

Д.Д. Максудов

**Анаберрационные отражающие
поверхности и системы и новые способы их
испытания**

**Москва
«Книга по Требованию»**

Д11 **Д.Д. Максutow**
Анаберрационные отражающие поверхности и системы и новые способы их испытания / Д.Д. Максutow – М.: Книга по Требованию, 2023. – 120 с.

ISBN 978-5-458-28095-2

Введение. Анаберрационные и регулярные отражающие поверхности. Переменные величины отражающей поверхности. Уравнение анаберрационной поверхности. Частные случаи анаберрационных поверхностей. Сплюснутые сфериды. Закон регулярных поверхностей и их характеристики. Частные случаи характеристики регулярных поверхностей. Продольные aberrации регулярных поверхностей. Перечисление продольных aberrаций при переходе от одних к другим. Отклонение поверхности зеркала от заданной теоретической. Отклонение поверхности зеркала от ближайшей теоретической. Взаимные отклонения регулярных поверхностей. Примерный расчет испытания зеркала и понятие о наимыгоднейшей теоретической поверхности. Анаберрационные отражающие системы. Простые и сложные телескопы. Обозначение переменных величин анаберрационной системы. Приближенная теория анаберрационной системы. Классические системы Грегори и Кассегрена. Системы со сферическим большим зеркалом. Системы с эллиптическим большим зеркалом. Оценка трудностей фигурации малых зеркал. Системы со сферическим малым зеркалом. Компенсация малым зеркалом ошибок большого. Эквивалентные фокус и относительное отверстие сложных систем. Система с исправленным на кому полем. Исправление астигматизма и кривизны поля. Ошибки приближенной теории. Заключение. Обзор существующих и новые методы испытания зеркал. О методах испытания зеркал вообще. Теневой метод ножа и искусственной звезды. Теневой метод ножа и небесной звезды. Метод фокограмм. Метод теневого испытания по зонам. Метод окулярного испытания. Метод Гартмана. Методы Майкельсона, Коттона и Твеймана. Метод пробных стекол. Методы испытания плоских зеркал. Метод теневого испытания параболоида с конечного расстояния. Автоколлимационный метод (Ричи) Новые методы испытания. Метод ножа и щели. Теневое испытание по зонам. Первый метод щели и нити. Второй метод щели и нити. Новый компенсационный метод испытания в общем виде. Компенсационный метод испытания вогнутых зеркал с помощью вогнутого эллиптического зеркала. Компенсационный метод испытания малых выпуклых зеркал. Границы применения компенсационного метода для первоклассных зеркал. Точность установки компенсационного зеркала. Точность измерения радиуса кривизны. Заключение

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Анаберрационные и регулярные отражающие поверхности

§ 1. Переменные величины отражающей поверхности

Рассматриваемые нами поверхности прежде всего являются поверхностями вращения, отнесенными своими вершинами к началу координат; при этом ось X -ов является осью симметрии этих поверхностей.

На плоскости рисунка мы получаем кривые сечения поверхностей плоскостью, проходящей через ось симметрии, являющуюся главной оптической осью поверхности.

В силу этих условий и в силу того, что сопряженные точки мы будем брать только лишь на оптической оси, всякая точка поверхности может быть задана лишь двумя координатами: x и y .

На рис. 1 отражающая поверхность представлена в виде кривой ACE : C — вершина поверхности; точка $A(x, y)$ — точка падения луча для зоны $y = AB$; точки S_1 и S_{2y} — сопряженные точки; S_1A и AS_{2y} — лучи, падающий и отраженный; O_y — точка пересечения нормалей зоны y ; $AO_y = N_y$ — нормаль зоны y ; $S_1C = f_1$ и $CS_{2y} = f_{2y}$ — сопряженные расстояния. Так как S_1 есть светящаяся точка, а S_{2y} — ее изображение, то, очевидно,

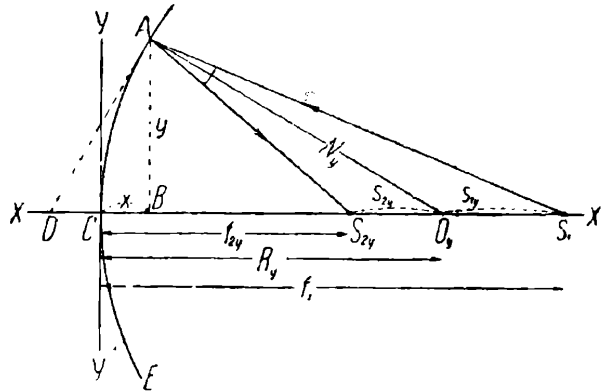


Рис. 1.

f_1 будет одинаково для всех зон, тогда как f_{2y} является функцией и от зоны. При неравенстве f_2 для различных зон мы имеем налицо явление „сферической“ аберрации. Так как мы будем изучать главным образом поверхности несферические, то более уместным является называть это явление просто аберрацией, опуская слово „сферическая“.

Особо важное значение имеет величина:

$$CO_y = R_y,$$

которая является абсциссой точки пересечения нормалей зоны y . Эта величина R_y вообще не равна ни радиусу кривизны, ни длине нормали зоны y , обращаясь в таковые лишь в случае сферы, а также и для центральной зоны ($x = y = 0$) прочих несферических поверхностей. Значение величины R_y определяем из рис. 1.

Так как $\angle ADC = \angle O_y AB$ и так как $\operatorname{tg} \angle ADC = \frac{dy}{dx}$, то

$$\frac{R_y - x}{y} = \frac{dy}{dx},$$

откуда:

$$R_y = y \frac{dy}{dx} + x. \quad (1)$$

Для центральной зоны ($x=y=0$) R_0 обращается в радиус кривизны в общепринятом смысле слова. Величины R_y и R_0 для любых поверхностей будем считать всегда величинами положительными, не разделяя таким образом поверхностей на выпуклые и вогнутые, тогда как для вещественных зеркал мы можем оставить это разделение по чисто внешним признакам, т. е. говорить о зеркалах выпуклых и вогнутых, считая все же радиус кривизны как тех, так и других величиной положительной. Точно так же величиной положительной будет и абсцисса поверхности x . Такое условие мы в праве ввести, так как во всех случаях изучаемых нами поверхностей не встречается такого, при котором R_0 и R_y могли бы иметь разные знаки. Ордината y положительна, когда она отсчитывается вверх от оптической оси.

Полное приращение величины R_y для зоны y назовем через ΔR_y :

$$\Delta R_y = R_y - R_0. \quad (2)$$

Аналогично мы можем ввести понятие о частном приращении той же величины для зон y_m и y_n .

Величины f_1 и f_2 условимся считать положительными в том случае, когда сопряженные точки S_1 и S_2 лежат по ту же сторону от вершины зеркала, что и центр кривизны O ; в противном случае будем считать эти величины отрицательными. На рис. 1, очевидно, и f_1 и f_2 имеют положительное значение.

Наконец, нас могут интересовать сопряженные расстояния:

$$s_{1y} = S_1 O_y \text{ и } s_{2y} = S_2 O_y,$$

величину которых определим из рис. 1.

Так как AO_y есть биссектриса угла $S_1 A S_2$, то:

$$\frac{s_{1y}}{s_{2y}} = \frac{AS_1}{AS_2} = \frac{\sqrt{y^2 + (R_y - x + s_{1y})^2}}{\sqrt{y^2 + (R_y - x - s_{2y})^2}},$$

что после соответствующих преобразований дает:

$$\frac{1}{s_{2y}} - \frac{1}{s_{1y}} = \frac{2(R_y - x)}{y^2 + (R_y - x)^2}. \quad (3)$$

Для отыскания главного фокусного расстояния зоны y : (F_y) придется положить в выражение (3):

$$\begin{aligned} s_{1y} &= \infty \\ \text{и} \quad s_{2y} &= R_y - F_y, \end{aligned}$$

после чего получаем выражение для главного фокусного расстояния зоны y следующую величину:

$$F_y = \frac{R_y^2 - y^2 - x^2}{2(R_y - x)} \quad (4)$$

Так как главное фокусное расстояние центральной зоны равно:

$$F_0 = \frac{R_0}{2}, \quad (5)$$

то величину главной продольной аберрации зоны y определим как разность двух предыдущих выражений и назовем ее через ΔF_y :

$$\Delta F_y = F_y - F_0. \quad (6)$$

На основании выражений (4) и (5) получаем функциональные зависимости между величинами ΔR_y и ΔF_y в следующем виде:

$$\Delta F_y = \frac{R_y \Delta R_y + R_0 x - y^2 - x^2}{2(R_y - x)}, \quad (7)$$

$$\Delta R_y = \frac{2\Delta F_y (R_y - x) - R_0 x + y^2 + x^2}{R_y}. \quad (8)$$

Приведенные формулы справедливы для поверхностей вращения независимо от уравнения их кривой.

§ 2. Уравнение анаберрационной поверхности

Условимся называть анаберрационной такую поверхность, которая для некоторого сопряженного расстояния f_1 и точки S_1 , лежащей на оси, обладает вторым сопряженным расстоянием f_2 и сопряженной точкой S_2 , общими для любых зон поверхности.

Для вывода уравнения такой поверхности обратимся к рис. 2. Пусть из точки S_1 упал луч $S_1 A$ на зону y поверхности ACE . В этот момент волновая сферическая поверхность расположится по сфере I , не доходя на величину ρ до вершины зеркала; в последующий момент, когда волна достигнет вершины зеркала, она успеет отразиться в точке A , и колебания распространятся на величину $AM = \rho$; отраженная волна займет положение поверхности II .

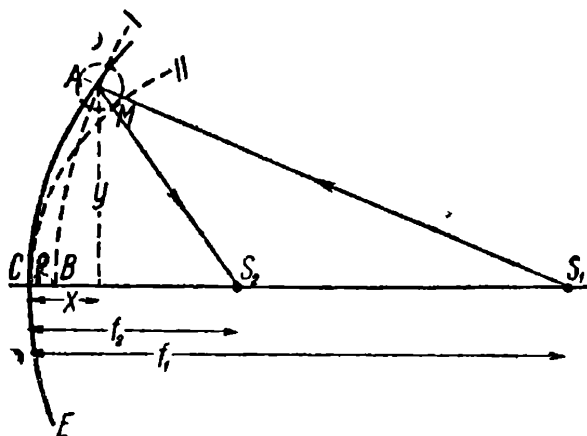


Рис. 2.

В случае анаберрационной поверхности отраженная волновая поверхность должна быть сферой с центром кривизны в некоторой точке S_2 ; иными словами, в случае анаберрационной поверхности гомоцентрический расходящийся пучок должен после отражения превратиться в гомоцентрический же сходящийся пучок.

Рис. 2 дает нам следующие равенства:

$$AM + MS_2 = \sqrt{y^2 + (f_2 - x)^2} = \rho + f_2,$$

$$AS_1 = \sqrt{y^2 + (f_1 - x)^2} = f_1 - \rho.$$

Складывая эти два равенства и освобождаясь от корней, получаем уравнение анаберрационной поверхности в общем виде:

$$y^2 = \frac{4f_1 f_2 x (f_1 + f_2 - x)}{(f_1 + f_2)^2}, \quad (9)$$

где f_1 и f_2 — сопряженные анаберрационные расстояния.

Решая это уравнение относительно x и отбрасывая перед корнем знак (+), как не соответствующий случаю астрономических зеркал, мы получаем уравнение анаберрационной поверхности в новом виде:

$$x = \frac{f_1 + f_2}{2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{f_1 f_2}} \right) \quad (10)$$

Раз поверхность анаберрационная, то для тех же сопряженных расстояний f_1 и f_2 справедлива формула центральных лучей:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} &= \frac{2}{R_0} \\ f_1 + f_2 &= \frac{2f_1 f_2}{R_0} \\ f_1 f_2 &= \frac{R_0(f_1 + f_2)}{2} \\ R_0 &= \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

откуда:

Воспользовавшись выражением (11), мы можем представить уравнения анаберрационных поверхностей (9) и (10) в новом виде:

$$y^2 = 2R_0 x \left(1 - \frac{x}{f_1 + f_2}\right) = 2R_0 x \left(1 - \frac{x}{2a}\right), \quad (12)$$

$$x = \frac{f_1 + f_2}{2} \left[1 - \sqrt{1 - \frac{2y^2}{R_0(f_1 + f_2)}}\right] = a \left(1 - \sqrt{1 - \frac{y^2}{R_0 a}}\right), \quad (13)$$

где R_0 — радиус кривизны центральной зоны и где a — большая полуось конического сечения.¹

Пренебрегая второй степенью сравнительно весьма малой величины — x , получаем приближенное уравнение анаберрационных поверхностей:

$$\left. \begin{aligned} y^2 &\approx 2R_0 x \\ x &\approx \frac{y^2}{2R_0} \end{aligned} \right\}. \quad (14)$$

§ 3. Частные случаи анаберрационных поверхностей

А) Сфера. Положив в выражение (12):

$$f_1 = f_2 = R,$$

получаем:

$$y^2 = x(2R - x), \quad (15)$$

т. е. уравнение окружности, касающейся оси Y -ов и имеющей центр на оси X -ов. Таким образом единственной поверхностью, отражающей без aberrаций лучи в ту же точку, из которой они вышли, является сферическая поверхность; ее центр совпадает со светящейся точкой и ее изображением (действительными или мнимыми).

В) Эллипсоид. Положив $f_1 \neq f_2$ при положительном их значении, получаем из выражения (12) для величины y вещественные корни лишь в том случае, когда

$$x \leq f_1 + f_2. \quad (16)$$

Отсюда делаем заключение, что данная поверхность является замкнутой; величину $(f_1 + f_2) = 2a$ называем большой осью. Аналитически наша поверхность является эллипсоидом вращения вокруг большой оси; светящаяся точка и ее изображение совпадают с фокусами эллипсоида; в случае действительной точки изображение ее тоже действительное — и наоборот; эллипсоид отнесен одной из своих вершин к началу координат.

¹ Как выясняется ниже, анаберрационные поверхности являются поверхностями вращения конических сечений.

С) Параболоид. Положив $f_1 = \infty$ и $f_2 = F$, получаем из выражения (9) и (12):

$$\left. \begin{aligned} y^2 &= 4Fx \\ y^2 &= 2R_0x \\ F &= \frac{R_0}{2} \end{aligned} \right\}, \quad (17)$$

откуда:

уравнение параболоида, отнесенного вершиной к началу координат.

Параболоид отражает без aberrаций параллельные оси лучи в главный фокус—и наоборот. Главное фокусное расстояние параболоида равно половине радиуса кривизны центральной зоны. Приближенная формула (14) для анаберрационных поверхностей становится точной для случая параболоида.

Д) Гиперболоид. Положив в выражение (9) $f_1 f_2 < 0$ и $f_1 \neq -f_2$, т. е. взяв сопряженные расстояния, различные и по знаку и по абсолютной величине, получаем вещественные корни для u лишь в том случае, когда:

$$f_1 + f_2 < x, \quad (18)$$

а так как наименьшее значение x равно нулю, то сумма сопряженных расстояний есть величина отрицательная, что возможно лишь в том случае, когда более близкая к вершине сопряженная точка лежит по одну сторону с центром кривизны, а более удаленная—по другую сторону, считая от вершины. Аналитически наша поверхность является поверхностью вращения одной из ветвей гиперболы, отнесенной вершиной к началу координат; большая ось гиперболоида совпадает с осью X -ов. Светящаяся точка и ее изображение совпадают с фокусами гиперболоида; в случае действительной точки—изображение мнимое, и наоборот.

Е) Плоскость. Положив в выражение (9) $f_1 = -f_2$, мы получаем уравнение вида:

$$y^2 = -\frac{4f_1 f_2 x^2}{0}, \quad (19)$$

что при любых значениях x , отличных от нуля, дает $y = \infty$, и лишь при $x = 0$ мы получаем неопределенное значение $y = \frac{0}{0}$. Это и есть, очевидно, уравнение плоскости, проходящей через начало координат и перпендикулярной к оси X -ов. Плоскость таким образом является анаберрационной поверхностью для любых двух сопряженных расстояний, равных по абсолютной величине и противоположных по направлению.

Мы можем рассматривать плоскость, как предел, к которому стремится любая из анаберрационных поверхностей при бесконечном возрастании радиуса кривизны R_0 ; действительно, положив в выражении (11) $R_0 = \infty$, мы получаем тождество лишь в том случае, когда $f_1 + f_2 = 0$ при любых их значениях.¹

Кроме пяти перечисленных здесь поверхностей никаких иных анаберрационных поверхностей для двух сопряженных и на оси лежащих точек не существует.

§ 4. Сплюснутые сфероиды

Если мы будем вращать эллипс вокруг его малой оси, то получим новую поверхность вращения, которую назовем сплюснутым сфероидом. Сплюснутые

¹ Кроме того можно было бы показать, что плоскость является пределом, к которому стремятся гиперболоиды при сближении вершин образующих их гипербол, и что плоскость является пределом, к которому стремятся сплюснутые сфероиды, у которых малая ось имеет конечное значение, а большая безгранично возрастает.

сфероиды ни в коем случае не являются анаберрационными поверхностями, однако, так как они могут входить в анаберрационные системы в качестве одной из поверхностей, то мы и рассмотрим их свойства, обратившись для этого к рис. 3. Здесь изображен эллипс с фокусами Φ_1 и Φ_2 , малой

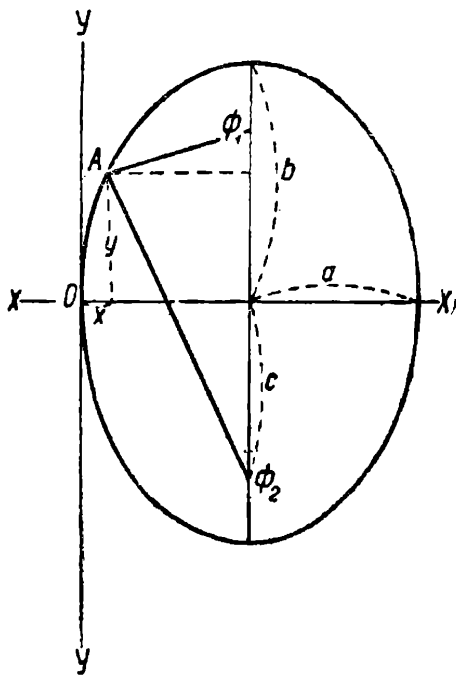


Рис. 3.

полуосью a , большой полуосью b и линейным эксцентриситетом c ; ось вращения — ось X -ов; вершина O отнесена к началу координат; координаты некоторой точки A данной поверхности: x и y .

Для случая эллипса мы вправе написать следующие равенства:

$$\left. \begin{aligned} b^2 &= a^2 + c^2 \\ A\Phi_1 + A\Phi_2 &= 2b \end{aligned} \right\}. \quad (20)$$

Далее из соотношений рис. 3 находим:

$$\begin{aligned} A\Phi_1 &= \sqrt{(a-x)^2 + (c-y)^2} \\ + \\ A\Phi_2 &= \sqrt{(a-x)^2 + (c+y)^2} \\ \hline 2b &= \sqrt{(a-x)^2 + (c-y)^2} + \sqrt{(a-x)^2 + (c+y)^2}, \end{aligned}$$

каковое уравнение после освобождения от корней и на основании выражения (20) получаем в виде:

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2). \quad (21)$$

Из полученного уравнения сплюснутых сфероидов и из выражения (1) мы находим интересующие нас величины R_y и R_0 , для чего прежде всего определяем производную из выражения (21):

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b(a-x)}{a\sqrt{2ax-x^2}}.$$

Подставляя эту величину в выражение (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \frac{b^2}{a} - x \frac{c^2}{a^2} \\ R_0 &= \frac{b^2}{a} \end{aligned} \right\}. \quad (22)$$

После этого мы можем дать вместо выражения (21) уравнение сплюснутого сфероида в новом виде:

$$y^2 = 2R_0x \left(1 - \frac{x}{2a}\right), \quad (23)$$

где R_0 — радиус кривизны центральной зоны и $2a$ — расстояние между вершинами сплюснутого сфероида.

§ 5. Закон регулярных поверхностей и их характеристики

Мы выведем сейчас чрезвычайно важную закономерность, которой подчиняются все анаберрационные поверхности и сплюснутые сфероиды в отношении величины ΔR_y .

Пусть O_0 , O_1 и O_2 (рис. 4) будут соответственно точками пересечения нормалей для центральной зоны, зоны y_1 и зоны y_2 . Тогда приращение величины R_y для зоны y_1 будет $R_{y_1} - R_0 = \Delta R_{y_1}$ и для зоны y_2 будет $R_{y_2} - R_0 = \Delta R_{y_2}$.

Величину R_y определим для анаберрационных поверхностей из выражений (1) и (12), найдя сначала производную функции выражения (12):

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= \frac{f_1 + f_2 - 2x}{2\sqrt{x(f_1 + f_2) - x^2}} \sqrt{\frac{2R_0}{f_1 + f_2}} = \\ &= \frac{a - x}{\sqrt{2ax - x^2}} \sqrt{\frac{R_0}{a}}; \end{aligned} \quad (24)$$

подставляя ее в выражение (1), получаем:

$$\left. \begin{aligned} R_y &= R_0 + x \left[1 - \frac{2R_0}{f_1 + f_2} \right] \\ \text{или} \cdot \\ R_y &= R_0 + x \left(1 - \frac{R_0}{a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

От полученной нами формулы переходим непосредственно к выражению интересующей нас закономерности:

$$\frac{R_y - R_0}{x} = \frac{\Delta R_y}{x} = 1 - \frac{2R_0}{f_1 + f_2} = 1 - \frac{R_0}{a} = \text{const} = C, \quad (26)$$

которую можно формулировать так: „для анаберрационных поверхностей отношение приращений ΔR_y к абсциссам тех же зон есть величина постоянная, зависящая лишь от характера поверхности“.

От полных приращений выражения (26) можно перейти и к частным приращениям, так как на основании выражения (25) мы имеем:

$$\begin{aligned} R_{y_2} &= R_0 + x_2 C, \\ R_{y_1} &= R_0 + x_1 C, \\ \text{откуда} \quad \frac{\Delta R_{y_2} - \Delta R_{y_1}}{x_2 - x_1} &= C. \end{aligned} \quad (27)$$

Величина $C = \frac{\Delta R_y}{x}$, как мы увидим ниже, вполне характеризует свойства нашей поверхности, а потому она названа нами характеристикой поверхности.

Если бы мы по примеру предыдущего вычисления определили величину R_y из выражения (9), то получили бы:

$$\left. \begin{aligned} R_y &= \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2} = \frac{(f_1 - f_2)^2 x}{(f_1 + f_2)^2} \\ R_0 &= \frac{2f_1 f_2}{f_1 + f_2} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

Тогда очевидно:

$$\frac{R_y - R_0}{x} = \frac{\Delta R_y}{x} = C = \frac{(f_1 - f_2)^2}{(f_1 + f_2)^2}, \quad (29)$$

где f_1 и f_2 — анаберрационные сопряженные расстояния.

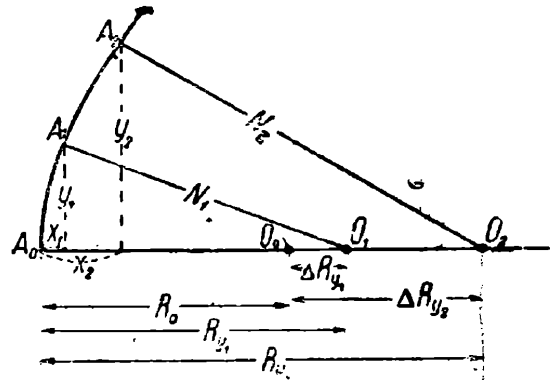


Рис. 4.

Из выражения (29) легко раскрывается аналитическое значение характеристики C : так как $(f_1 - f_2)$ есть расстояние между фокусами, а $(f_1 + f_2)$ — расстояние между вершинами конического сечения, то характеристика C равна квадрату эксцентриситета конического сечения, которое образовало при своем вращении данную анаберрационную поверхность.

Переходя к сплюснутым сфероидом, мы убеждаемся, что и для них справедлив рассмотренный выше закон. Действительно, выражение (22) дает нам для сплюснутых сфероидов:

$$\frac{R_y - R_0}{x} = \frac{\Delta R_y}{x} = -\frac{c^2}{a^2} = \text{const} = C, \quad (30)$$

т. е. величину, постоянную для любых зон.

В случае сплюснутого сфероида C не равно, конечно, квадрату эксцентриситета того эллипса, вращением которого получен сплюснутый сфероид, так как в выражении (30) через a обозначена не большая, а малая полуось эллипса.

Все рассмотренные нами поверхности, как обладающие законом постоянства отношения: $\frac{\Delta R_y}{x} = \text{const}$, мы назовем поверхностями регулярными; все же прочие поверхности, не подчиненные этому закону, назовем поверхностями нерегулярными.

Из регулярных поверхностей первые пять рассмотренных нами поверхностей являются в то же время и анаберрационными.

У гиперболоидов, параболоида и эллипсоидов, согласно выражениям (28) и (29) по мере увеличения ординаты величина R_y возрастает (кривизна уменьшается), поэтому причислим эти поверхности к классу вытянутых сфероидов.

У сплюснутых сфероидов, на основании выражения (22), по мере увеличения ординаты величина R_y уменьшается (кривизна увеличивается), откуда и произошло название этого класса поверхностей.

Класс вытянутых сфероидов разграничен от класса сплюснутых сфероидов сферой, для которой кривизна для любых ее зон постоянна.

Для всех регулярных поверхностей можно дать общее уравнение их поверхности, выраженное через радиус кривизны центральной зоны R_0 и характеристику C .

Действительно, для анаберрационных поверхностей подставляем в выражение (12) значение $(f_1 + f_2)$ из выражения (26):

$$f_1 + f_2 = \frac{2R_0}{1 - C},$$

после чего получаем уравнение анаберрационной поверхности в новом виде:

$$y^2 = 2R_0x - x^2(1 - C). \quad (31a)$$

Таким же образом для сплюснутых сфероидов подставляем в выражение (23) вместо R_0 его значение из выражения (22), где b^2 заменяем через $(a^2 + c^2)$ на основании рис. 3:

$$y^2 = 2R_0x - \frac{(a^2 + c^2)}{a^2}x^2 = 2R_0x - x^2\left(1 + \frac{c^2}{a^2}\right).$$

Но, согласно выражению (30), $\frac{c^2}{a^2} = C$; производя эту замену, получаем уравнение сплюснутых сфероидов в новом виде:

$$y^2 = 2R_0x - x^2(1 - C). \quad (31b)$$

. Таким образом все регулярные поверхности могут быть выражены одним общим уравнением:

$$y^2 = 2R_0x - x^2(1 - C), \quad (31)$$

откуда

$$x = \frac{R_0 - \sqrt{R_0^2 - y^2(1 - C)}}{1 - C}, \quad (32)$$

где R_0 — радиус кривизны центральной зоны и C — характеристика поверхности. Эти две последних величины (R_0 и C) вполне и со всех сторон характеризуют всякую заданную регулярную поверхность, таким образом этими величинами можно и задавать поверхность. В дальнейшем мы увидим, что любые аберрации для любых зон и для любых удалений светящейся точки, а также отклонения любых двух поверхностей друг от друга для любых зон могут быть найдены как функции этих двух основных величин: R_0 и C .

Из выражения (26) мы имеем:

$$\left. \begin{aligned} C &= 1 - \frac{R_0}{a} \\ R_0 &= a(1 - C) \\ a &= \frac{R_0}{1 - C} \end{aligned} \right\}, \quad (33)$$

а из выражения (31) имеем:

$$C = 1 - \frac{y^2}{x(2a - x)}, \quad (34)$$

где $2a$ — расстояние между вершинами конического сечения, измеряемое вдоль оси поверхности и считаемое положительным, когда оно направлено от вершины в сторону центров кривизны поверхности.

§ 6. Частные случаи характеристики регулярных поверхностей

А) Сфера. Положив в выражениях (26) и (29) $f_1 = f_2 = R$, получаем:

$$C_{\text{сферы}} = 0, \quad (35a)$$

т. е. характеристика сферы равна нулю.

В) Эллипсоид. Положив в выражение (29): $f_1 \neq f_2$ при $f_1 > 0$ и $f_2 > 0$, получаем:

$$0 < C_{\text{эллипс.}} < 1, \quad (35b)$$

т. е. характеристика эллипсоида — правильная положительная дробь.

С) Параболоид. Положив в выражении (26) $f_1 = \infty$, получаем:

$$C_{\text{параб.}} = 1, \quad (35c)$$

т. е. характеристика параболоида равна единице.

Д) Гиперболоид. Положив в выражении (29): $f_1 \neq -f_2$ при $f_1 f_2 < 0$, получаем:

$$C_{\text{гип.}} > 1, \quad (35d)$$

т. е. характеристика гиперболоида больше единицы.

Е) Сплюснутый сфероид. Выражение (30) дает для всех сплюснутых сфероидов отрицательную характеристику:

$$C_{\text{спл. сф.}} < 0. \quad (35e)$$

Р) Плоскость. Положив в выражении (26) или (29) $f_1 = -f_2$, получаем: во-первых, $C = -\infty$ и, во-вторых, $C = +\infty$; положив в выражении (26) $R_0 = \infty$ и $a = \infty$; получаем, в-третьих, неопределенность вида:

$$C = \frac{\infty}{\infty},$$

т. е. характеристика плоскости может принимать любые значения до $\pm \infty$ включительно, в зависимости от процесса получения данной плоскости.

Анализируя выражения (29) и (30), мы приходим к заключению, что плоскость можно рассматривать не только как предел, к которому стремятся все поверхности при безграничном увеличении R_0 , но и как предельный случай гиперболоидов, у которых $f_1 = -f_2$, т. е. у которых обе ветки гиперболы сливаются [выражение (29)], причем $C = +\infty$, и как предельный случай сплюснутых сфероидов, у которых при конечном значении a величина $c = \infty$, или при конечном значении c величина $a = 0$ [выражение (30)], причем $C = -\infty$.

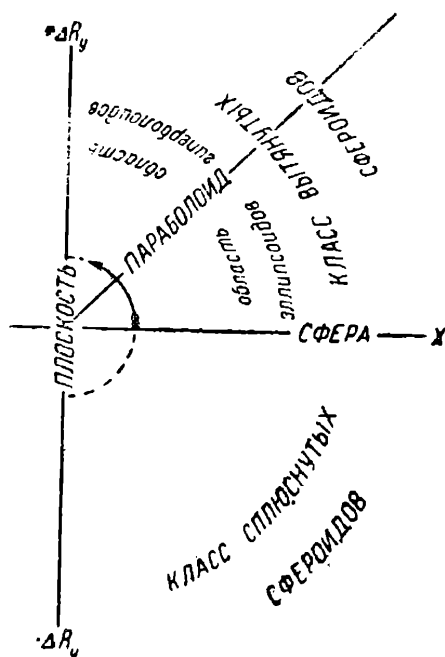


Рис. 5.

Так как $C = \frac{\Delta R_y}{x}$, то мы можем дать сводку нашего анализа в виде графика рис. 5. Если по осям откладывать принятые на этом графике величины, то характеристика поверхности окажется равной тангенсу угла между вектором и осью X-ов, т. е. $C = \operatorname{tg} \varphi$. Тогда верхний правый квадрант будет занят классом вытянутых сфероидов, а нижний правый квадрант — классом сплюснутых сфероидов. Эти два класса разграничены сферой ($C = 0$). Область эллипсоидов разграничена от области гиперболоидов параболоидом ($C = 1$), что графически выражено вектором параболоида, наклоненным на угол $\varphi = 45^\circ$ к оси X-ов.

Предельным значением для гиперболоидов и сплюснутых сфероидов является согласно нашему анализу плоскость ($C = \pm \infty$), что графически вы-

ражено осью Y-ов, для которой $\varphi = 90^\circ$. В двух остальных квадрантах не могут находиться характеристики регулярных поверхностей, так как согласно с нашим условием абсциссы поверхностей имеют только положительное значение.

Мы упоминали уже, что всякая регулярная поверхность может быть задана двумя своими параметрами: R_0 и C .

Во многих случаях, как например, в случае параболического зеркала для систем простых телескопов, мы имеем право не ограничивать величины R_0 строгим заданием и считать зеркало хорошим при любых значениях его главного фокусного расстояния, если оно имеет поверхность близкую к параболической. В этих случаях мы строго ограничиваем лишь величину C ; вот почему, становясь на эту точку зрения, можно сказать, что одинаково трудно приготовить зеркало любых характеристик при приблизительно равных прочих условиях, т. е. поперечниках зеркал, их относительных отверстиях и чувствительности методов испытания.

В этом отношении совершенно особое место занимает плоскость: для всякой плоскости всегда ставятся два ограничения и в смысле точного