

**В. Феллер**

**Введение в теорию  
вероятностей и ее  
приложение**

**Том 1**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2  
ББК 74.27  
В11

**В. Феллер**  
В11 Введение в теорию вероятностей и ее приложение: Том 1 / В. Феллер – М.: Книга по Требованию, 2024. – 511 с.

**ISBN 978-5-458-26121-0**

Перевод второго, переработанного автором издания содержит систематическое изложение той части теории вероятностей, которая имеет дело с дискретными множествами элементарных событий (конечными и счётными). Такой выбор материала позволил автору без использования сложного аналитического аппарата ввести читателя в круг основных идей теории вероятностей и её приложений. Книга служит популярным введением в современную теорию вероятностей, доступным начинающим. Ее могут читать студенты младших курсов университетов, а также инженеры и научные работники всех специальностей, желающие ознакомиться с основами теории вероятностей. Особый интерес книга представит для биологов, для которых методы теории вероятностей являются главными математическими методами.

**ISBN 978-5-458-26121-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



- 292, 300
- главный член 157, 199
  - дисперсия 233, 236, 274
  - задача о размещении 47, 114
  - интегральные представления для 180, 348, 363
  - как предельная форма гипергеометрического распределения 71, 178
  - — — условное распределение в пуассоновском процессе 243
  - композиция 179, 264
  - математическое ожидание модуля 247
  - модель Эрэнфестов 386
- Биномиальное распределение, нормальное приближение для 185
- отрицательное, см. Отрицательное биномиальное распределение
  - производящая функция 274
  - пуассоновское приближение для 159, 178, 193
  - «хвосты» 158, 180, 198
  - числовые примеры 114, 161, 176
- Биномиальные коэффициенты 45, 62
- интегральные формулы 351, 363
  - тождества для 75, 101, 118
- «Благоприятные» случаи 35, 38
- Бозе—Эйнштейна статистика 16, 31, 52, 74, 119
- Больцмана—Максвелла, см. Максвелла—Больцмана статистика
- Бонферрони неравенства 116, 148
- Бореля—Кантелли леммы 206, 207
- Борьба за существование 434
- для иллюстрации алгебры событий 27, 36
  - распределение карт на руках 46, 70, 106, 117
  - тузов 21, 49, 70 175
  - условные вероятности 147
- Бросания монеты см. Испытания Бернулли; Первое достижение; Случайное блуждание; Серии в испытаниях Бернулли
- как задача о размещении 60
  - — — случайное блуждание 88, 336
  - — — ничьи при 313, 333
  - — — распределение лидерства 83, 93
  - — — эмпирические иллюстрации 33, 99
- Броуновское движение, см. Диффузия
- Буля неравенство 34
- $b(k, n, p)$  154
- Вакцин проверка 156
- Вероятности поглощения, см. Продолжительность игры. Вырождение
- в марковских цепях 391, 408, 421
  - — — процессах гибели и размножения 440, 441
  - — — — диффузионных 352, 362
  - — — при случайном блуждании 338, 355, 362
  - — — — обобщенном 356
- Ветвящиеся процессы 295. 300
- Включение 27
- Возвратные состояния 380
- Возвращение в начало при испытаниях Бернулли и случайном блуждании 89
- — — в многомерном пространстве 311, 353

- — — предельные теоремы 98, 102
- — — производящая функция 279, 288
- — — с различными вероятностями 394
- — — связь с марковскими цепями 395
- — — число 97, 288, 322
- — — эмпирические иллюстрации 99
- — — *n-e* 92, 103
- Восстановление совокупностей элементов и популяций 308, 319, 334
- Восстановления метод в случайном блуждании 362
- уравнение 314, 331
- Время возвращения 307, 334, см. Возвращение в начало, Время ожидания
  - — в марковских цепях 380, 425
  - — для рекордов 333
  - — — серий 324
  - жизни 319, 334
  - обслуживания показательное 330, 442
  - ожидания, см. Время первого достижения, Время возвращения, Возвращение в начало
  - — в биллиарде 288
  - — — задаче о коллекционировании 60, 117, 230, 245, 288
- Время возвращения в комбинаторных задачах 59, 69, 70
  - — — марковских цепях 380, 390 408
  - — — геометрическое 329
  - — — показательное 442
- 111, 229, 215
- первого достижения в испытаниях Бернулли и при случайном блуждании 89, 303, 337, см. Продолжительность игры, Время возвращения, Время ожидания
  - — — математическое ожидание 276, 341
  - — — предельные теоремы 102, 352, 363
  - — — производящие функции 276, 333, 344, 362
  - — — точные формулы 91, 347, 361
- Выбор 40, 238, 245
  - время ожидания 59, 118, 229
  - карт 106, 113, 117, 237
  - повторный 57, 177
  - последовательный 356, 360, 373
  - при классификации 245
  - рандомизированный (случайный) 221
  - с возвращением и без возвращения 40, 71, 117, 238
  - требуемый объем выборки 156. 193, 197, 250
  - элементарные задачи 68, 221
- Выборочное среднее 250
- Выборочный контроль 56, 175, 177, 244
  - — последовательный 356, 360, 373
- Выводок насекомых и его выживание 177, 292
- Выживание в ветвящихся процессах 295
  - — процессах гибели и размножения 439
  - генов 124, 177, 297, 394
  - фамилии 296

- в ветвящихся процессах 297
- — процессах гибели и размножения 439
- генов 124, 297, 394
- рода 296
- «Выврожденные» процессы 435, 460
- Гамма-функция 78
- Гауссовское (нормальное) распределение 184
- Гейгера — Мюллера счетчик, см. Счетчики
- Гены и генотипы 21, 121, 149
- — — марковские цепи 374
- — — мутации и выживание 297, 394, 434
- — — наследственность 261
- Гемофилия как признак, сцепленный с полом 126
- Геометрическое распределение 173, 243, 349
- — в различных задачах 61, 74, 243, 299
- — — случайных процессах 467
- — для объема семей 147, 296
- — как отрицательное биномиальное распределение 173, 229, 275
- — — предел статистики Бозе — Эйнштейна 74
- — отсутствия последствия 349 442
- — показательное распределение как предел 442
- Гипергеометрическое распределение 56, 69, 70, 238
- — двойное 59
- — приближение биномиальным распределением 71, 178
- — — нормальным распределением 197
- Гипотез вероятности 130
- Гипотезы 121
- статистические, см. Критерии статистические
- Граничные точки для стохастических процессов 466
- Грозовые разряды, распределение убытков 293, 428
- Групповка в марковских цепях 409
- Групповки критерий 54
- Данные Уэлдона о бросании кости 155
- Дважды стохастические матрицы 386
- Двойные испытания Бернулли
- производящие функции 283, 300, 335
- — — отрицательного биномиального распределения 290
- — — распределения Пуассона 179, 283
- Двойственности принцип 85
- Деление клеток 295
- Дефекты в материалах 166, 176
- выборочный контроль 175, 177, 244, 356, 373
- некоторые задачи 68, 147
- проверка крови 245
- пуассоновское распределение для числа 162
- Дискретные пространства элементарных событий 28
- Дисперсия 232
- вычисление по производящей функции 272
- нормального распределения 184
- суммы 235
- Дифференциальные уравнения Колмогорова 455
- — — единственность 463

- — — частный случай 431
- Диффузия 348
- коэффициент 350
- модель Эрэнфестов 127, 370, 386, 407
- поглощение и первое достижение 351, 362
- Дни рождения
  - — как задача о размещении 20, 72
  - — комбинаторные задачи 69
  - — одинаковые 44, 59, 71
  - — ожидаемое число 230, 244
  - — пуассоновское распределение для 112, 161, 176
- Доминантный ген 122
- Домино 68
- Дополнительные события 25
- Достоверные рекуррентные события 307
- Зависимость, см. Независимость
- Задача Банаха о спичечном коробке 173, 231
  - — — вариант 177
  - о баллотировке 81, 85
  - — ключах 60, 68, 147, 244
  - — конкуренции 191
  - — лифте 21, 44, 71
  - — обуви 69, 117
  - — размещении 20, 49
  - — — времена ожидания 59, 69, 70, 229, 288
  - — — отрицательное биномиальное распределение как предельная форма распределения в 74
- Задача о размещении» применение марковских цепей 371, 417
  - — — пуассоновское распределение как предел 58, 110
  - — — пустые ящики 73, 119, 246,
  - — — элементарные задачи 39, 61, 117, 219, 245
  - — — эмпирическая интерпретация 20
  - — — ящики, зайяты несколькими шарами 43, 47, 72
- — — разорении 360, см Вероятности поглощения
- — сенаторах 46, 56
- — снабжении электроэнергией 155
- — телефонных линиях 194, 144, 468, см Телефон
- — уличном движении 176, 400
- Закон арксинуса 92, 95, 101
- больших чисел
  - — — для зависимых случайных величин 268
  - — — — испытаний Бернулли 158, 199
  - — — — марковских цепей 403
  - — — — подстановок 262
  - — — — рекуррентных событий 321
  - — — обобщенная формулировка (для случая бесконечных моментов) 256
  - — — усиленный 264, 269
  - — — — для испытаний Бернулли 208, 215
  - — — — цепей Маркова 403
- повторного логарифма 209, 215
- — — для марковских цепей 404
- — — обобщенный 216
- следования Лапласа 130
- Замена, см Восстановление, Выбор, Замкнутые множества, Замыкание 377
- Изюминок распределение 163, 166, 176

- Инверсии 262
- Инерции момент 234
- Инициалы 67
- Испытания Бернулли, см Закон арксинуса, Пари, Биллиард, Время первого достижения. Случайные блуждания, Серии в испытаниях Бернулли
  - бесконечная последовательность 202
  - интерпретация на языке теории чисел 214
  - определение 135
  - сложные 175, 177, 242
  - с различными вероятностями, дисперсия 236
  - — — — — определение 224
  - — — — — пуассоновское приближение 286
  - повторные 134
  - представление через случайные величины 223
- Канонический вид матриц 410
- Карты, см Бридж, Выбор карт, Покер, Тасование
- Классификация сложная 39
- Ковариация 235, 242
- Коллекция кунонов 21, 60, 117
  - моменты 230, 245, 288
- Колмогорова дифференциальные уравнения 455
  - критерий 265 (обращение 269)
  - неравенство 240
- Колмогорова — Чепмэна уравнение для случайных процессов 455, 468
  - — — — — цепей Маркова 399, 402
- Комбинаторные задачи
  - использующие центральную предельную теорему 197, 262
  - связанные со случайным выбором 300
- Композиция (свертка) 272
- Контроль за качеством 54, см Выборочным контроль
- Координатное пространство 136
- Космические лучи 21, 435
- Кости
  - данные Уэлдона 155
  - и задача о размещении 21
  - производящие функции 287
  - равновесие единиц, двоек 304, 314
  - распределение суммы 220, 233, 249
  - серии единиц 200, 215, 325
  - элементарные задачи 49, 60, 69, 117, 146, 175, 176, 196, 243 406
- Коэффициент корреляции 241
  - обслуживания 448
- Коэффициент простоя 450
- Крайние распределения 219
- Критерии статистические
  - группировки 54
  - однородности 53, 197
  - порядковые 84, 156
  - следования 177
  - случайности 53, 68, 69, 73, 84, 114
- Кровяные тельца 170
  - проверка крови 245
- Лидерства распределение 82, 87, 92, 159
  - опытные данные 100
- Логарифмы, неравенства и степенные ряды 62
- Ложное заражение 127
- Макроскопическое равновесие 384
- Максвелла — Больцмана статистика 16, 32, 52, 72, 119
  - как предельная форма статистики Ферми — Дпрака 70
- Максимального правдоподобия оценка 57

- Максимумы при случайном блуждании (см. Наибольшее наблюдение)
  - — — — положение 101
  - — — — распределение 361
- Марковские процессы 397, 409
  - с непрерывным временем 427, 455
- Марковские цепи
  - высоких порядков 405
  - определение 367
  - связанные со случайными процессами 395, 407, 440, 459
  - смесь 409
  - суперпозиция 401
- Марковское свойство 331, 398
- Математическое ожидание 225
  - отношения 244, 247
  - произведения 227, 235, 241
  - суммы 227
  - условное 228
- Матрицы
  - каноническое представление 410
  - нестохастические 404, 422
  - обозначения 151, 367, 375, 414
  - общего вида 378, 383, 422
  - стохастические 367
  - — дважды 387
- Метод случайного выбора 221, 300
  - усечения 2.52, 258, 260, 266, 269
- Многомерное распределение Нуассона 179
- Многоярусные лампы 39
- Множества
  - замкнутые (в марковских цепях) 377
  - цилиндрические 137, см. События
- Молекул длинные цепи 21, 246
- Момент инерции 234
- Моменты 233
  - бесконечные 271
- Морзе азбука 68
- Мутации 297, 434
- Н—обозначения неудачи 152
- Наибольшее наблюдение, оценка по 231, 343
- Наследственность 138, 261
- Невозвратные состояния 380, 390
- Недостовверные рекуррентные события 307
- Независимость 131, 222, 247
- Немарковские процессы 399, 409
- Непересекающиеся события 26
- Неправильно набранные телефонные номера 169
- Непрерывности теорема 284
- Неприводимые цепи 377
- Неразличимость 22, 31, 52
  - два типа элементов 47
- Несмещенная оценка 247
- Несущественные состояния 381
- Ничьи
  - в миллиарде 288
  - модели случайного блуждания 83
  - при бросании нескольких монет 313, 333
  - — игре в кости 304, 314
- Нормальная плотность и распределение 181
  - — — — оценки 183, 196
- Нормальное приближение для биномиального распределения 185, 199
  - — — — большие отклонения 195
  - — — гипергеометрического распределения 197
  - — — комбинаторных серий 197
  - — — марковских цепей 403
  - — — перестановок 263, 264
- Нормальное приближение для пуассоновского распределения 193, 197, 250

- — — случайных блужданий 351
- Нулевое поколение 295 (п), 40
- Область изменения 218
- Облучения эффекты 21, 68, 118, 168, 177, 292
- Обобщенные случайные величины 306
- Обращенные вероятности в марковских цепях 402
- Обслуживание машин 447
  - — задачи об обслуживании 444
  - — (снабжение электроэнергией 155)
- Обслуживания коэффициент 448
  - формула Эрланга 449
- Объединение событий 26
- Объем рода, геометрическое распределение для 147, 296
- Однородные по времени процессы 455
- Опечатки 22
  - пуассоновское распределение для 162, 176
  - Ферми—Дирака распределение для 53, 70
- Определители, число членов, содержащих диагональные элементы 117
- Оптимальная остановка 190, 246, 254
- Осуществление событий одновременное 26, 104, 112, 115, 148
- Отлов животных 177, 244, 292, 300
- Отражающие экраны 337, 361, 369, 406
  - — в илоскости 407
  - — точное решение 418
- Отражения принцип 84, 361
- Отрицание 25
- Оценка несмещенная 247
  - 177
  - — — повторной выборке 57
  - — — простой выборке 193, 230, 244
- Очереди
  - ветвящиеся процессы для 297
  - в случае нескольких каналов 446, 450, 468
  - — — одного канала 442, 448
  - марковские цепи для 407
- Очереди, пришедший последним обслуживается первым 467
- Очередность
  - в билиярде 288
  - три игрока, играющие по очереди 28, 35, 124, 148, 406
- Нарадокс возвращения 323
- Нары 38
- Наскала распределение 173
- Нервое достижение, см. Время первого достижения
  - осуществление, см. Время ожидания
- Неременная сила при диффузии 371
- Нересечение событий 26
- Нерестановки 41, 137, 262, 395
- Нереход через улипу, пешеходы 176
- Нерехода вероятности
  - — в марковских цепях 367, 374, 397
  - — — стохастических процессах 453
- Нереходы
  - как немарковский процесс 400
  - элементарная задача 176
- Нериодические рекуррентные события 307
  - состояния 381, 387
- Нетербургская игра 256
- Нетри чашка 170

- Плотность распределения 184
- Повторное осреднение 317, 333, 407
- Повторные испытания 134
- — случайные величины, представляющие 223
- Поглощающие границы в стохастических процессах 465
- состояния 377, 391
- экраны 336, 355, 368
- Подсчет числа бактерий 170
- Пожары, см. Происшествия
- Показательное время обслуживания 329, 442
- распределение 429, 442, 461
- — функциональное уравнение для 444
- Покер 18, 46, 71, 118, 175
- Полиномиальное распределение 174
- 220, 221, 244
- — максимальный член 178, 197
- — производящая функция 284
- Полиномиальные коэффициенты 48
- Полимеры 21, 246
- Положительные состояния 381
- Популяции животных
- — отлов 177, 244, 292, 300
- оценка объема по выборке 43
- Порядковый критерий 84
- Последействия эффект для времени ожидания 330, 442
- Последовательный анализ 356, 360, 373
- Потомки
- в ветвящихся процессах 295, 300
- — популяциях и теории восстановления 320, 334
- — процессах гибели и размножения 434, 440
- генетические модели 138, 261, 374
- скрещивание 149, 374, 406, 424
- степень родства 150
- Правило Байеса 130
- Предельная теорема Муавра — Лапласа 188, 199
- Приведенное число успехов 189
- Признаки, сцепленные с полом 142
- Проверка вакцин 156
- крови 245
- Продолжительность игры, см. Вырождение, Время первого достижения, Время ожидания
- — в задаче о разорении 341, 360
- — — марковских цепях 408
- — — последовательном анализе 356, 360
- Произведение мер и пространства 136
- прямое 136
- Производные; число частных производных 50
- Производящие функции 270
- — двойные 283, 300, 335
- — для дифференциальных уравнений стохастических процессов 468
- — — марковских цепей и матриц 410
- — использование для решения разностных уравнений 344
- — моментов 290, 300
- Происшествия
- модели размещения 20
- — связанные с испытаниями Бернулли с различными вероятностями 236
- пуассоновское распределение 164
- распределение убытков 293, 428
- статистика разрывов самолетов-снарядов 167
- урновые модели 125, 127
- Пространство элементарных событий 17, 24
- — — в терминах случайных величин 223

- дискретное 28
- для повторных испытаний и экспериментов 134
- Простые дроби 280, 290
- для марковских цепей 380
- — серий 324
- случайных блужданий 346, 359, 362, 419
- численные примеры 283, 320, 326
- Процессы гибели 466
- размножения 432, 453, 466
- расходящиеся 435, 460
- Пуассоновский поток 443
- процесс 428, 430, 454, 459
- Пуассоновское приближение или предельная форма для биномиального распределения 159, 178, 193
- гипергеометрического распределения 178
- задачи обслуживания 444, 468
- испытаний Бернулли с переменными вероятностями 286
- нормального распределения 193, 250
- отрицательного биномиального распределения 179, 296
- рандомизированный выбор 221, 300
- серии 335
- случайного выбора 117
- числовые примеры 114
- распределение 163
- в комбинации с биномиальным распределением 177, 243, 292, 300
- интегральное представление 180
- кратное 294
- многомерное 179
- моменты 229, 233
- нормальное приближение для 193, 197, 250
- — примеры схем, приводящих к 166
- производящая функция 274
- пространственное 166
- свертки 179, 274
- сложное 293, 428. 459
- Пути при случайном блуждании 82
- Равновесие макроскопическое или статистическое 384, 440
- Равномерное распределение 243, 289
- Радиоактивное излучение 166, 330, 433
- Различимость 22, 31, 52
- два типа элементов 47
- Размножение 149, 374, 406, 424
- Разностные уравнения 339
- в многомерном случае 355, 363
- для распределения Пойа 148
- задачи о размещении 73, 288
- метод отражения 361
- — частных решений 339, 345, 358, 361
- модели Эрэнфестов 336
- отражающие экраны 406, 418
- поглощающие экраны 393
- предельный переход 348, 362, 467
- уравнение восстановления 314
- флуктуации плотности 407
- Разность событий 27
- Расположения, см. Задача о баллотировке
- Задача о размещении, Упорядочение
- в задаче о размещении 50, 70
- Распределение
- возрастов 319, 334
- — пример, касающийся возрастов супругов 23, 27
- детей по признаку пола 123, 124, 132, 147, 175

- крайнее 219
- нормальное 181
- совместное 219
- условное 222, 243
- Распределения функция 184, 218
- шаров по ящикам, см. Задача о размещении
- Распространение слухов 69
- Рекорды 303, 333
- Рекуррентные события 301, 305
  - — рассмотрение с точки зрения марковских цепей 372, 387
  - — с запаздыванием 317
- Рентгеновские лучи, действие на клетки 21, 68, 118, 168, 177, 292
- Рецессивные гены 139
- Самовосстанавливающиеся совокупности 308, 319, 334
- Свертки 273
- Селекция генетическая 145, 149, 297
- Семена
- Семена, выживание 297
  - распределение Пуассона для числа 166
- Семьи
  - задача о мытье посуды 69
  - — — распределении по признаку пола 123, 124, 132, 147, 175, 292
- Серии в бильярде 288
  - — задаче об уличном движении 176
  - — — испытаниях Бернулли
  - — — — определение 302
  - — — — пуассоновское распределение для длинных 335
  - — — — рассмотрение с точки зрения цепей Маркова 371, 376
  - — — — теория 324, 335
  - — — — успехов до неудач 200, 215, 328
  - — — комбинаторных задачах 53, 74
  - — — — моменты 245
- — — — нормальное распределение для 197
- Системы игры 203, 340
- Скользящие средние 400, 408
- Скрещивание прямых потомков 149, 374, 406, 424
- Следования закон 130
- Сложная классификация 39
- Сложное распределение Пуассона и соответствующие процессы 293, 428, 459
  - отрицательное биномиальное распределение как сложное распределение Пуассона 293
- Служба безопасности 127
- Случайное блуждание, см.
  - Поглощающие экраны.
  - Отражающие экраны, Упругие экраны, Время первого достижения, Максимумы, Возвращение в начало, Диффузия
  - — метод марковских цепей 368
  - — — теории восстановления 362
  - — — многомерное 352
  - — — обобщенное 356, 360, 373
  - — — одномерное 88, 336
  - — — с переменными вероятностями 395
  - — — циклическое 269, 417
- Случайность последовательности 209
  - — критерии 53, 73, 84, 115
- Смесь
  - марковских цепей 409
  - распределение 300
  - совокупностей 127
- Снос 325, 336
- Собственные значения и векторы 414
- События 18, 24
  - в прямом произведении вероятностных пространств 134
  - комбинации 104