

М. Гарднер

Математические досуги

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 379.8
ББК 77
М11

М11 **М. Гарднер**
Математические досуги / М. Гарднер – М.: Книга по Требованию, 2013. – 496 с.

ISBN 978-5-458-24659-0

Книга известного американского специалиста в области занимательной математики М. Гарднера в живой и увлекательной форме рассказывает читателю много удивительного из самых разных разделов математики. Любители головоломок смогут испытать свои силы в решении парадоксов и задач, а те, кто увлекается показом фокусов, - пополнить свой репертуар. Книга доступна самому широкому кругу читателей и доставит много радости всем любителям математических развлечений, а также может быть полезна преподавателям математики в их работе в школах и колледжах.

ISBN 978-5-458-24659-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Следуя за развитием естественных наук, математические игры пережили переход от классической эры к современной. Не только наука, но и развлечения XX века неотделимы от современной математики. Если в классические времена лишь теория вероятностей органически включала в себя теорию игр, то сейчас само слово «игра» стало математическим термином, который широко используется в самых различных науках: в экономике, биологии, военном деле... Однако популярная литература почти не отразила этого превращения.

К числу тех, кто прокладывает новые пути в этой трудной области, несомненно принадлежит Мартин Гарднер. Его книги с полным правом могли бы называться «Математическими развлечениями XX века». Они открывают читателю совершенно новый мир. Используя самые разнообразные источники, включая в переписку и поиски десятки математиков и физиков, автор по существу создает новый жанр популярной литературы. Его книги обращены к самому широкому кругу читателей и в то же время затрагивают весьма трудные разделы современной науки. Читатель не может не получить удовольствия от неожиданных связей между развлечениями и серьезной наукой и не удивиться остроумным применениям абстрактных понятий и вычислительной техники для анализа игр и головоломок.

Первая книга Гарднера «Математические головоломки и развлечения» вышла в русском переводе год назад и была по достоинству оценена читателями. Тридцать восемь математических миниатюр, вошедших во второй том, не менее интересны, чем первые сорок шесть. Эти восемьдесят четыре главы практически

исчерпывают содержание пяти сборников Гарднера, выпущенных на английском языке и первоначально опубликованных в журнале *Scientific American* в 1956—1964 годах. Хронологический порядок нарушает лишь последняя глава, которая носит название „Игра «Жизнь»”. Опубликованная в 1971 году, она должна была бы войти в следующую книгу. Однако игра «Жизнь» настолько необычна и непохожа на все остальные, что нам хотелось привести ее как пример истинной игры XX века, в которую лучше всего играть с вычислительной машиной. В этой игре причудливая смена позиций и трудно предсказуемый ход событий воспринимаются как почти готовый сценарий увлекательного кинофильма.

В конце нашей книги помещен список литературы по занимательной математике на русском языке, который дополняет список, опубликованный в первом томе. Это по существу первый опыт такой библиографии.

*Ю. Данилов
Я. Смородинский*

ГЛАВА 1

ОШИБКА ЭЙЛЕРА: ОТКРЫТИЕ ГРЕКО-ЛАТИНСКИХ КВАДРАТОВ ДЕСЯТОГО ПОРЯДКА

История математики богата остроумными гипотезами (подсказанными интуицией ученых, обладавших даром математического предвидения), которые в течение столетий не удается ни доказать, ни опровергнуть. Когда же, наконец, появляется доказательство (или опровержение), математики считают это событием первостепенной важности.

На ежегодном съезде Американского математического общества в апреле 1959 года были сделаны сообщения сразу о двух таких работах. Одна из них не представляет для нас интереса (она относится к сложным разделам теории групп); зато вторая, посвященная опровержению гипотезы великого математика Эйлера, связана с многими задачами занимательной математики. В свое время Эйлер высказал предположение, что греко-латинских квадратов определенных порядков не существует, и эта гипотеза в течение 177 лет считалась неопровержимой. Однако трем математикам (Э. Т. Паркеру, Р. К. Боусу и С. С. Шрикхенду) удалось составить греко-латинские квадраты десятого порядка и тем самым опровергнуть гипотезу Эйлера.

Трио математиков, которых друзья окрестили «разоблачителями Эйлера», написало коротенькую работу о своем открытии. Я приведу ее с некоторыми комментариями.

«В последние годы жизни Леонард Эйлер (1707—1783) написал обширный мемуар о магических квадратах, озаглавленный «Исследование магического квадрата нового типа». Сейчас такие квадраты принято называть латинскими, потому

a	b	c	d	α	β	γ	δ	αα	ββ	γγ	δδ
b	a	d	c	γ	δ	α	β	бγ	αδ	δα	сβ
c	d	a	b	δ	γ	β	α	сδ	дγ	αβ	ба
d	c	b	a	β	α	δ	γ	дβ	сα	бδ	αγ

Рис. 1. Греко-латинский квадрат (справа), образованный наложением (суперпозицией) двух латинских квадратов, показанных слева.

что Эйлер обозначил их клетки обычными латинскими буквами (вместо букв греческого алфавита)».

В качестве примера рассмотрим квадрат, изображенный на рис. 1 слева. Шестнадцать клеток в нем заполнены латинскими буквами *a*, *b*, *c* и *d*, причем в каждом столбце и в каждой строке буквы не повторяются. В центре рис. 1 находится другой латинский квадрат, в клетки которого вписаны греческие буквы *α*, *β*, *γ*, *δ*. Если наложить квадраты друг на друга, как показано на правом рисунке, то окажется, что каждая латинская буква появляется один и только один раз в паре с каждой греческой буквой. Два или более латинских квадратов, которые можно так скомбинировать друг с другом, называются ортогональными, а получившийся комбинированный квадрат принято называть греко-латинским.

Способ размещения букв в правом квадрате является решением популярной в позапрошлом веке карточной головоломки: из тузов, королей, дам и валетов всех четырех мастей (всего 16 карт) надо сложить квадрат так, чтобы в каждой строке и в каждом столбце находились карты четырех разных мастей и четырех разных значений. Попробуйте решить другую задачу, в которой то же условие должно выполняться не только для строк и столбцов, но и для двух главных диагоналей.

«В общем случае латинский квадрат n -го порядка определяется как квадрат размером $n \times n$, у которого все n^2 клеток заполнены n различными

0	1	2	3	4
1	2	3	4	0
2	3	4	0	1
3	4	0	1	2
4	0	1	2	3

0	1	2	3	4
2	3	4	0	1
4	0	1	2	3
1	2	3	4	0
3	4	0	1	2

0	1	2	3	4
3	4	0	1	2
1	2	3	4	0
4	0	1	2	3
2	3	4	0	1

0	1	2	3	4
4	0	1	2	3
3	4	0	1	2
2	3	4	0	1
1	2	3	4	0

Рис. 2. Четыре взаимно ортогональных латинских квадрата пятого порядка.

символами, причем так, что каждый символ встречается один и только один раз в каждом столбце и в каждой строке. Может существовать набор из двух или большего числа латинских квадратов, попарно ортогональных друг другу. На рис. 2 показаны четыре взаимно ортогональных латинских квадрата пятого порядка с числами в качестве символов».

Во времена Эйлера умели доказывать, что не существует греко-латинского квадрата второго порядка. Были известны квадраты третьего, четвертого и пятого порядков, и, естественно, вставал вопрос: как обстоит дело при $n = 6$? Эйлер сформулировал задачу следующим образом. В каждом из шести полков служат шесть офицеров шести различных званий. Можно ли построить

этих 36 офицеров в каре так, чтобы шесть офицеров, стоящие в каждой колонне и в каждой шеренге, были шести разных званий и служили в шести разных полках?

«Эйлер показал, что задача о n^2 офицеров (эквивалентная задаче о построении греко-латинского квадрата n -го порядка) всегда разрешима, если n — нечетное или «четно-четное» (то есть делящееся на четыре) число. Тщательно проанализировав задачу, Эйлер пришел к следующему выводу: «Я не сомневаюсь в том, что полный квадрат из 36 клеток построить невозможно; то же самое относится к случаю, если $n = 10$, $n = 14$ и вообще если n равно любому нечетно-четному числу» (то есть четному числу, которое не делится на 4). Этот вывод известен как гипотеза Эйлера. Более строгая формулировка гипотезы звучит так: ни для какого положительного целого числа k не существует пары ортогональных латинских квадратов порядка $n = 4k + 2$.

В 1901 году французский математик Гастон Тарри опубликовал доказательство гипотезы Эйлера для квадрата шестого порядка. Тарри доказывал задачу вместе со своим братом, и сделали они это очень трудоемким способом, просто выписав все возможные латинские квадраты шестого порядка и показав, что ни одна пара не может образовать греко-латинский квадрат. Это, безусловно, подтверждало гипотезу Эйлера. Некоторые математики даже выступили в печати с «доказательствами» того, что гипотеза Эйлера верна, но впоследствии во всех этих доказательствах обнаружились ошибки. Трудоемкость метода Тарри возрастает с увеличением порядка квадрата. Следующий неизученный случай ($n = 10$) оказался уже слишком сложным для такого исследования и еще в 1959 году находился за пределами возможностей электронно-вычислительных машин. Математики Калифорнийского университета в Лос-Анджелесе составили программу поиска греко-латинских квадратов десятого порядка на машине SWAC. Проработав более 100 часов, машина не нашла ни одного квадрата. Надо сказать, что поиски ограничивались мизерной долей всех возможных случаев. От-

сюда можно было сделать только одно заключение: если гипотеза Эйлера справедлива, то для доказательства этого даже самой быстродействующей электронно-вычислительной машине 1959 года понадобилось бы по крайней мере столетие (если бы она работала по программе, написанной для SWAC).

«Мемуар Эйлера заканчивается следующей фразой: „На этом я прекращаю исследование задачи, которая, будучи сама по себе не слишком полезна, привела нас к весьма важным вопросам комбинаторики и общей теории магических квадратов“.

Удивительным примером единства наук является то, что толчком для изучения гипотезы Эйлера послужили практические нужды сельского хозяйства, а исследования, которые сам Эйлер считал бесполезными, оказались чрезвычайно важными для планирования экспериментов».

Рональд Фишер, ныне известный ученый, профессор генетики Кембриджского университета, в начале 20-х годов нашего века впервые показал, как использовать латинские квадраты в сельском хозяйстве. Пусть, например, вам надо выяснить с минимальной затратой времени и средств, как влияют на рост пшеницы семь различных удобрений. Трудность подобных экспериментов связана с тем, что плодородие различных участков почвы неодинаково и обычно меняется без какой-либо закономерности. Как поставить эксперимент, в котором будут не только исследованы все семь удобрений, но и исключена всякая неоднозначность, порожденная изменением состава почвы? Для этого пшеничное поле следует разделить на клетки, чтобы получился квадрат 7×7 , и внести удобрения по схеме любого квадрата, выбранного случайным образом. Несложная статистическая обработка результатов позволяет исключить всякие отклонения, связанные с изменением плодородия почвы.

Предположим, что у нас не один, а семь сортов пшеницы. Можно ли так поставить эксперимент, чтобы учесть и четвертую переменную — сорт пшеницы? (Под тремя первыми переменными подразумеваются две координаты грядки — номер строки и номер столбца — и

вид удобрения.) Решением этой задачи будет греко-латинский квадрат. Семь сортов пшеницы надо посеять в соответствии с греческими буквами, а семь разных удобрений распределить в соответствии с латинскими. Результаты опыта и в этом случае требуют лишь простой статистической обработки.

Греко-латинские квадраты сейчас широко используются при планировании экспериментов в биологии, медицине, социологии и даже в торговле. Естественно, что ячейка квадрата совсем не обязательно должна быть участком земли. Ей может соответствовать корова, пациент, пришедший к врачу, лист дерева, клетка с животными, место, в которое делается укол, промежуток времени и даже наблюдатель или группа наблюдателей. Греко-латинский квадрат в каждом случае является схемой эксперимента. Его строки отвечают одной, столбцы — другой, латинские буквы — третьей, а греческие буквы — четвертой переменной. Предположим, например, что ученый-медик хочет выяснить действие пяти лекарственных препаратов на людей пяти разных возрастных групп, пяти весовых категорий, находящихся в пяти разных стадиях одной и той же болезни. Для этого эксперимента лучше всего воспользоваться греко-латинским квадратом пятого порядка, выбранным случайным образом из всех возможных квадратов того же порядка. Если число переменных должно быть больше, комбинируют несколько латинских квадратов; правда, для квадратов n -го порядка существует не больше чем $n - 1$ взаимно ортогональных квадратов.

Рассказ о том, как Паркер, Боус и Шрикхенд ухитрились найти греко-латинские квадраты порядков 10, 14, 18, 22 (и так далее), мы начнем с 1958 года, когда Паркер сделал открытие, подвергшее гипотезу Эйлера серьезному сомнению. Вслед за Паркером Боус нашел некоторые общие правила построения греко-латинских квадратов. Затем с помощью этих правил Боус и Шрикхенд сумели построить квадрат порядка 22, что противоречило гипотезе Эйлера, ибо 22 — четное число, которое не делится на 4. Интересно, что метод построения этого квадрата был основан на знаменитой задаче занимательной математики, предложенной Киркманом в 1850 году и известной как «задача Киркмана о школьницах».

00	47	18	76	29	93	85	34	61	52
86	11	57	28	70	39	94	45	02	63
95	80	22	67	38	71	49	56	13	04
59	96	81	33	07	48	72	60	24	15
73	69	90	82	44	17	58	01	35	26
68	74	09	91	83	55	27	12	46	30
37	08	75	19	92	84	66	23	50	41
14	25	36	40	51	62	03	77	88	99
21	32	43	54	65	06	10	89	97	78
42	53	64	05	16	20	31	98	79	87

Рис. 3. Греко-латинский квадрат десятого порядка, построенный Э. Т. Паркером.

Учительница, взяв на ежедневную прогулку 15 девочек, обычно строит их в 5 шеренг по 3 девочки в каждой. Надо так расставить девочек, чтобы в течение недели ни одна девочка не оказалась бы в одном ряду с другой девочкой дважды. Решение задачи представляет собой пример важного метода планирования эксперимента, который называется «уравновешенные неполные блоки».

Когда Паркеру стали известны результаты Боуса и Шрикхенда, он придумал новый метод построения греко-латинского квадрата десятого порядка, изображенного на рис. 3. В каждой клетке левая цифра (от 0 до 9) относится к первому латинскому квадрату, а правая цифра — ко второму. С помощью этого квадрата, само существование которого отрицается во многих учебниках по методике эксперимента, можно без труда осуществить эксперименты, где эффективно контролируются четыре переменные, каждая из которых принимает де-

сять разных значений. (Отметим, что находящийся в правом нижнем углу квадрата десятого порядка маленький квадрат третьего порядка представляет собой греко-латинский квадрат. Все квадраты десятого порядка, составленные Паркером с сотрудниками, содержали подквадрат третьего порядка — подразумевается, что, переставляя строки и столбцы большого квадрата, такой маленький квадрат можно выделить всегда. Изменение порядка расположения строк и столбцов не влияет на свойства греко-латинского квадрата. Это утверждение совершенно тривиально. Если один квадрат получается из другого перестановкой строк или столбцов, то эти два квадрата не различаются. Одно время оставался открытым вопрос о том, все ли греко-латинские квадраты десятого порядка содержат подквадраты третьего порядка; ответ оказался отрицательным, потому что нашлось много квадратов, не обладавших таким свойством.)

Заканчивая сообщение, авторы пишут:

«В это время завязалась лихорадочная переписка между Боусом и Шрикхендом, с одной стороны, и Паркером — с другой. Методы все больше совершенствовались; в конце концов выяснилось, что гипотеза Эйлера неверна для всех значений $n = 4k + 2$, когда n больше шести. Та неожиданность, с которой вдруг разрешилась проблема, в течение двух столетий сбивавшая с толку математиков, поразила авторов открытия не меньше, чем окружающих. Еще удивительнее то, что для доказательства теоремы использовались методы, весьма далекие от используемых в современной математике.

После 1959 года резко возросли как скорость электронно-вычислительных машин, так и изобретательность математиков-программистов. Паркер написал программу для электронно-вычислительной машины UNIVAC-1206, которой требовалось от 28 до 45 мин рабочего времени, чтобы осуществить полный поиск квадратов, ортогональных заданному латинскому квадрату десятого порядка, то есть машина работала примерно в три триллиона раз быстрее старой SWAC. Результатом были сотни новых греко-латинских квадратов десятого по-