

Уманский А.А

**Кручение и изгиб тонкостенных
авиаконструкций**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 656
ББК 39.1
У52

У52 **Уманский А.А.**
Кручение и изгиб тонкостенных авиаконструкций / Уманский А.А – М.: Книга по Требованию, 2013. – 112 с.

ISBN 978-5-458-38556-5

ISBN 978-5-458-38556-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА I

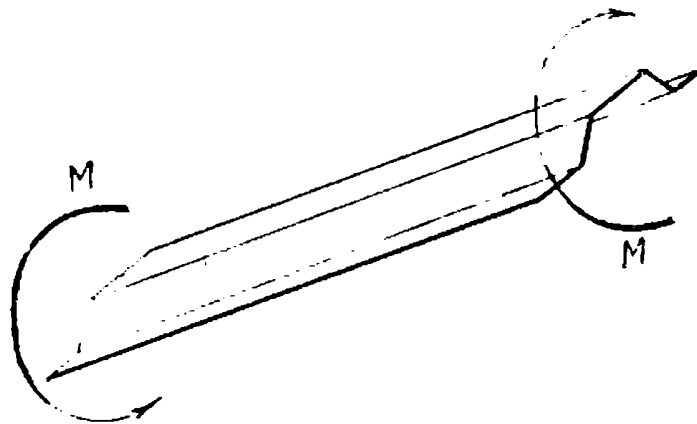
ЧИСТОЕ КРУЧЕНИЕ ОТКРЫТЫХ ПРОФИЛЕЙ

Чистым, или сен-венановым, кручением бруса или профиля (фиг. 1) принято называть тот случай закручивания концевыми парами, когда:

1) все поперечные сечения свободны от нормальных напряжений,

2) распределение касательных напряжений по всем сечениям одинаково.

Второе условие требует, чтобы и внешние пары, закручивающие брус, были реализованы в виде касательных напряжений, распределенных по торцам бруса по тому же закону, как касательные напряжения в сечениях. Однако способ приложения внешней нагрузки, согласно известному принципу Сен-Венана, сказывается лишь на небольшом протяжении вблизи торцов¹. Что каса-



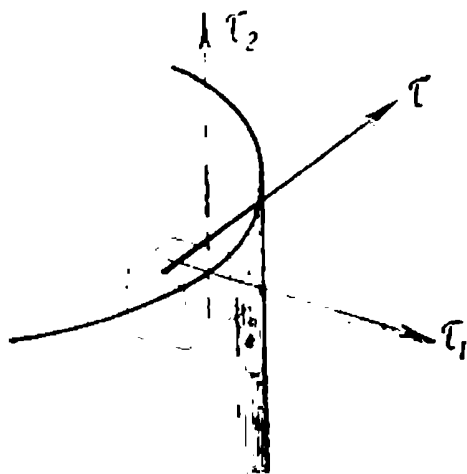
Фиг. 1.

ется первого условия, то оно осуществляется легко только в случае бруса в виде кругового (сплошного или полого) цилиндра, поперечные сечения которого остаются при закручивании плоскими. Мы можем производить закручивание, присоединив к концам бруса два твердых тела, или заделав один из концов бруса и приложив пару к другому. Иначе обстоит дело в случае некруглого сечения бруса: как известно, поперечные сечения такого бруса при закручивании перестают быть плоскими, или, как говорят, происходит искажение поперечных сечений. Чистое кручение некруглого профиля возможно только при отсутствии препятствий к искажению поперечных сечений; тогда продольные волокна будут при круче-

¹ Приложимость принципа Сен-Венана к тонкостенным конструкциям нуждается в каждом отдельном случае в специальном обосновании. При кручении тонкостенных профилей с неизменяемым в своей плоскости поперечным сечением принцип Сен-Венана полностью приложим.

нии сохранять свою длину, и нормальные напряжения не возникнут. Практически чистое кручение некруглого профиля никогда не осуществляется вследствие того, что передача внешних пар (например при помощи дисков) всегда связана с препятствием к искажению поперечных сечений. Однако изучение теоретической схемы этого явления очень важно, так как оно входит в качестве составляющего элемента в общий случай так называемого стесненного кручения. В дальнейшем нам придется воспользоваться некоторыми результатами теории упругости, относящимися к кручению бруса с сечением в виде узкого прямоугольника и часто приводимыми в курсах сопротивления материалов¹. Такой брус мы будем называть полоской.

Как известно, вектор касательного напряжения τ в точках, близких к наружной поверхности, направлен по прямой, парал-



Фиг. 2.

лельной касательной к контуру поперечного сечения. Это вытекает из того условия, что компонент τ_1 касательного напряжения, нормальный к контуру, должен обратиться в нуль, так как в противном случае, в силу закона парности касательных напряжений, должен был бы иметься такой же компонент τ_2 , действующий вдоль наружной поверхности (фиг. 2). Наружная же поверхность бруса предполагается свободной от напряжений, т. е.

$$\tau_2 = \tau_1 = 0.$$

Траектории и эпюры касательных напряжений в сечении скручиваемой полоски показаны на фиг. 3.

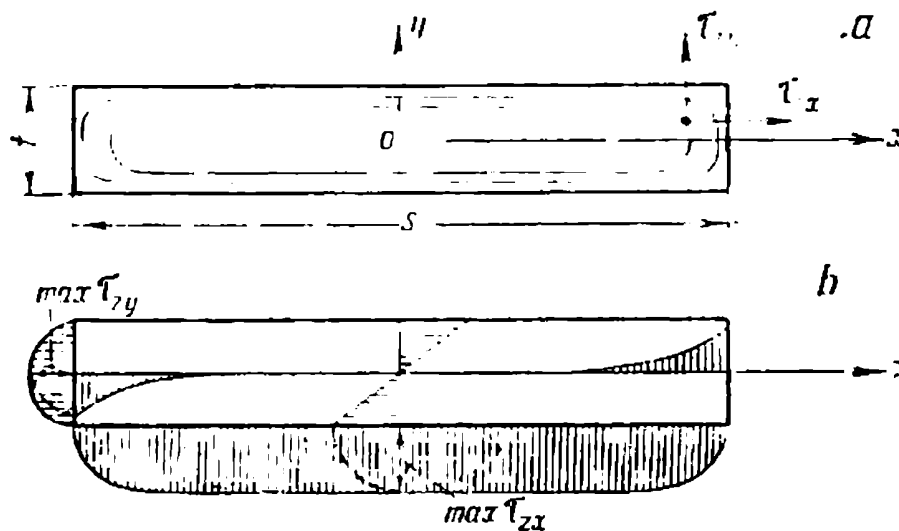
Касательное напряжение τ_{zx} , параллельное длинной стороне, распределяется вдоль оси y по линейному закону (см. двойную треугольную эпюру на фиг. 3, *b*). При этом на значительном протяжении сечения его величина почти не зависит от x . Напряжения τ_{zy} имеют заметную величину² лишь вблизи коротких сторон сечения, однако в восприятии крутящего момента они играют такую же роль, как напряжения τ_{zx} вследствие того, что плечо образуемой ими пары близко к s и, следовательно, велико по сравнению с плечом пары, создаваемой τ_{zx} , равным $\frac{2}{3}t$. Максима-

¹ В настоящее время элементы теории упругости и вопросы кручения введены в программы по сопротивлению материалов некоторых авиационных вузов.

² При $\frac{s}{t} = 10$ имеем: $\max \tau_{zy} = 0,25 \tau_{zx}$. См. С. П. Тимошенко, Курс сопротивления материалов, гл. VI, где приведена таблица Сен-Венана.

льное по абсолютной величине касательное напряжение будет посредине длинных сторон наружного контура полоски.

Приближенные формулы для основных расчетных величин, получаемые из точного решения Сен-Венана для прямоугольника, если учесть, что $\frac{s}{t}$ есть величина большая (например, $\frac{s}{t} > 8 \div 10$), удобно записывать в следующем виде:



Фиг. 3

погонный угол закручивания

$$\vartheta = \frac{M}{GI_T}, \quad (1)$$

здесь M — крутящий момент, G — модуль сдвига;

$$I_T = \frac{st^3}{3}; \quad (2)$$

максимальное касательное напряжение

$$\max \tau_{zx} = \vartheta Gt = \frac{M}{I_T} t. \quad (3)$$

Эти же формулы очень легко выводятся при помощи аналогии Прандтля¹.

Следует отметить, что при очень малой толщине ($\frac{s}{t} > 40$) явление еще до перехода предела упругости сопровождается такими деформациями, которые уже нельзя считать величинами малыми по сравнению с геометрическими элементами полоски, в связи с чем точность формул (1)–(3) снижается. Кроме того, появляются нормальные напряжения, нарушающие характер чистого закручивания². Мы во всех случаях будем рассматривать вопрос лишь в предположении малых деформаций, тем более,

¹ См. С. П. Тимошенко, Теория упругости, § 77, 1934.

² С. Weber, Die Lehre von der Drehungsfestigkeit, Forschungsheft VDI, № 249, 1921.

что проблема больших деформаций в настоящее время еще не достаточно разработана.

Результаты произведенных в последнее время исследований показали, что формулы (1) — (3) остаются приближенно верными и для других тонкостенных односвязных (открытых) профилей (тип уголка, швеллера, разрезанного кольца и т. п.), нужно



Фиг. 4.

только под s подразумевать длину направляющей контура (периметр, измеренный по средней линии). Для профилей, состоящих из нескольких полосок, например, двутавра, можно пользоваться теми же формулами, причем в качестве I_T берется суммарная величина

$$I_T = \frac{1}{3} \sum st^3, \quad (2')$$

где s и t — длина и толщина каждой полоски.

Таким образом при чистом кручении отдельные полоски профиля работают как бы независимо одна от другой, воспринимая часть момента, пропорциональную своему I_T . Некоторой иллюстрацией этого служат траектории касательных напряжений в цельном и разрезанном профиле (фиг. 4). За исключением небольших областей в месте перехода стенки в полку распределение касательных напряжений в обоих случаях тождественно. Наибольшее касательное напряжение получается посредине наружного края наиболее толстой полоски:

$$\tau_{\max} = \frac{Mt_{\max}}{I_T}. \quad (3')$$

Экспериментальные проверки, предпринятые Фепплем¹ и Энгельманом² для прокатных строительных профилей, показали, что при вычислении погонного угла закручивания I_T целесообразно увеличить на 12% в случае швеллерного сечения и на 29% в случае двутавра. Для вычисления же касательных напряжений I_T вводится в формулу (3') без поправок. Для учета ослабления заклепочными отверстиями Блейх³ рекомендует уменьшать величину I_T на 10%. Обширный материал по кручению авиапрофилей имеется в работах Hertel⁴ и Trayer and March⁵.

¹ A. Föppel, Sitz. der Bayer. Ac. d. W, S. 295, 1921;

² H. Engelmann, Z. a. M. M., S. 386, 1928.

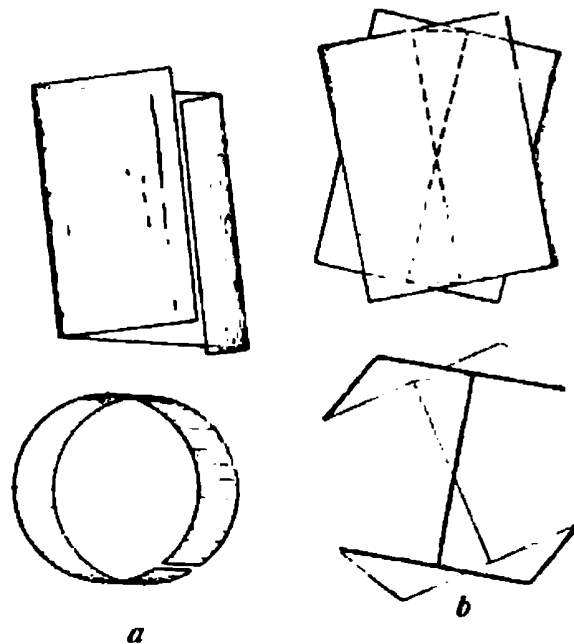
³ F. Bleich, Stahlhochbauten, 1932, Bd. I, S. 105.

⁴ Hertel, Verdrehungsfestigkeit u. Verdrehungssteifigkeit, Luftfahrtforschung, №1, 1931.

⁵ Trayer and March, NACA, Rep. № 334, 1930.

Рассмотрим теперь вопрос об искажении поперечных сечений при чистом закручивании тонкостенного профиля. Условие тонкостенности состоит в том, что толщины полосок, составляющих профиль, можно считать величинами малыми по сравнению с размерами поперечного сечения. Тогда искажения профиля будут характеризоваться продольными перемещениями точек, принадлежащих срединной поверхности полосок; перемещения точек на наружной поверхности полосок будут отличаться от указанных на весьма малую величину. Введем с самого начала одно существенное ограничение во все дальнейшие выводы. Мы будем считать, что *контур поперечного сечения не искривляется* при закручивании, другими словами, поперечные сечения поворачиваются одно

относительно другого как диски, не меняющие своей формы. Собственно говоря, можно было бы ввести и менее сильное ограничение, например, считать приращения кривизны контура величинами малыми по сравнению с погонным углом закручивания ϑ , но принятая формулировка упрощает все изложение. Конструктивное требование, соответствующее указанному допущению, состоит в том, что профиль должен быть снабжен достаточно часто расположенными жесткими в своей плоскости диафрагмами, препятствующими искривлению поперечных сечений.



Фиг. 5.

Выше мы видели, что касательные напряжения в срединной поверхности профиля равны нулю (фиг. 3, *b* и 4). Так как касательные напряжения связаны с относительным сдвигом соотношением:

$$\gamma = \frac{\tau}{G}, \quad (4)$$

то отсюда следует, что в срединной поверхности

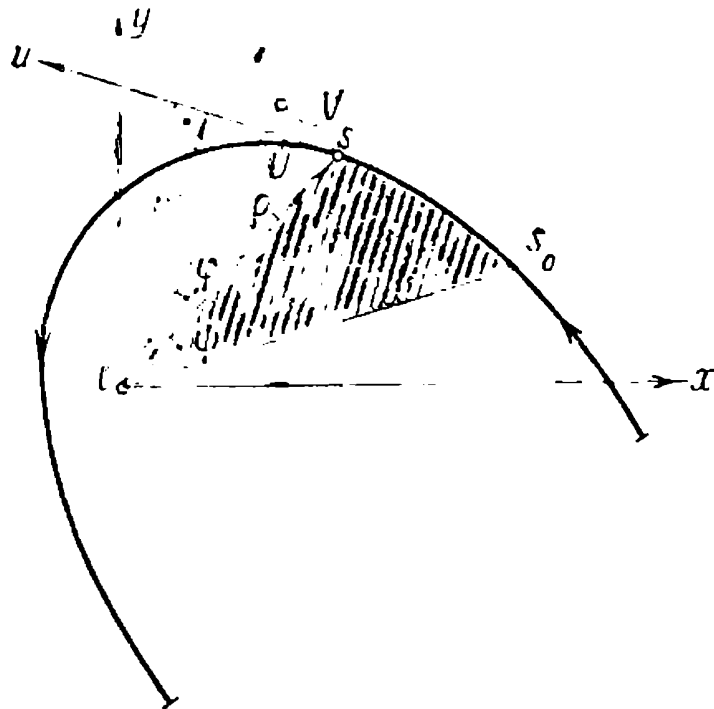
$$\gamma = 0, \quad (5)$$

а следовательно, если нанести на этой поверхности до закручивания прямоугольную сетку, то она останется прямоугольной и после деформации¹. Продольные волокна срединной поверхности остаются *прямолинейными и перпендикулярными к кон-*

¹ Сетка, нанесенная на наружной поверхности, наоборот, искривляется, причем элементарные прямоугольники переходят в параллелограммы.

турам поперечных сечений профиля. Плоские полоски, составляющие профиль, при закручивании приобретают поверхность косо́й плоскости.

На фиг. 5, *a* показана срединная поверхность открытого тонкостенного цилиндра при чистом кручении по часовой стрелке. Наглядную модель этой поверхности можно получить, сворачивая в трубку прямоугольный лист бумаги и смещая затем сдвинувшиеся относительно друг друга края. На фиг. 5, *b* пред-



Фиг. 6.

ставлена срединная поверхность тонкостенного двутаврового профиля. Соответствующую модель легко сделать из картона. Само собой разумеется, что все перемещения на фиг. 5 представлены преувеличенными и речь все время идет о перемещениях, весьма малых по сравнению с геометрическими элементами профиля. Заметим следующее правило, помогающее определить направление уклона искаженной поверхности сечения: если расположить волокна вертикально и обходить сечение по направлению скручи-

вания, то это всегда будет спуск вниз. Применяя это правило к двутавру (или вообще к разветвленному сечению), следует представить себе его как бы состоящим из двух швеллеров, сложенных стенками, и обходить каждый швеллер отдельно.

Перейдем теперь к выяснению зависимости между величиной искажения и другими элементами кручения профиля. Совершенно очевидно, что абсолютная величина искажения (продольного перемещения) зависит от положения оси кручения, а также от начала отсчета искажения. При чистом кручении все волокна срединной поверхности остаются прямолинейными и каждое может быть осью кручения. Для этого достаточно фиксировать положение волокна, например, парой подшипников.

На фиг. 6 показано сечение срединной поверхности профиля (средняя линия сечения). Эту кривую, или ломаную, линию мы будем называть в дальнейшем контуром профиля или просто контуром. Пересечение оси кручения с плоскостью контура будем называть центром кручения или полюсом. Положение полюса

считаем известным. Совместим с ним начало координат; ось z направим к наблюдателю. Кроме неподвижных осей x, y введем подвижную ось u , совпадающую с касательной к контуру. Координата $u = s$ представляет собой длину, отсчитываемую по периметру контура. Положительное направление s соответствует обходу контура против часовой стрелки. Введем следующие обозначения:

W — искажение, т. е. проекция полного перемещения точки контура на ось z ;

V — проекция полного перемещения на плоскость контура, иначе полное перемещение точки в плоскости контура;

U — проекция полного перемещения точки в плоскости контура на ось u ;

ρ — радиус-вектор точки контура;

r — перпендикуляр из полюса на подвижную ось u .

Предположим, что сечение повернулось на малый угол φ против часовой стрелки. Легко видеть, что $V = \varphi\rho$, а поэтому, учитывая соотношение:

$$U : V = r : \rho,$$

получим:

$$U = r\varphi. \quad (6)$$

Чтобы связать U и W , воспользуемся выражением для угла сдвига, совместив ось z с образующей профиля (фиг. 7, а):

$$\gamma = \frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z}.$$

Так как в данном случае:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = 0,$$

то

$$\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z} = 0. \quad (7)$$

Вид деформации элемента стенки в этом случае показан на фиг. 7, б. Дифференцируя (6) по z , находим:

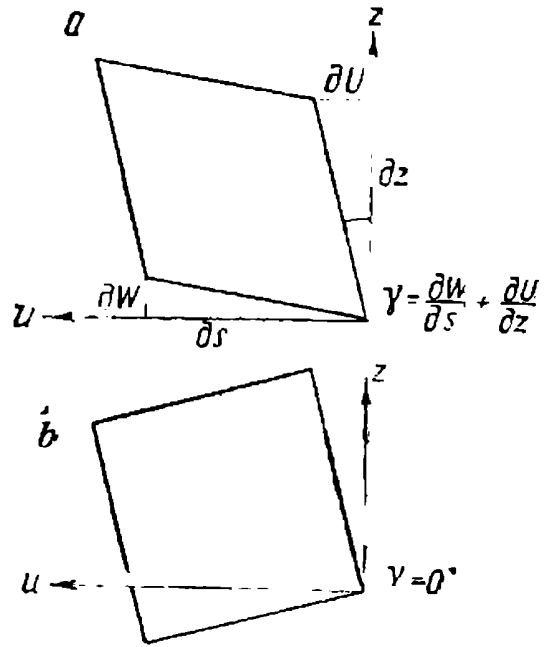
$$\frac{\partial U}{\partial z} = r \frac{d\varphi}{dz} = r\dot{\varphi}.$$

Поэтому из (7) получаем¹:

$$-\frac{dW}{ds} = r ds. \quad (8)$$

Введем обозначение

$$-\frac{W}{s} = w. \quad (9)$$



Фиг. 7.

¹ Мы будем писать вместо знака частного дифференцирования ∂ знак d там, где это не может вызвать недоразумений.

Величину w будем называть единичным искажением. Замечая, что при чистом кручении постоянным моментом $\vartheta = \text{const}$, из (8) получим:

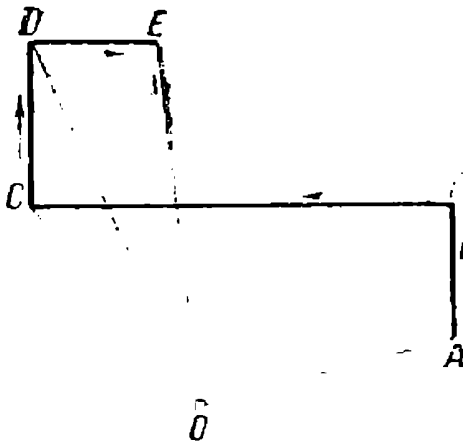
$$dw = r ds.$$

Проинтегрируем левую и правую части:

$$w = w_0 + \int_0^s r ds; \quad (10)$$

здесь w_0 — произвольная постоянная, зависящая от того, какой точке контура мы приписываем искажение равное нулю.

Формула (10) имеет интересный геометрический смысл: $r ds$ — это не что иное, как удвоенная площадь элементарного треугольника с вершиной в полюсе и с основанием ds ; $\int_0^s r ds$ пред-



Фиг. 8.

ставляет собой удвоенную секториальную площадь, описанную радиусом-вектором ρ , пробегающим контур между точками s_0 и s (эта площадь заштрихована на фиг. 6). В дальнейшем мы иногда будем обозначать удвоенную секториальную площадь через w , не связывая этого с единичным искажением открытого профиля¹.

При вычислении w может возникнуть вопрос о знаке. Следует заметить, что возрастание или убывание w определится знаком дифференциала

$$dw = r ds.$$

С другой стороны, удвоенная площадь элементарного треугольника может быть выражена так:

$$dw = \rho^2 d\psi,$$

где ψ — угол радиуса-вектора с осью x . Отсюда видно, что знак dw определяется исключительно знаком $d\psi$. Если при обходе контура против часовой стрелки ψ возрастает, то dw положительно. Так, на фиг. 8 w от точки A к точке C возрастает, а от C к E — убывает.

¹ Указанное свойство искажений закручиваемого открытого профиля с абсолютно неизменяемым сечением впервые отмечено Вагнером (H. Wagner). См. сборник „25 Jahre Technische Hochschule Danzig“, 1928, или Luftfahrtforschung, № 6, 1934. См. также В. Н. Беляев, Испытания и расчет крыльев с различной обшивкой, „Техника воздушного флота“, № 5, 1935. Этот результат получил также проф. В. З. Власов, см. „Проект и стандарт“, № 8—9 и 10, 1936.

Выясним, как изменяется w при переходе к новому полюсу. Изменение полюса можно представить, как параллельный перенос координатных осей. Предположим, что новое начало \bar{O} имеет относительно старого O координаты $x=a, y=b$ (фиг. 9). Из чертежа видно, что

$$\bar{r} = r - a \cos \alpha - b \sin \alpha, \quad (11)$$

где α — угол наклона подвижной оси u к оси y . Кроме того,

$$ds \cos \alpha = dy; \quad ds \sin \alpha = -dx. \quad (12)$$

Для нового полюса имеем:

$$\left. \begin{aligned} \bar{U} &= \bar{r} \varphi, \\ \bar{W} &= -\bar{w} \vartheta, \\ \bar{w} &= \bar{w}_0 + \int_0^s \bar{r} ds. \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

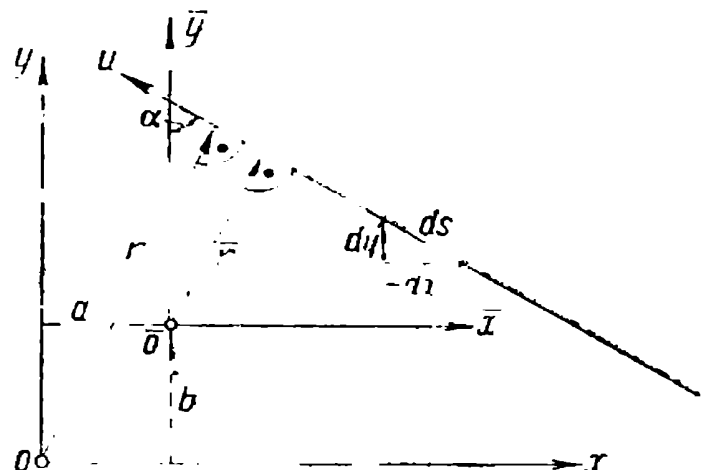
Подставим сюда значение \bar{r} из (11), приняв во внимание (12). Получим:

$$\begin{aligned} \bar{w} - \bar{w}_0 &= \int_0^s (r - a \cos \alpha - b \sin \alpha) ds = \\ &= \int_0^s r ds - a \int_{y_0}^y dy + b \int_{x_0}^x dx = w - w_0 - a(y - y_0) + b(x - x_0). \end{aligned}$$

Собирая все постоянные величины в один член K , найдем:

$$\bar{w} = w - ay + bx + K. \quad (14)$$

Таким образом при изменении полюса добавляется линейная функция координат точек контура. Геометрический смысл этого положения состоит в том, что изменение полюса эквивалентно изменению начальной плоскости, от которой отсчитываются

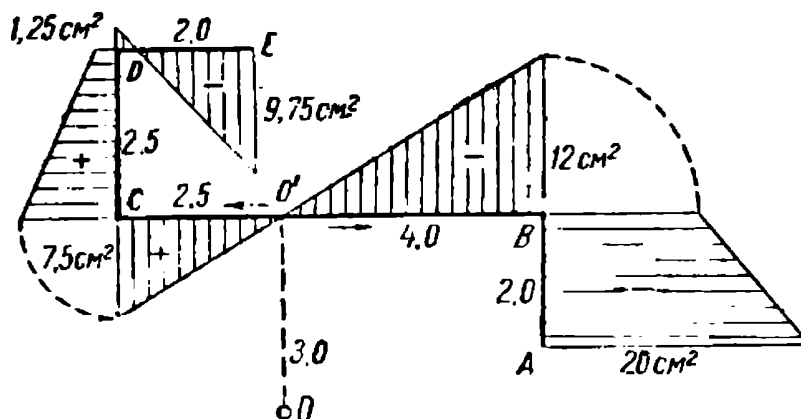


Фиг. 9.

искажения. Однозначное определение искажений требует задания каких-либо трех условий, например: положения полюса

две координаты) и искажения одной какой-либо точки; одной координаты полюса и двух искажений; наконец, искажений трех точек контура. Подставляя условия задания в уравнение (14), можно в общем случае, задавшись сначала произвольным полюсом, получить три уравнения, из которых определить a , b , K .

Задачи указанного типа при желании легко могут быть решены графически по правилам начертательной геометрии. Удобно пользоваться разверткой поверхности искажений на плоскость контура, или эпюрой единичных искажений ω , аналогичной эпюре изгибающих моментов плоской рамы. Ординаты ω



Фиг. 10.

откладываются нормально к осям полосок, положительные по одну сторону, отрицательные по другую сторону контура. На фиг. 10 показана эпюра, соответствующая случаю, изображенному на фиг. 8. За начальный радиус-вектор взят перпендикуляр из полюса на BC . При плоских полосках отдельные участки эпюры ω прямолинейны, т. е. имеют форму трапеций, причем уклон эпюры ω к оси полоски равен перпендикуляру из полюса на ось полоски:

$$\frac{d\omega}{ds} = r.$$

Чтобы найти полюс по эпюре, достаточно определить уклоны эпюры для двух полосок профиля; этим определятся расстояния полюса от этих полосок, а следовательно, и самый полюс. Пусть, например, требуется найти полюс по заданным искажениям трех точек. Прежде всего при произвольном полюсе строим эпюру ω . Затем проводим плоскость, пользуясь тремя ординатами—тремя заданными искажениями. Вычтя из ординат ω ординаты плоскости, получим окончательную эпюру ω . Затем указанным выше способом, по двум уклонам, находим полюс.