Р.Н. Бончковский

Математическое просвещение. Выпуск 2

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Р11

Р.Н. Бончковский
Р11 Математическое просвещение. Выпуск 2 / Р.Н. Бончковский – М.: Книга по Требованию, 2014. – 76 с.

ISBN 978-5-458-25363-5

Темы номера: Некоторые упрощения при решении иррациональных уравнений, содержащих квадратные радикалы - Вывод некоторых формул тригонометрии - Решение треугольников способом выпрямления сторон - Обобщение теоремы Хузеля - Разбиение выпуклого многоугольника на треугольники с помощью диагоналей - Доказательство существования n-значных бесконечных асимметричных последовательностей - Геометрическая теория гиперболических функций - Элементарное доказательство трансцендентности показательней и тригонометрической функций - Аналитическое исследование некоторых типов проективных преобразований - Пространственные диаграммы - Об одном свойстве конического сечения, вписанного в треугольник - Изобразительные моменты в преподавании анализа бесконечно малых - Крупный успех современной математики - Упражнения тля учащихся.

ISBN 978-5-458-25363-5

Формула (2) упрощает получение резольвенты и в тех случаях, когда A_1 и A_2—нелинейные функции неизвестного.

Примеры:

4. $\sqrt{2x^2+5x-2}+\sqrt{2x^2+5x-9}=1.$

По формуле (2) имеем:

$$49-2(4x^2+10x-11)+1=0,$$

откуда

$$2x^2+5x-18=0,$$

т. е.

$$x_1=2;\quad x_2=-4\frac{1}{2}.$$

Применение формулы (2) дает возможность легко обнаружить общего множителя всех членов уравнения, на который можно сократить уравнение, что при обычном способе освобождения от радикалов зачастую ускользает.

5. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{2x+3}=\sqrt{3x+4}.$

Формула (2) дает:

$$(3x+4)^2-2(3x+4)(7x+10)+(3x+4)^2=0.$$

Сократив на $3x+4$, отчего теряется корень $x_1=-\frac{4}{3}$, получим:

$$3x+4-14x-20+3x+4=0,$$

т. е.

$$8x=-12,\quad \text{или}\quad x_2=-\frac{3}{2}.$$

6. $\sqrt{5x+7}-\sqrt{3x+1}=\sqrt{x+3}.$

Формула (2) дает:

$$(2x+6)^2-2(8x+8)(x+3)+(x+3)^2=0.$$

Сокращая на $x+3$, отчего теряется корень $x_1=-3$, получим:

$$5x+15-16x-16=0,$$

т. е.

$$x_2=-\frac{1}{11}.$$

7. $\sqrt{2x^2+21x-11}-\sqrt{2x^2-9x+4}=\sqrt{18x-9}.$

Формула (2) дает:

$$(30x-15)^2-2(4x^2+12x-7)\cdot 9(2x-1)+81(2x-1)^2=0.$$

Сокращая на $9(2x-1)^2$, отчего теряется корень $x_1=\frac{1}{2}$, получим:

$$25-4x-14+9=0,$$

т. е.

$$x_2=5.$$

II. ВЫВОД ФОРМУЛ ДЛЯ СУММЫ И ПРОИЗВЕДЕНИЯ КОРНЕЙ РЕЗОЛЬВЕНТЫ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА:

$$\sqrt{a_1x+b_1}\pm\sqrt{a_2x+b_2}=\pm\sqrt{a_3x+b_3}. \qquad (1)$$

Формула (2) § 1 дает:

$$[(a_1-a_2)x+(b_1-b_2)]^2-2(a_3x+b_3)[(a_1+a_2)x+b_1+b_2]+$$
$$+a_3^2x^2+2a_3b_3x+b_3^2=0. \qquad (2)$$

Коэфициенты при x^2 и x будут соответственно равны:

$$(a_1-a_2)^2-2a_3(a_1+a_2)+a_3^2, \tag{3}$$

$$2[(a_1-a_2)(b_1-b_2)-b_3(a_1+a_2)-a_3(b_1+b_2)+a_3b_3]. \tag{4}$$

Тогда

$$x_1+x_2=-\frac{2[(a_1-a_2)(b_1-b_2)-b_2(a_1+a_2)-a_3(b_1+b_2)+a_3b_2]}{(a_1-a_2)^2-2a_3(a_1+a_2)+a_3^2}. \tag{5}$$

В частном случае, когда $a_3=0$,

$$x_1+x_2=\frac{2[b_3(a_1+a_2)-(a_1-a_2)(b_1-b_2)]}{(a_1-a_2)^2}. \tag{6}$$

Свободный член уравнения (2) § 2 будет равен:

$$(b_1-b_2)^2-2b_3(b_1+b_2)+b_3^2, \tag{7}$$

а следовательно,

$$x_1x_2=\frac{(b_1-b_2)^2-2b_3(b_1+b_2)+b_3^2}{(a_1-a_2)^2-2a_3(a_1+a_2)+a_3^2}. \tag{8}$$

В частном случае, когда $a_3=0$,

$$x_1x_2=\frac{(b_1-b_2)^2-2b_3(b_1+b_2)+b_3^2}{(a_1-a_2)^2}. \tag{9}$$

Из рассмотрения выведенных формул мы замечаем, что формулы для коэфициента при неизвестном во 2-й степени и свободного члена, а также формула (2) § 1 для освобождения иррационального уравнения от радикалов составляются по одному и тому же закону, а потому знание этого закона может несколько облегчить составление резольвенты иррационального уравнения.

Примеры:

8. Для составления резольвенты уравнения

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}. \tag{10}$$

По формуле (2) § 1 имеем:

$$(5x-28)^2-(6x+8)(9x-26)+(3x+4)^2=0. \tag{11}$$

Коэфициент при x^2 по формуле (3) § 2:

$$25-6\cdot 9+9=-20.$$

Свободный член по формуле (7) § 2:

$$28^2-8\cdot(-26)+16=1008.$$

Для нахождения члена с неизвестным в 1-й степени, если не запоминать формулы (4), остается выписать из уравнения (11) только члены с неизвестным в 1-й степени, а именно:

$$-280x-72x+156x+24x=-172x.$$

Резольвента примет вид:

$$-20x-172x+1008=0.$$

III. РЕШЕНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВИДА:

$$\sqrt{a_1x+b_1}\pm\sqrt{a_2x+b_2}=\pm\sqrt{a_3x+b_3},$$

когда один из корней легко отыскивается догадкой.

Очень многие иррациональные уравнения указанного вида имеют одним из корней небольшое целое число, которое нетрудно найти простым соображением. Для отыскания второго корня достаточно воспользоваться формулой (8) § 2 для произведения корней, которую нетрудно запомнить.

Примеры:

1. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8).

Уравнение $\sqrt{3x-3}+\sqrt{5x-19}=\sqrt{3x+4}$ имеет очевидный корень $x_1=4$.

По формуле (8) § 2 имеем:

$$4x_2=\frac{16^2-8\cdot(-22)+16}{4-6\cdot8+9}=\frac{448}{-35}=-12{,}8,$$

т. е.

$$x_2=-3{,}2.$$

2. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 4):

Уравнение

$$\sqrt{3x+4}+\sqrt{x+2}=8$$

имеет очевидный корень $x_1=7$, а потому по формуле (8) § 2 имеем:

$$7x_2=\frac{4-128\cdot6+64^2}{4}=1-32\cdot6+64\cdot16=833,$$

т. е.

$$x_2=119.$$

IV. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ИРРАЦИОНАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ДРУГОЕ, ПРИВОДЯЩЕЕСЯ К РЕШЕНИЮ НЕПОЛНОГО КВАДРАТНОГО УРАВНЕНИЯ

Уравнение

$$ax^2+bx+c=0 \tag{1}$$

обращается в неполное, если положить

$$x=y+x_1, \tag{2}$$

где x_1 — один из корней уравнения (1).

В самом деле, после подстановки получим:

$$ay^2+(2ax_1+b)y=0.$$

На основании этого, если известен один из корней данного иррационального уравнения вида:

$$\sqrt{a_1x+b_1}\pm\sqrt{a_2x+b_2}=\pm\sqrt{a_3x+b_3},$$

то для нахождения второго корня можно ввести вспомогательное неизвестное, определяемое формулой (2) § 1, отчего пропадут члены, не содержащие неизвестного, и резольвента примет форму неполного квадратного уравнения, которое решить проще и скорее, чем полное.

Примеры:

9. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8).

$$\sqrt{3x+4}-\sqrt{3x-3}=\sqrt{5x-19}.$$

Очевидный корень $x_1=4$; полагая $x=y+4$, получим:

$$\sqrt{3y+16}-\sqrt{3y+9}=\sqrt{5y+1}.$$

Формула (2) § 1 даст:

$$49-(10y+2)(6y+25)+(5y+1)^2=0.$$

Пропуская свободные от неизвестного члены как взаимно уничтожающиеся, получим:

$$60y^2+12y+250y-25y^2-10y=0,$$

или

$$35y^2-252y=0,$$

откуда

$$y_1=0,\quad y_2=-7{,}2;$$

следовательно,

$$x_2=-3{,}2.$$

10. (Задачник Шапошникова и Вальцова, задача № 8bis).

$$\sqrt{2x+1}+\sqrt{7x-27}=\sqrt{3x+4}.$$

Очевидный корень $x_1=4$; полагая $x=y+4$, получим:

$$\sqrt{2y+9}+\sqrt{7y+1}=\sqrt{3y+16},$$

откуда по формуле (2) § 1

$$(5y-8)^2-(6y+32)(9y+10)+(3y+16)^2=0,$$

или

$$25y^2-80y-54y^2-288y-60y+9y^2+96y=0,$$

или

$$20y^2+332y=0,$$

откуда

$$y_1=0,\quad y_2=-16{,}6;$$

следовательно,

$$x_2=-12{,}6.$$

Обычный способ решения:

$$(5x-28)^2-(6x+8)(9x-26)+(3x+4)^2=0,$$

$$25x^2-280x+784-54x^2-72x+156x+208+9x^2+24x+16=0,$$

$$20x^2+172x-1008=0,$$

$$5x^2+43x-252=0,$$

откуда

$$x_1=4;\quad x_2=-12{,}6.$$

11. $\sqrt{17x+19}+\sqrt{31x+33}=\sqrt{101x+95}.$

Очевидный корень $x_1=1$; полагая $x=y+1$, получим:

$$\sqrt{17y+36}+\sqrt{31y+64}=\sqrt{101y+196},$$

$$(14y+28)^2-(202y+392)(48y+100)+(101y+196)^2=0,$$

$$196y^2+784y-9696y^2-18\,816y-20\,200y+10\,201y^2+39\,592y=0,$$

$$701y^2+1360y=0,$$

откуда

$$y_1=0;\quad y_2=-\frac{1360}{701};$$

следовательно,

$$x_2=-\frac{659}{701}.$$

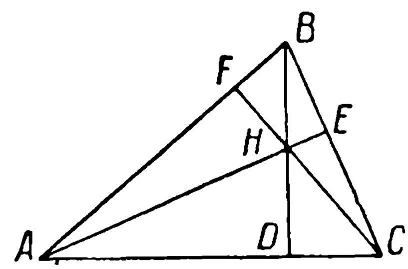
ВЫВОД НЕКОТОРЫХ ФОРМУЛ ТРИГОНОМЕТРИИ

Н. А. Колмогоров (Капланбек)

Существует много разных геометрических доказательств формул тригонометрии. Я имею в виду формулы сложения, вычитания, умножения и деления, а также формулы преобразования сумм и разностей в произведения.

Настоящая статья посвящена выводу некоторых из этих формул и имеет целью показать, что исходной фигурой при выводе может служить косоугольный треугольник с тремя проведенными в нем высотами, причем для вывода большинства формул достаточно проведения только лишь одной или двух высот.

При доказательстве формул я буду опираться на известные определения тригонометрических функций острого угла из прямоугольного треугольника.



Фиг. 1;

Возьмем косоугольный треугольник ABC, проведем в нем три высоты и введем обычные обозначения сторон и высот (фиг. 1).

Как известно, площадь треугольника ABC равна:

$$S = \frac{1}{2} bh_b,$$

но

$$h_b = c \sin A,$$

следовательно,

$$S = \frac{1}{2} bc \sin A,$$

с другой стороны,

$$S = \frac{1}{2} ah_a.$$

Из сравнения последних формул получаем:

$$bc \sin A = ah_a,$$

откуда

$$\sin A = \frac{ah_a}{bc}.$$

Последнее выражение примем за определение синуса угла A и будем в дальнейшем придерживаться именно этих определений синусов углов косоугольного треугольника.

Для углов B и C аналогично составим:

$$\sin B = \frac{bh_b}{ac}, \quad \sin C = \frac{ch_c}{ab}.$$

Если один из углов будет прямой, то эти выражения дадут обычные определения тригонометрических функций из прямоугольного треугольника. Пусть, например, $C=90°$, тогда $\sin C=1$, так как $ch_c=ab$; $\sin A=\frac{a}{c}$; $\sin B=\frac{b}{c}$.

Дадим теперь определение косинусов углов A, B и C косоугольного треугольника. По обычному определению имеем:

$$\cos A=\frac{AD}{c},$$

но из подобия треугольников AHD и AEC находим:

$$\frac{AD}{AH}=\frac{h_a}{b},$$

откуда

$$AD=\frac{AH\cdot h_a}{b},$$

следовательно,

$$\cos A=\frac{AH\cdot h_a}{bc}.$$

Аналогично составим:

$$\cos B=\frac{BH\cdot h_b}{ac};\ \cos C=\frac{CH\cdot h_c}{ab}.$$

Если угол C — прямой, то $\cos C=0$, так как $CH=0$.

Из остальных тригонометрических функций рассмотрим еще определения тангенсов для углов A, B и C.

Тангенс угла A определим, как отношение синуса угла A к косинусу этого угла, т. е.

$$\operatorname{tg} A=\frac{ah_a}{bc}:\frac{AH\cdot h_a}{bc}=\frac{a}{AH};$$

аналогично получим:

$$\operatorname{tg} B=\frac{b}{BH};\quad \operatorname{tg} C=\frac{c}{CH}.$$

Мы видим, что при таком определении тангенсы углов косоугольного треугольника выражаются особенно просто. Если мы еще введем знаки для отрезков AH, BH и CH, считая их положительными, если они имеют одинаковое направление от вершины треугольника с соответствующими высотами, и отрицательными, если они имеют направление, противоположное направлению соответствующих высот, то можно вышеуказанные определения считать справедливыми и для тупого угла. Для определенности будем считать высоты положительными и направленными от вершин к сторонам треугольника. Например, на фиг. 2 отрезки AH и BH имеют положительные направления, а отрезок CH — отрицательное, следовательно,

$$\sin A=+\frac{ah_a}{bc};\quad \cos A=+\frac{AH\cdot h_a}{bc};\quad \operatorname{tg} A=+\frac{a}{AH};$$

$$\sin B=+\frac{bh_b}{ac};\quad \cos B=+\frac{BH\cdot h_b}{ac};\quad \operatorname{tg} B=+\frac{b}{BH};$$

$$\sin C=+\frac{ch_c}{ab};\quad \cos C=-\frac{CH\cdot h_c}{ab};\quad \operatorname{tg} C=-\frac{c}{CH}.$$

Из вышеуказанных определений получаем теорему синусов в форме:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R,$$

и теорему косинусов в форме:

$$\frac{AH}{\cos A} = \frac{BH}{\cos B} = \frac{CH}{\cos C} = \frac{bc}{h_a} = \frac{ac}{h_b} = \frac{ab}{h_c} = 2R.$$

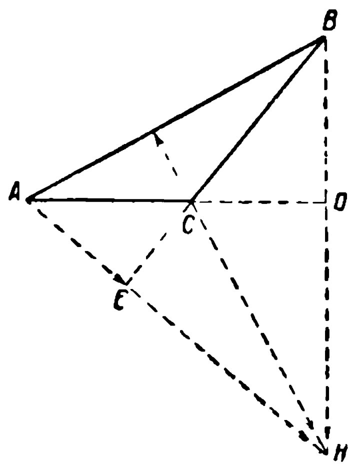
Последняя теорема в курсах тригонометрии не приводится в этом виде, а выражается, как известно, несколько иначе.

ВЫВОД ФОРМУЛ СЛОЖЕНИЯ И ВЫЧИТАНИЯ

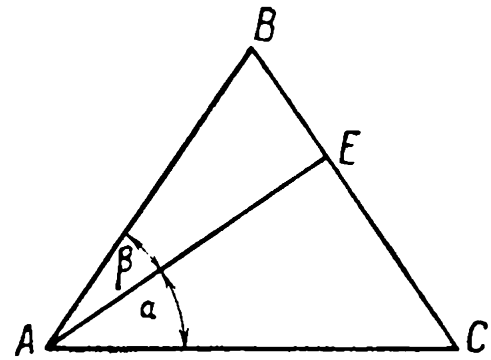
Вывод формулы:

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$$

Пусть даны углы α и β (фиг. 3). Проведем через произвольную



Фиг. 2.



Фиг. 3.

точку E, лежащую на общей стороне углов α и β, прямую $BC \perp AE$; тогда имеем:

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CB \cdot AE}{AC \cdot AB},$$

но

$$BC = CE + BE,$$

следовательно,

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{(CE + BE) \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

или

$$\sin(\alpha + \beta) = \frac{CE \cdot AE}{AC \cdot AB} + \frac{BE \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

но

$$\frac{CE}{AC} = \sin\alpha; \quad \frac{AE}{AB} = \cos\beta; \quad \frac{BE}{AB} = \sin\beta; \quad \frac{AE}{AC} = \cos\alpha,$$

поэтому

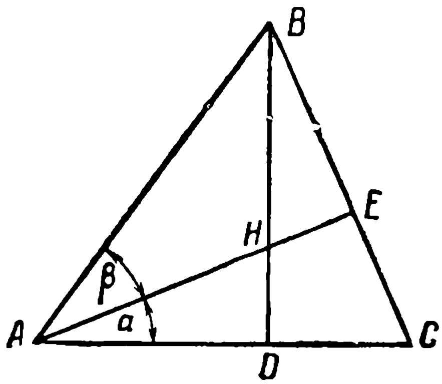
$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

Сделаем тот же чертеж, но проведем еще одну высоту BD (фиг. 4), тогда получим:



Фиг. 4.

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AH\cdot AE}{AB\cdot AC},$$

но

$$AH=AE-HE,$$

следовательно,

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{(AE-HE)\cdot AE}{AB\cdot AC},$$

или

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE\cdot AE}{AC\cdot AB}-\frac{HE\cdot AE}{AB\cdot AC};$$

но из подобия треугольников AEC и BHE имеем:

$$\frac{AE}{CE}=\frac{BE}{HE},$$

или

$$HE\cdot AE=CE\cdot BE.$$

Подставив это выражение в предыдущее равенство, получим:

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{AE\cdot AE}{AC\cdot AB}-\frac{CE\cdot BE}{AC\cdot AB},$$

но

$$\frac{AE}{AC}=\cos\alpha;\quad \frac{AE}{AB}=\cos\beta;$$

$$\frac{CE}{AC}=\sin\alpha;\quad \frac{BE}{AB}=\sin\beta,$$

поэтому

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Из того же чертежа (фиг. 4) имеем:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{BC}{AH}=\frac{CE+BE}{AE-HE},$$

но так как

$$HE \cdot AE = CE \cdot BE,$$

то

$$\frac{CE \cdot BE}{AE} = HE,$$

следовательно,

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{CE + BE}{AE - \frac{CE \cdot BE}{AE}} = \frac{\frac{CE}{AE} + \frac{BE}{AE}}{1 - \frac{CE \cdot BE}{AE \cdot AE}},$$

или, сделав замену этих отношений их тригонометрическими обозначениями, получим:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta},$$

что и требовалось доказать.

Аналогично можно вывести и формулы вычитания:

$$\sin(\alpha - \beta), \quad \cos(\alpha - \beta), \quad \operatorname{tg}(\alpha - \beta),$$

причем новых линий в треугольнике проводить не понадобится.

Вывод формулы:

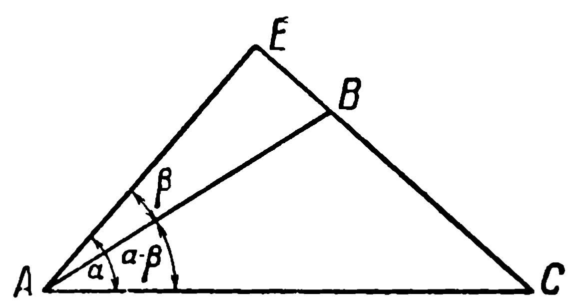
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha.$$

Пусть даны углы α и β. Построим их разность $\alpha - \beta$ (фиг. 5). Проведем $BC \perp AE$, тогда будем иметь:

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{BC \cdot AE}{AB \cdot AC} = \frac{(CE - BE) \cdot AE}{AB \cdot AC},$$

или

$$\sin(\alpha - \beta) = \frac{CE \cdot AE}{AC \cdot AB} - \frac{BE \cdot AE}{AB \cdot AC},$$



Фиг. 5.

но

$$\frac{CE}{AC} = \sin\alpha; \quad \frac{AE}{AB} = \cos\beta; \quad \frac{BE}{AB} = \sin\beta; \quad \frac{AE}{AC} = \cos\alpha;$$

поэтому

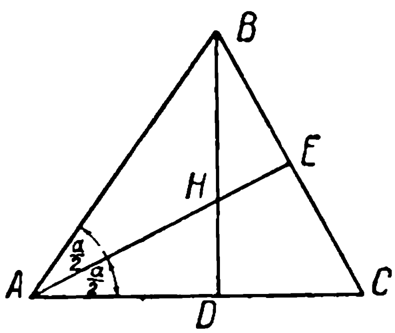
$$\sin(\alpha - \beta) = \sin\alpha\cos\beta - \sin\beta\cos\alpha,$$

что и требовалось доказать.

Можно вывести и формулы умножения и деления. Остановимся на выводе формулы:

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{2}}.$$

Возьмем угол α, разделим его пополам и проведем $BC \perp AE$, тогда $AB = AC$ (фиг. 6). Из прямоугольного треугольника AEC



Фиг. 6.

по теореме Пифагора имеем:

$$EC^2 = AC^2 - AE^2,$$

или

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AE,$$

но

$$AE = AH + HE,$$

следовательно,

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH - AE \cdot HE,$$

а так как

$$AE \cdot HE = EC \cdot BE,$$

то

$$EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH - EC \cdot BE,$$

или

$$2EC \cdot BE = AB \cdot AC - AE \cdot AH,$$

откуда

$$2\frac{EC \cdot BE}{AC \cdot AB} = 1 - \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AC};$$

но

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BE}{AB} = \sin\frac{\alpha}{2} \text{ и } \frac{AE \cdot AH}{AB \cdot AC} = \cos\alpha,$$

следовательно,

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - \cos\alpha,$$

а отсюда

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},$$

что и требовалось доказать.

Вывод формулы:

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Пусть $\alpha > \beta$. Построим угол α и отложим в нем угол β, как показано на фиг. 7. Далее, отложим $AB = AD$ и проведем через точки B и D прямую BC до пересечения в точке C со стороной AC. Затем проводим биссектрису AE угла BAD. Так как треугольник BAD равнобедренный, то $AE \perp BC$. Нетрудно доказать, что

$$\angle CAE = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$

Действительно,

$$\angle BAD = \alpha - \beta,$$

а

$$\angle EAD = \frac{\alpha-\beta}{2},$$

следовательно,

$$\angle CAE = \beta + \frac{\alpha-\beta}{2} = \frac{\alpha+\beta}{2}.$$