldsymbol{c}+\ldots$, где $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, $\boldsymbol{c}, \ldots$ — векторы, а $x$, $y$, $z, \ldots$ — положительные или отрицательные вещественные числа.

## ЗАДАЧИ

5. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, угол между которыми равен 60°. Построить векторы $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ и $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ и определить их модули, если $a=4$ и $b=3$.




Черт. 15.

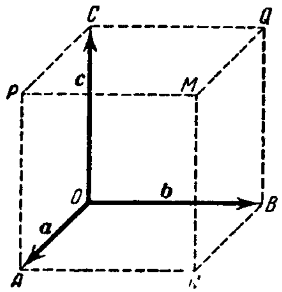
6. Даны векторы $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, угол между которыми равен 45°. Построить вектор $\boldsymbol{c}=2\boldsymbol{a}-1{,}5\boldsymbol{b}$ и определить его модуль.

7. На данных векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ построен параллелограмм $OADB$ (черт. 15). Определить изображённый на чертеже вектор $\overrightarrow{MN}$, если

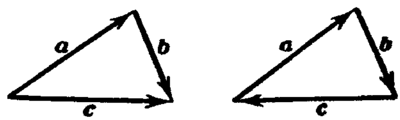
$$BM=\frac{1}{3}BC \quad \text{и} \quad CN=\frac{1}{3}CD.$$

8. На данных векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$ построена трапеция $OACB$, в которой $BC \parallel OA$ и $BC=\frac{1}{2}OA$. Определить векторы $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{MN}$, где $M$ и $N$ — соответственно середины оснований $OA$ и $BC$ трапеции.

9. На данных ортогональных векторах $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$, $\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$, $\overrightarrow{OC}=\boldsymbol{c}$ построен параллелепипед $OANBQCPM$ (черт. 16). Определить векторы $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$, $\overrightarrow{NQ}$ и их модули.




Черт. 16.




Черт. 17.

10. Написать векторные равенства, связывающие векторы, изображённые на черт. 17.

11. Вектор $\boldsymbol{R}$ есть сумма двух векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, которые расположены по разные стороны от $\boldsymbol{R}$ и составляют с ним соответственно углы 30° и 45°. Вычислить длины векторов $\boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{b}$, зная длину $\boldsymbol{R}$.