Н. Е. Кочин

Векторное исчисление и начала тензорного исчисления

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н. Е. Кочин

Н11 Векторное исчисление и начала тензорного исчисления / Н. Е. Кочин – М.: Книга по Требованию, 2013. – 428 с.

ISBN 978-5-458-26550-8

Учебное пособие. Векторная алгебра и анализ в книге изложены достаточно подробно, чтобы на их основе можно было изучать механику и другие разделы физики в векторном изложении. Даны также основы теории аффинных ортогональных тензоров с применением ее к теории упругости, а также основы общей теории тензоров.Предлагаемое пособие имеет своей целью дать изучающим его, главным образом студентам вузов и втузов, необходимые сведения по векторному исчислению для того, чтобы можно было в дальнейшем изучать векторным способом другие дисциплины, как, например, теоретическую механику, гидродинамику, теорию электричества.Курс снабжен большим количеством задач геометрического и элементарно-механического характера, помогающих лучшему усвоению понятий и методов векторного исчисления.9-е издание.

ISBN 978-5-458-26550-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I

ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

§ 1. Определение скаляра и вектора. Равенство векторов

1. В математике и физике (в частности, в механике) приходится иметь дело с величинами двух родов: одни из величин связаны с понятием о направлении в пространстве, другие же имеют чисто числовой характер и не связаны с понятием о направлении. Рассмотрим, например, температуру, массу, плотность, энергию, перемещение точки, скорость, ускорение, силу. Резкое отличие последних четырех величин от первых четырех состоит в том, что с ними должно быть связано понятие о направлении: например, точка может перемещаться вверх или вниз, вперед или назад и т. д. Первые четыре величины, не связанные с понятием о направлении, принадлежат к классу величин, называемых скалярами. Остальные четыре величины, имеющие определенное направление, относятся к классу величин, называемых векторами.

Рассмотрим один из скаляров — температуру. Чтобы охарактеризовать температуру воздуха в данном месте в некоторый момент, мы должны измерить температуру, например, в градусах Цельсия, полученное число (положительное или отрицательное) даст величину температуры. Точно так же мы можем измерить в соответствующих единицах массу тела, его плотность и т. д. Поэтому мы можем дать следующее определение скаляра:

Скаляром называется величина, характеризующаяся при выбранной единице меры одним числом.

Наиболее типичным скаляром является отвлеченное число. Другие примеры скаляров мы уже указывали: температура, масса, плотность, энергия.

Остановимся несколько на вопросе о сравнении и равенстве скаляров. Очевидно, нельзя сравнивать температуру и массу или температуру и плотность и т. д. Обе сравниваемые величины непременно должны обладать одинаковой размерностью, т. е. единицы их меры должны быть одинаковым образом связаны с основными единицами. В механике за основные единицы принимают единицу длины (символ L), единицу массы (символ M) и единицу времени (символ T) (вместо единицы массы в технической системе мер вводят в качестве основной единицу силы). Тогда, например, плотность будет иметь размерность ML^{-3}, ибо единица плотности есть плотность однородного тела, имеющего объем, равный единице, при условии, что масса этого тела также равна единице. Поэтому, при увеличении единицы массы, например, в два раза, единица плотности также увеличивается в два раза; при увеличении же единицы длины в два раза единица плотности уменьшается в восемь раз. Символ ML^{-3} выражает только что указанную зависимость единицы плотности от основных единиц.

Два скаляра одной и той же размерности равны, если при измерении их одной и той же единицей меры получаются одинаковые числа.

Рассмотрим теперь один из векторов — скорость точки. Указания величины скорости, измеренной, скажем, в сантиметрах в секунду, недостаточно для характеристики скорости. Нужно еще задать направление движения точки. Точно так же имеют определенное направление и ускорение точки и сила, действующая на некоторую материальную точку. Дадим поэтому следующее определение:

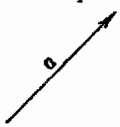
Вектором называется величина, характеризующаяся, помимо измеряющего ее в определенных единицах меры числа, еще своим направлением в пространстве.

Как простейшим скаляром является отвлеченное число, так простейшим вектором является прямолинейный отрезок $\overline{AB}$, имеющий определенную величину — длину AB и определенное направление — от начальной точки A к конечной точке B.

Мы уже указывали другие примеры векторов: перемещение точки, ускорение, сила. Каждому такому вектору можно сопоставить прямолинейный отрезок, имеющий направление рассматриваемого вектора и длину, равную численному значению вектора (отложенному в некотором масштабе).

Численное значение вектора называется величиной, модулем или длиной вектора.

На чертежах векторы обозначаются стрелками (фиг. 1). Направление стрелки указывает на направление вектора, длина стрелки дает длину вектора.



Фиг. 1

Обычно векторы обозначаются жирными готическими или латинскими буквами. Иногда мы будем обозначать вектор, начальная точка которого есть A, а конечная — B, символом $\overline{AB}$.

Длину вектора, т. е. его численную величину, мы будем обозначать теми же курсивными буквами: a, A, AB или же будем пользоваться знаком модуля:

$$|\mathbf{a}| = a, \quad |\mathbf{A}| = A, \quad |\overline{AB}| = AB$$

2. Перейдем к вопросу о сравнении и равенстве векторов. Сравниваемые векторы должны обладать одной и той же размерностью, например, нельзя сравнивать силу со скоростью, и т. п.

Два вектора **a** *и* **b**, *обладающие одной и той же размерностью, мы будем считать равными, если они имеют одно и то же направление и одну и ту же длину.*

Равенство двух векторов **a** и **b** мы будем обозначать следующим образом:

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} \tag{1}$$

Таким образом, если два вектора имеют неодинаковую длину или неодинаковое направление, они не могут быть равными.

Возьмем какой-нибудь параллелограмм и снабдим две противоположные стороны его одним и тем же направлением; полученные векторы будут, по нашему определению, равными; таким образом, положение начальной точки вектора для нас роли не играет.

Легко видеть, что для численного задания вектора нужно указать три числа. В самом деле, одним числом нужно задать величину вектора и двумя числами — его направление (например в астрономии направление на небесное светило определяют, указывая: 1) азимут и высоту или 2) прямое восхождение и склонение или 3) долготу и широту светила).

Равенство двух векторов сводится к равенству попарно трех чисел, эти векторы определяющих. Таким образом, одно векторное равенство равносильно трем скалярным.

3. Отметим, что различают векторы трех родов: свободные, передвижные и определенные векторы. Введенные нами векторы относятся к типу свободных, так как точку их приложения можно выбирать по произволу. У передвижных векторов точку приложения вектора можно перемещать произвольно вдоль самого вектора, так что последний может лежать на любой части определенной прямой. Примером передвижного вектора является сила, приложенная к твердому телу, так как за точку приложения силы можно взять любую точку на линии действия силы. Наконец, у определенных векторов точка приложения вектора должна быть зафиксирована. Так, например, при рассмотрении движения жидкости за точку приложения силы, действующей на какую-либо частицу жидкости, принимается некоторая точка самой частицы.

Изучение передвижных и определенных векторов сводится к изучению свободных векторов, почему достаточно ограничиться рассмотрением только последних.

В физике приходится рассматривать еще величины тоже направленного характера, но более сложного, чем векторы, строения. Эти величины называются тензорами. Определение их будет дано в главе III. Сейчас укажем только несколько примеров: распределение моментов инерции относительно различных осей, проходящих через некоторую точку твердого тела, приводит к понятию тензора моментов инерции; распределение напряжений на различно направленные элементы в некоторой точке упругого тела приводит к понятию тензора упругих напряжений и т. д. Наконец, в главе IV будет дано еще более общее определение.

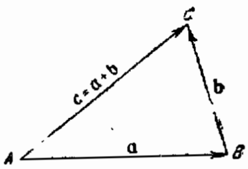
4. Скаляры, векторы и тензоры являются объектами, изучаемыми в векторном исчислении.

Как всякое исчисление, векторное исчисление должно ввести ряд операций с векторами и тензорами, как например сложение, умножение, дифференцирование, и изучить эти операции. Эти операции определяются таким образом, чтобы при их помощи легко было интерпретировать те комбинации векторов, которые приходится изучать в математике, механике и физике. Так, например, в физике очень часто встречается правило параллелограмма: параллелограмм скоростей, сил и т. д. Этому правилу отвечает операция сложения векторов, которая будет рассмотрена в следующем параграфе.

В результате как основные элементы векторного исчисления — вектор и тензор, так и операции с этими элементами, оказываются хорошо приспособленными для изучения тех геометрических, механических и физических явлений, в которых большую роль играет направление величин; поэтому применение векторного исчисления для изучения таких явлений, с одной стороны, упрощает исследование, а с другой стороны, ведет его более естественным и наглядным образом, не требуя введения посторонних элементов, как это имеет место в обычном методе координат.

§ 2. Сложение, вычитание и разложение векторов. Умножение вектора на скаляр. Единичные векторы

1. Чтобы подойти к понятию суммы двух векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, рассмотрим, что будет с некоторой точкой P, совершающей последовательно одно за другим два перемещеня, представляемые векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Первое перемещение переведет нашу точку из начального положения A (фиг. 2) в положение B (прямолинейный отрезок AB есть вектор $\mathbf{a}$, т. е. $\overline{AB} = \mathbf{a}$), второе перемещение переведет рассматриваемую точку из положения B в положение C, такое, что $\overline{BC} = \mathbf{b}$. В результате точка перейдет из A в C. Перемещение AC определяет вектор $\mathbf{c}$, который естественно назвать суммой векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$. Отсюда вытекает следующее определение:



Фиг. 2

Чтобы получить вектор $\mathbf{c}$, *представляющий геометрическую сумму двух векторов* $\mathbf{a}$ *и* $\mathbf{b}$, *надо от произвольной точки* A *пространства отложить вектор* $\mathbf{a}$, *к концу его приложить начало вектора* $\mathbf{b}$ *и соединить точку* A *с концом* C *вектора* $\mathbf{b}$, *тогда* $\overline{AC}$ *по величине и направлению представляет* $\mathbf{c}$.

Для обозначения операции сложения векторов пользуются обыкновенным знаком алгебраического сложения:

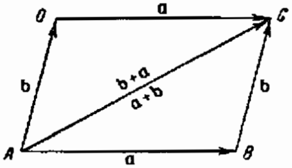
$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b} \tag{1}$$

Векторы **a** и **b** называются *слагаемыми векторами*, вектор **c** — *геометрической суммой* или *результирующим вектором*.

Из фиг. 3 видно, что сумма двух векторов **a** и **b** является диагональю параллелограмма, построенного на слагаемых векторах **a** и **b**.

Отсюда сразу вытекает формула

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} \tag{2}$$



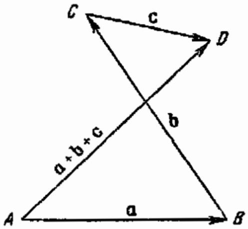
Фиг. 3

выражающая *коммутативность* (*т. е. переместительность*) *геометрического сложения: геометрическая сумма не меняется от перестановки слагаемых.*

Мы останавливаемся на этом простом свойстве геометрической суммы потому, что некоторые операции векторного исчисления таким свойством не обладают.

Чтобы образовать сумму трех векторов **a**, **b** и **c**, мы складываем сначала **a** с **b** и к результирующему вектору прибавляем **c**, окончательно получаем (фиг. 4) вектор $\overline{AD}$; из чертежа очевидно, что тот же самый результат получится, если к **a** прибавить сумму **b** + **c**, таким образом имеем формулу

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} \tag{3}$$



Фиг. 4

выражающую *ассоциативность* (*сочетательность*) *геометрического сложения: в геометрической сумме скобки можно раскрывать и вводить как в обыкновенной алгебре.*

Для сложения трех и более векторов получается таким образом правило многоугольника векторов: *надо последовательно отложить в любом порядке векторы* $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$, *совмещая начало каждого следующего с концом предыдущего, и образовать замыкающую линию полученной ломаной линии, ведя ее от начала первого вектора к концу последнего.* Из коммутативности и ассоциативности сложения вытекает, что мы можем складывать векторы в любом порядке, в частности можем заменять любое количество их соответствующим результирующим вектором.

Отметим особо правило сложения трех векторов, не лежащих в одной плоскости: геометрическая сумма таких трех векторов изображается диагональю параллелепипеда, построенного на данных трех векторах, как на ребрах. Так например, на фиг. 8 вектор $\overline{OD}$ равен геометрической сумме векторов $\overline{OK}$, $\overline{OL}$ и $\overline{OM}$.

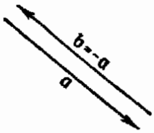
2. Перейдем к вычитанию векторов. Рассмотрим тот частный случай сложения двух векторов **a** и **b**, когда результирующий вектор сведется в точку, т. е. обратится в нуль (фиг. 5):

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = 0 \tag{4}$$

Очевидно, в этом случае вектор $\mathbf{b}$ равен по величине, но противоположен по направлению вектору $\mathbf{a}$.

Если бы с уравнением (4) можно было поступать по правилам обычной алгебры, то мы легко вывели бы, что

$$\mathbf{b} = -\mathbf{a} \tag{5}$$



Фиг. 5

В соответствии с этим *под вектором* $-\mathbf{a}$ *мы будем понимать вектор, противоположный* $\mathbf{a}$, *т. е. равный по величине, но противоположный по направлению вектору* $\mathbf{a}$.

Вычитание, как действие, обратное сложению, определяется следующим образом: вектор $\mathbf{x} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$ называется разностью векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, если сумма $\mathbf{x}$ и $\mathbf{b}$ дает $\mathbf{a}$:

$$\mathbf{x} + \mathbf{b} = \mathbf{a} \tag{6}$$

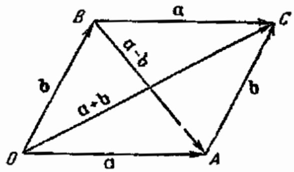
Прибавляя к обеим частям этого уравнения вектор $-\mathbf{b}$, мы получим:

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{x} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \tag{7}$$

Таким образом, *чтобы вычесть из вектора* $\mathbf{a}$ *вектор* $\mathbf{b}$, *надо прибавить к вектору* $\mathbf{a}$ *вектор* $-\mathbf{b}$, *противоположный вектору* $\mathbf{b}$. Иначе можно получить вектор $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ следующим образом: отложив оба вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ от общего начала O, проведем вектор из конца B вектора $\mathbf{b}$ к концу A вектора $\mathbf{a}$ (фиг. 6), это и будет $\mathbf{a} - \mathbf{b}$.

В самом деле:

$$\overline{BA} = \overline{BO} + \overline{OA} = -\mathbf{b} + \mathbf{a}$$



Фиг. 6

Таким образом, в параллелограмме, построенном на $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ (фиг. 6), одна диагональ представляет сумму векторов $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, другая — их разность.

3. Нужно отметить, что правило параллелограмма для геометрического сложения векторов ограничивает область направленных величин, которые мы можем назвать векторами. Например, вращение твердого тела около некоторой оси на конечный угол может быть представлено направленным отрезком, но это не будет вектор, ибо два последовательных вращения около разных осей складываются (как доказывается в кинематике) не по правилу параллелограмма, а по более сложному закону. Это объясняется тем, что направленная величина, представляющая поворот твердого тела на конечный угол около некоторой оси, являятся тензором, т. е. величиной более сложного характера, нежели вектор. Напротив, бесконечно малые вращения могут быть представлены векторами, ибо для них правило параллелограмма справедливо, так же как для сил, скоростей и т. д.

Таким образом, точнее было бы определить *вектор как величину, характеризующуюся своим численным значением, своим направлением в пространстве и подчиняющуюся правилу геометрического сложения.*

Действием, обратным геометрическому сложению, является, помимо геометрического вычитания, еще *геометрическое разложение, состоящее в том, что данный вектор заменяют равной ему суммой нескольких векторов.* Геометрически это сводится к построению ломаной линии, имеющей данный вектор замыкающей стороной. Очевидно, задача в таком виде имеет неопределенный характер и надо наложить на геометрические слагаемые ряд условий, чтобы сделать задачу определенной.

Важнейшие случаи разложения мы сейчас и рассмотрим, но предварительно остановимся на вопросе об умножении вектора на скаляр.

4. Пусть мы имеем вектор $\mathbf{a}$; умножить его на целое положительное число m — значит сложить между собою m векторов, равных $\mathbf{a}$; в результате, очевидно, получится вектор $\mathbf{b}$, имеющий то же направление, что и $\mathbf{a}$, но по длине в m раз больший:

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} = \mathbf{a}m, \quad b = ma \tag{8}$$

Отсюда можно вывести, что *при всяком положительном m мы должны принимать за вектор $m\mathbf{a}$ вектор длины ma, имеющий то же направление, что и* $\mathbf{a}$.

Раньше мы уже определили умножение вектора $\mathbf{a}$ на -1; это есть вектор, противоположный $\mathbf{a}$; поэтому *при умножении $\mathbf{a}$ на отрицательное число m мы получаем вектор длины $|m|\, a$, параллельный $\mathbf{a}$, но имеющий противоположное направление.*

Из этих определений непосредственно вытекает справедливость следующих формул:

$$(m + n)\,\mathbf{a} = m\mathbf{a} + n\mathbf{a} \tag{9}$$

$$m\,(n\mathbf{a}) = (mn)\,\mathbf{a} = n\,(m\mathbf{a}) \tag{10}$$

Если умножить два вектора $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ на m и потом сложить, то получится результат, одинаковый с тем, который мы получили бы, если бы сначала сложили $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, а потом умножили на m:

$$m\mathbf{a} + m\mathbf{b} = m\,(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \tag{11}$$

В этом выражается *дистрибутивный (распределительный) закон умножения вектора на скаляр: скобки можно раскрывать, как в обыкновенной алгебре.* Для доказательства достаточно представить себе геометрический смысл уравнения (11), которое выражает, что если мы изменим на фиг. 2 стороны $\triangle ABC$ в отношении m, то из полученных векторов составится новый треугольник, подобный данному.

Формула (11), очевидно, справедлива и для нескольких векторов

$$m\mathbf{a}_1 + m\mathbf{a}_2 + \ldots + m\mathbf{a}_n = m\,(\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2 + \ldots + \mathbf{a}_n) \tag{12}$$

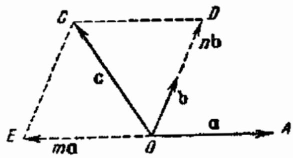
5. Только что рассмотренные нами векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$:

$$\mathbf{b} = m\mathbf{a} \tag{13}$$

параллельны между собой; такие векторы называются также коллинеарными.

Обратно, всякий вектор $\mathbf{b}$ может быть выражен через коллинеарный вектор $\mathbf{a}$ по формуле (13), где m — скалярный множитель, представляющий отношение длин векторов $\mathbf{b}$ и $\mathbf{a}$, взятое со знаком плюс или минус, смотря по тому, имеют ли векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ одинаковое направление или как раз противоположное.

Особенно важен частный случай, когда один из коллинеарных векторов имеет длину, равную единице. Такие векторы называются единичными векторами или ортами. Орт вектора $\mathbf{a}$ часто обозначают через $\mathbf{a}_1$, указывая значком 1, что вектор $\mathbf{a}_1$ есть единичный. Тогда для всякого вектора $\mathbf{a}$ будем иметь:



Фиг. 7

$$\mathbf{a} = a\mathbf{a}_1 \tag{14}$$

В формуле (14) разделены два элемента, характеризующие вектор: его длина a и его направление $\mathbf{a}_1$.

6. Если векторы $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$ не коллинеарны, то вектор

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} \tag{15}$$

параллелен плоскости, определяемой векторами $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, ибо геометрическая сумма векторов, лежащих в одной плоскости, лежит в той же плоскости.

В этом случае говорят, что векторы $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ компланарны, т. е. параллельны одной плоскости.

Обратно, всякий вектор $\mathbf{c}$, компланарный двум неколлинеарным векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, может быть представлен формулой (15). Для доказательства отложим все три вектора $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ от общего начала O (фиг. 7) и проведем через конец C вектора $\mathbf{c}$ прямые CD и CE, параллельные векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$; тогда $\mathbf{c}$ представится как геометрическая сумма двух векторов, коллинеарных соответственно векторам $\mathbf{a}$ и $\mathbf{b}$, т. е. равных $m\mathbf{a}$ и $n\mathbf{b}$. В результате получается разложение (15). Это разложение единственное, так как если бы мы имели два разложения:

$$\mathbf{c} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$$

$$\mathbf{c} = m'\mathbf{a} + n'\mathbf{b}$$

то, вычитая нижнее равенство из верхнего, мы получили бы

$$0 = (m - m')\,\mathbf{a} + (n - n')\,\mathbf{b} \tag{16}$$

Отсюда непременно

$$m - m' = 0, \quad n - n' = 0$$

т. е. $m = m'$, $n = n'$. В самом деле, если бы, например, $m - m \neq 0$, то, решая уравнение (16) относительно **a**, мы нашли бы

$$\mathbf{a} = -\frac{n - n'}{m - m'}\,\mathbf{b}$$

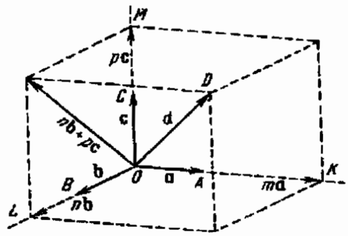
т. е. **a** был бы коллинеарен с **b**, что противоречит предположению.

Итак, разложение (15) единственно.

7. Если три вектора **a**, **b** и **c** не компланарны, то всякий вектор **d** может быть представлен в форме

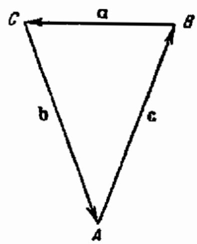
$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c} \qquad (17)$$

т. е. разложен на три составляющие, параллельные соответственно векторам **a**, **b** и **c**.



Фиг. 8

Для доказательства отложим все четыре вектора **a**, **b**, **c**, **d** от общего начала O (фиг. 8) и проведем через конец D вектора **d** плоскости, параллельные граням трехгранного угла, образованного векторами **a**, **b** и **c**; тогда **d** представится как сумма трех векторов (например $\overline{OK}$, $\overline{OL}$, $\overline{OM}$), коллинеарных соответственно векторам **a**, **b** и **c**, т. е. равных $m\mathbf{a}$, $n\mathbf{b}$ и $p\mathbf{c}$. В результате получается разложение (17). Это разложение единственное, так как, если бы мы имели два разложения:



Фиг. 9

$$\mathbf{d} = m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}$$

$$\mathbf{d} = m'\mathbf{a} + n'\mathbf{b} + p'\mathbf{c}$$

мы из них получили бы

$$0 = (m - m')\,\mathbf{a} + (n - n')\,\mathbf{b} + (p - p')\,\mathbf{c}$$

и если бы хоть одна из разностей $m - m'$, $n - n'$, $p - p'$ не равнялась нулю, то векторы **a**, **b** и **c** оказались бы компланарными, что противоречит предположению. Поэтому $m' = m$, $n' = n$, $p' = p$, т. е. разложение (17) единственно.

Разберем несколько примеров на сложение и разложение векторов.

Задача 1. Какому условию должны удовлетворять три вектора **a**, **b**, **c**, чтобы из них можно было образовать треугольник (фиг. 9).

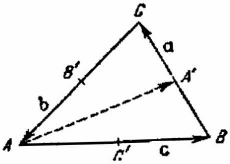
Из чертежа видно, что искомым условием является

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = 0$$

так как тогда и только тогда ломаная линия $BCAB$ замкнется и образуется треугольник.

Задача 2. Доказать, что можно построить треугольник, стороны которого равны и параллельны медианам данного $\triangle ABC$ (фиг. 10).

Обозначим середины сторон BC, CA и AB соответственно через A', B' и C'. Выразим векторы, представляющие медианы треугольника, т. е. $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$, через $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$. Найдем, например, $\overline{AA'}$:



Фиг. 10

$$\overline{AA'} = \overline{AB} + \overline{BA'} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a}$$

ибо

$$\overline{BA'} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{1}{2}\mathbf{a}$$

Циклической перестановкой (т. е. заменой $\mathbf{a}$ на $\mathbf{b}$, $\mathbf{b}$ на $\mathbf{c}$ и $\mathbf{c}$ на $\mathbf{a}$) получаем

$$\overline{BB'} = \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b}, \quad \overline{CC'} = \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c}$$

Проверяем условие задачи 1, что из векторов $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$, $\overline{CC'}$ можно составить треугольник; для чего составляем

$$\overline{AA'} + \overline{BB'} + \overline{CC'} = \mathbf{c} + \frac{1}{2}\mathbf{a} + \mathbf{a} + \frac{1}{2}\mathbf{b} + \mathbf{b} + \frac{1}{2}\mathbf{c} = \frac{3}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}) = 0$$

Условие задачи 1 выполняется; следовательно, из $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ и $\overline{CC'}$ действительно можно составить треугольник.

Прежде чем переходить к дальнейшим примерам, мы введем несколько необходимых нам понятий.

Положение какой-нибудь точки пространства P может быть определено вектором $\overline{OP}$, начальной точкой которого служит некоторая определенным образом выбранная точка O, а концом — точка P; *вектор $\overline{OP}$ мы будем называть радиусом-вектором точки P относительно точки O и будем обозначать обычно буквой $\mathbf{r}$. Про точку P, заданную радиусом-вектором $\mathbf{r}$, мы будем говорить, для сокращения речи, что дана точка P ($\mathbf{r}$).*

Задача 3. Найти радиус-вектор $\mathbf{r}$ середины C отрезка AB, зная точки A ($\mathbf{r}_1$) и B ($\mathbf{r}_2$). Вычисляем

$$\mathbf{r} = \overline{OC} = \overline{OA} + \overline{AC} = \overline{OA} + \frac{1}{2}\overline{AB} = \overline{OA} + \frac{1}{2}(\overline{OB} - \overline{OA}) =$$
$$= \mathbf{r}_1 + \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1) = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \qquad (18)$$

Задача 4. Доказать, что если диагонали четырехугольника делят друг друга пополам, то четырехугольник есть параллелограмм.

В самом деле, если радиусы-векторы четырех последовательных вершин четырехугольника $ABCD$ суть $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$, $\mathbf{r}_3$, $\mathbf{r}_4$, то середина диагонали AC будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{r}' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_3)$$

а середина диагонали BD будет иметь радиус-вектор

$$\mathbf{r}'' = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_4)$$