

Кристенсен Р.М.

**Введение в механику
КОМПОЗИТОВ**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
К82

Кристенсен Р.М.
К82 Введение в механику композитов / Кристенсен Р.М. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 336 с.

ISBN 978-5-458-34094-6

Описание: Название книги в оригинале «Mechanics of Composite Materials» значительно шире содержания, фактически она является введением в механику композитов. Книга написана на основании опыта работы автора в одном из ведущих центров в США в области композитов и курса лекций для аспирантов Калифорнийского университета в Беркли, что, несомненно, наложило свой отпечаток на стиль изложения. В основу книги положено описание связи эффективных свойств гетерогенных сред разных типов с характеристиками компонентов и анализ особенностей поведения композитов, обусловленных их гетерогенностью. Изучены и описаны среды с включениями сферической, цилиндрической, пластинчатой и эллипсоидальной формы. Подробно представлены различные по сложности расчетные модели (в основном разработанные американскими авторами) для сред с малой, произвольной и близкой к предельной объемной долей включений. Модель среды с произвольной долей включений представлена двумя модификациями, названными при переводе полидисперсной и трехфазной, что подчеркивает способ их построения. Рассмотрены модели хаотически армированных сред, в том числе и модели типа взаимопроникающих сеток. В развернутом и систематизированном виде эти модели впервые предстают перед советским читателем. Отчетливо виден прогресс теории армированных сред, берущий свое начало от основополагающих работ Фойгта и Рейсса. Особенности макроскопического поведения гетерогенных сред, связанные с их строением и свойствами составляющих фаз, продемонстрированы при рассмотрении теории слоистых пластин, расчета элементов конструкций с использованием теории пограничного слоя, примеров проектирования оболочек давления и маховиков и особенно подробно — распространения волн. Изложение ведется преимущественно в рамках линейно-упругого подхода. Разработанные подходы и модели распространены также на описание нелинейно-упругого, вязкоупругого, вязкого, пластического и термоупругого поведения. Однако, как справедливо отмечает Р. М. Кристенсен, такие разделы, как теория предельного состояния, механика разрушения композитов, усталость, влияние внешних факторов, еще не достигли уровня монографического изложения. Ко всем главам автором удачно подобраны задачи и упражнения. Нельзя не упомянуть о том, что некоторые из них по уровню сложности сравнимы с отдельными научными проблемами. В целом книга может использоваться и как учебное пособие, и как справочное руководство по теории армирования, так как содержит много интересных расчетных формул. Доп. информация: Перевод с английского А. И. Бейля и Н. П. Жмудя под редакцией Ю. М. Тарнопольского.

ISBN 978-5-458-34094-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Успехи в области механики композитов, прежде всего в СССР и США, создали предпосылки для написания обобщающих работ. Появившиеся в последние годы монографии и обзоры по отдельным вопросам механики композитов не могут заменить книг, в которых эта область механики рассматривалась бы в целом. Предлагаемая советскому читателю монография представляет собой успешную попытку в этом направлении.

Название книги в оригинале «Mechanics of Composite Materials» значительно шире содержания, фактически она является введением в механику композитов. Книга написана на основании опыта работы автора в одном из ведущих центров в США в области композитов и курса лекций для аспирантов Калифорнийского университета в Беркли, что, несомненно, наложило свой отпечаток на стиль изложения.

В основу книги положено описание связи эффективных свойств гетерогенных сред разных типов с характеристиками компонентов и анализ особенностей поведения композитов, обусловленных их гетерогенностью. Изучены и описаны среды с включениями сферической, цилиндрической, пластинчатой и эллипсоидальной формы. Подробно представлены различные по сложности расчетные модели (в основном разработанные американскими авторами) для сред с малой, произвольной и близкой к предельной объемной долей включений. Модель среды с произвольной долей включений представлена двумя модификациями, названными при переводе полидисперсной и трехфазной, что подчеркивает способ их построения. Рассмотрены модели хаотически армированных сред, в том числе и модели типа взаимопроникающих сеток. В развернутом и систематизированном виде эти модели впервые предстают перед советским читателем. Отчетливо виден прогресс теории армированных сред, берущий свое начало от основополагающих работ Фойгта и Рейсса. Особенности макроскопического поведения гетерогенных сред, связанные с их строением и свойствами составляющих фаз, продемонстрированы при рассмотрении теории слоистых пластин, расчета элементов конструкций с использованием теории пограничного слоя, примеров проектирования оболочек давления и маховиков и особенно подробно — распространения волн. Изложение ведется преимущественно в рамках линейно-упругого подхода. Разработанные подходы и модели распространены также на описание нелинейно-упругого, вязкоупругого, вязкого, пластического и термоупругого поведения. Однако, как справедливо отмечает Р. М. Кристенсен, такие разделы, как теория предельного состояния, механика разрушения композитов, усталость, влияние внешних факторов, еще не достигли уровня монографического изложения.

Ко всем главам автором удачно подобраны задачи и упражнения. Нельзя не упомянуть о том, что некоторые из них по уровню сложности сравнимы с отдельными научными проблемами.

В целом книга может использоваться и как учебное пособие, и как справочное руководство по теории армирования, так как содержит много интересных расчетных формул. Для облегчения поиска необходимых формул

переводчики подготовили специальное дополнение в виде таблиц с комментариями

В книге практически нет ссылок на работы советских авторов (отчасти что объясняется особенностью ее построения), хотя нужно подчеркнуть, что именно ученым нашей страны принадлежит целый ряд фундаментальных результатов в области механики армированных сред. Список таких работ был бы слишком обширен, и мы ограничимся ссылками на издаваемый у нас с 1965 г. журнал «Механика композитных материалов» (ранее «Механика полимеров») и приведенную в конце книги дополнительную литературу.

В заключение хотелось бы поблагодарить автора за его любезное внимание к нашей работе над переводом.

Ю. М. Гарнопольский

ПРЕДИСЛОВИЕ

Наука о композитных материалах является быстро развивающейся отраслью знания во всех аспектах, будь то теоретические исследования, экспериментальное изучение или практические применения. Как и в любой интенсивно развивающейся области, результаты научных работ, проливающие свет на взаимосвязь явлений, неоднозначны, а иногда отрывочны. Мы сделали попытку объединить, описать с единой точки зрения и найти взаимосвязи между многими результатами, полученными в области механики композитов, с целью создания теоретических основ для описания механического поведения гетерогенных сред.

В литературе под термином «композитный материал» часто подразумевают только волокнистые композиты. В книге этот термин применен в более широком смысле. Здесь рассмотрены особенности поведения, присущие широкому классу гетерогенных сред, одной из которых являются волокнистые композиты. В действительности мы не ограничились изучением только твердых гетерогенных сред и уделили также внимание анализу поведения некоторых типов суспензий. Естественно, эта тема весьма обширна и представляет самостоятельный интерес. Она затронута лишь для того, чтобы показать существенную общность подходов и те особенности, которые выявляются при совместном рассмотрении поведения жидкостей и твердых тел.

Поведение композитов рассмотрено здесь с позиции механики сплошных сред, в рамках которой, однако, просто невозможно учесть все эффекты, присущие композитам, включающим большое число дискретных фаз. Поэтому, как правило, использованы идеализированные геометрические модели гетерогенных систем, позволяющие получить аналитические оценки макроскопических свойств гетерогенных сред через геометрические и физические характеристики составляющих их фаз. Указанный принцип является стержнем наших исследований. Достоинство выбранного подхода заключается в том, что он позволяет лучше понять и описать особенности поведения различных комбинаций гетерогенных материалов. Кроме того, именно в формулировке и применении идеализированных моделей есть много спорных и неясных моментов, часто порождающих противоречивые суждения. Мы намерены дать детальное и полное объяснение этого вопроса.

Как видно из оглавления, в книге затронут довольно широкий круг проблем. Среди них расчет макроскопических жесткостей, оценка предельных состояний, распространение волн в гетерогенных средах. В большей части книги предполагается знакомство читателя с методами линейной теории упругости. Однако в ряде важных случаев механическое поведение композитов не является линейно-упругим. Поэтому исследуются типы механического поведения, описываемые теориями вязкоупругости и невязкой пластичности. Кроме того, рассматриваются также некоторые геометрически нелинейные задачи. Имея в виду тесную взаимосвязь механических и термических свойств гетерогенных сред, мы включили также описание макроскопических термических свойств гетерогенной среды. Следует, наконец, упомянуть, что вводные

разделы книги содержат сводку необходимых результатов механики сплошных сред, которые потребуются при изложении основных глав.

Такие аспекты механики полимерных композитов, как усталость, разрушение, а также диффузия влаги, совсем не затронуты. Эти довольно специфические направления в последнее время интенсивно развиваются.

В их разработке участвуют многие исследователи, в том числе и я. Однако мне кажется, и большинство моих коллег, по-видимому, согласятся со мной, что эти важные разделы механики композитов еще не достигли уровня, достойного освещения в монографиях.

Хотя основной акцент сделан на теоретических аспектах механики композитов, достигнутые в этой области результаты критически оценены с точки зрения практики. Сопоставление различных подходов между собой, а также с достоверными экспериментальными данными осуществлено только для отдельных наиболее важных задач. Основные вопросы проектирования изделий из композитов затронуты лишь слегка с целью подчеркнуть плодотворное взаимное влияние практического проектирования и теории.

Я надеюсь, что книга не только будет полезной для исследователей, но и послужит источником современной информации по рассмотренным проблемам для инженеров-практиков. Ее можно также использовать как учебное пособие для аспирантов, поскольку в работе над ней отражен опыт чтения курса лекций по композитным материалам для аспирантов Калифорнийского университета в Беркли. За предоставленную мне возможность читать лекции я благодарен всем коллегам по университету, и особенно П. Нахди и Ц.-Л. Тьену.

Считаю своим приятным долгом выразить признательность многим моим коллегам по работе в Lawrence Livermore Laboratory. Помогла также стимулирующая атмосфера в группе по проекту The Composites and Mechanics Project и в отделе органических материалов (Organic Materials Division), где я работаю. Большой вклад в постановку и организацию исследований композитов в указанной лаборатории внесли Е. М. Ву и Т. Т. Чао. Большую помощь оказало также руководство отделения Chemistry and Materials Science Department, и мне особенно хочется поблагодарить Дж. К. Леппера, Х. Ф. Риццо, Л. У. Робертса и Ч. Ф. Бендера. Нельзя не отметить содействие Исследовательского центра армии (Army Research Office), и в частности поддержку, оказанную мне Е. А. Сейбелем в работе по исследованию композитов. В заключение я благодарю Лорис С.-Х. Донахью из Калифорнийского университета в Беркли за перепечатку рукописи и Кристин Кристенсен за помощь при чтении корректур.

Ричард Кристенсен

Данвилл, Калифорния
Август 1979 г.

ЭЛЕМЕНТЫ МЕХАНИКИ СПЛОШНЫХ СРЕД

В этой книге рассмотрены некоторые аспекты механического поведения гетерогенных сред. К подобному предмету можно подойти с различных сторон и с различной степенью общности. Например, можно собрать обширные экспериментальные данные механических испытаний, тщательно проанализировать их, сопоставив между собой, интерпретировать и в конечном счете использовать в форме графиков, начерченных в безразмерных координатах. Или можно сделать следующий шаг и подыскивать эмпирические аналитические выражения, моделирующие экспериментальные данные. Однако в книге обсуждается другой путь, потому что хотя такие подходы и бывают весьма полезны и удобны, области их применения ограничены теми условиями, при которых получены данные опытов. Следовательно, такой метод оказывается бессильным для описания поведения материала за пределами лабораторного опыта.

Постараемся отыскать более фундаментальный подход, пригодный для прогнозирования механического поведения гетерогенных сред. Очевидно, такая цель не достигается быстро и дешево. Награда, которая нас ожидает, — это награда за те затраты времени и усилия, которые израсходованы для развития строгой теории (теорий) механического поведения. Строго выведенные теории механического поведения содержат в своей основе несколько предположений или гипотез, определяющих границы применимости полученных результатов. В пределах этих границ теория имеет полную и законченную способность моделировать действительное механическое поведение среды.

Наша дальнейшая цель — развить теоретическую основу для рассмотрения механического поведения гетерогенных сред. Можно подойти к решению этой проблемы с позиций предельной общности, т. е. рассматривая полностью нелинейную кинематику и уравнения состояния, записанные в наиболее общем виде. Несмотря на то что такое приближение могло бы быть совершенно строгим, оно слишком общее для использования в частных приложениях. Поэтому примем некоторое компромиссное

приближение, твердо придерживаясь условия, что все введенные предположения или гипотезы должны соответствовать физической реальности. В рамках принятых предположений будем добиваться строгого математического построения теории (теорий) и ее приложений. В самом деле, большая часть нашей работы основана на анализе механического поведения, описываемого линейной теорией упругости, которая сама по себе является высокоразвитой и строгой теорией.

Среди многих разделов механики деформируемых сред (механики континуума) линейная теория упругости дала, вероятно, наиболее широкий спектр приложений. Огромные успехи линейной теории упругости можно объяснить несколькими факторами. Во-первых, что наиболее важно, она реалистично описывает поведение широкого класса материалов. Во-вторых, многочисленные разделы этого предмета высокоразвиты. К настоящему времени имеется обширный набор непосредственно применимых готовых методов и результатов. В-третьих, во многих практических задачах окончательные результаты представлены в простом, но в то же время в достаточно общем виде, удобном для расчетов.

По этим причинам изложим предмет о механическом поведении гетерогенных сред первоначально с точки зрения линейной теории упругости. Это, однако, не означает, что линейная теория упругости разрешит все проблемы.

Два наиболее распространенных обобщения теории упругости — это теория вязкоупругого и упругопластического поведения. Эти типы неупругого поведения гетерогенных сред будут также рассмотрены в книге. Более того, определенное внимание уделено задачам с полностью нелинейной кинематикой деформирования, чтобы показать, что, несмотря на присущую нелинейности сложность, практические проблемы для гетерогенных сред все же можно приблизить к этому уровню.

В связи с нашими намерениями применить теории упругости, вязкоупругости и пластичности дадим обзор элементов этих теорий, которые будут использоваться при анализе механического поведения гетерогенных сред. Этот обзор приведен в гл. I. Там же представлены фундаментальные результаты Эшелби, на основе которых построен расчет характеристик гетерогенных сред в следующих главах.

1.1 ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

В данном разделе приведены некоторые сведения из линейной теории упругости однородных сред. По этому предмету имеется обширная литература, в частности книга Сокольников [1.1].

Краевая задача

Наиболее общая форма линейно-упругих (*закон Гука*) соотношений напряжение—деформация для анизотропных сред имеет вид

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad i, j = 1, 2, 3, \quad (1.1)$$

где σ_{ij} и ε_{ij} — тензоры линейных напряжений и деформаций соответственно, а C_{ijkl} — тензор упругих модулей четвертого ранга, *тензор жесткостей*. Используем прямоугольную декартову систему координат с обычными декартовыми обозначениями, включая суммирование по повторяющимся индексам. Потребуем, чтобы тензоры напряжений и деформаций были симметричными. Тензор жесткости как тензор четвертого ранга имеет 81 независимую компоненту. Однако симметрия тензоров σ_{ij} и ε_{ij} уменьшает число независимых компонент до 36. Как будет отмечено ниже, гипотеза о существовании упругого потенциала еще уменьшит число независимых компонент. В данном разделе рассматривается однородная среда, следовательно, C_{ijkl} не зависят от координат. Наша главная цель в последующей работе — ослабить ограничение относительно гомогенности.

Тензор малых деформаций определяется через компоненты перемещения *соотношениями Коши*

$$\varepsilon_{ij} = 1/2 (u_{i,j} + u_{j,i}), \quad (1.2)$$

где запятая означает частное дифференцирование по координате, символ которой следует за запятой. Шесть независимых компонент деформаций выводятся из трех независимых компонент перемещений, поэтому компоненты деформаций не могут быть независимыми. Это приводит к условиям совместности деформаций. *Уравнения совместности деформаций*, приведенные в [1.1], имеют вид

$$\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} = \varepsilon_{ik,jl} + \varepsilon_{jl,ik}. \quad (1.3)$$

Конечно, большинство из 81 уравнения в (1.3) не независимы. Как правило, уравнения (1.3) записываются в виде группы из шести уравнений; однако только три из них независимы. Уравнения совместности можно записать в напряжениях, а не в деформациях, используя соотношения напряжение—деформация.

Уравнения баланса импульсов имеют вид

$$\sigma_{ij,j}(x_k, t) + F_i(x_k, t) = \rho \frac{\partial^2 u_i(x_k, t)}{\partial t^2}, \quad (1.4)$$

где ρ — массовая плотность и F_i — компоненты объемной силы. В случае когда инерционными членами в (1.4) можно пренебречь, задача имеет статическую природу и (1.4) представляют собой *уравнения равновесия*.

В совокупности с соответствующими формулировками граничных и начальных условий соотношения (1.1)—(1.4) образуют полную систему определяющих соотношений, решение которой даст распределение полей переменных в частной краевой задаче. Единственность решения может быть доказана различными методами. Сокольников [1.1] приводит доказательство, основанное на существовании упругого потенциала. Обратимся далее к соотношению между напряжениями, деформациями и энергией деформирования.

Энергия деформирования

Наиболее удобно вывести соотношения между напряжениями, деформациями и энергией при помощи термодинамического анализа. На данном этапе не будем делать пространственный экскурс в термодинамику, к которой обратимся в гл. IX в связи с неизотермическими состояниями. Здесь отметим только, что напряжение можно выразить как производную энергии деформирования W по деформации:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}, \quad (1.5)$$

где

$$W = 1/2 C_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}. \quad (1.6)$$

Для получения соотношения напряжение — деформация (1.1) из (1.5) и (1.6) необходимо, чтобы тензор C_{ijkl} был симметричен:

$$C_{ijkl} = C_{klij}. \quad (1.7)$$

С учетом ограничения (1.7) число независимых компонент C_{ijkl} сокращается до 21. Дальнейшее уменьшение числа независимых компонент может быть сделано только путем введения ограничений, налагаемых свойствами симметрии среды. Рассмотрим далее эти типы ограничений.

Частные виды симметрии

Для представления тензора C_{ijkl} в компактной форме удобно ввести сокращенные (матричные) обозначения для напряжений и деформаций:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \sigma_{11}, & \varepsilon_1 &= \varepsilon_{11}, \\ \sigma_2 &= \sigma_{22}, & \varepsilon_2 &= \varepsilon_{22}, \\ \sigma_3 &= \sigma_{33}, & \varepsilon_3 &= \varepsilon_{33}, \\ \sigma_4 &= \sigma_{23}, & \varepsilon_4 &= \varepsilon_{23}, \\ \sigma_5 &= \sigma_{13}, & \varepsilon_5 &= \varepsilon_{13}, \\ \sigma_6 &= \sigma_{12}, & \varepsilon_6 &= \varepsilon_{12}. \end{aligned} \quad (1.8)$$

В этих обозначениях соотношения (1.1) с 21 независимой компонентой для C_{ijkl} можно записать в виде

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \\ \sigma_4 \\ \sigma_5 \\ \sigma_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ & & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ & & & & C_{55} & C_{56} \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \varepsilon_4 \\ \varepsilon_5 \\ \varepsilon_6 \end{bmatrix}, \quad (1.9)$$

где C_{ij} — симметричная матрица, в сокращенной форме имеющая вид

$$\sigma_i = C_{ij} \varepsilon_j, \quad i, j = 1, \dots, 6. \quad (1.10)$$

Для симметрии по отношению к плоскости матрица C_{ij} имеет 13 независимых компонент [1.2], например

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ & & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ & & & C_{44} & C_{45} & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.11)$$

где координата x_3 нормальна к плоскости симметрии.

Далее рассмотрим симметрию по отношению к трем взаимно перпендикулярным плоскостям. Этот класс симметрии известен как *ортотропия* и характеризуется девятью независимыми компонентами тензора C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{44} & 0 & 0 \\ & & & & C_{55} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.12)$$

В отличие от предыдущего случая у *трансверсально изотропного (монотропного) материала* одна из плоскостей ортотропии

становится плоскостью изотропии. Полагая, что x_1 нормальна к плоскости изотропии, получим пять независимых компонент:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{22} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{22} - C_{23}) & 0 & 0 \\ & & & & C_{66} & 0 \\ & & & & & C_{66} \end{bmatrix}. \quad (1.13)$$

Наконец, в случае полной *изотропии* остаются две независимые компоненты C_{ij} :

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 & 0 \\ & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) & 0 \\ & & & & & \frac{1}{2}(C_{11} - C_{12}) \end{bmatrix}. \quad (1.14)$$

Соотношения напряжение — деформация (1.10) легко обратить для выражения деформаций через напряжения в общем случае или для какого-либо из упомянутых здесь классов симметрии. Эти результаты приведены подробно в разд. 3.1 для трансверсально изотропных сред, к которым относятся, в частности, однонаправленные волокнистые композиты.

Для изотропии соотношения напряжение — деформация можно записать в виде

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}, \quad (1.15)$$

где λ и μ — упругие константы Ламе, а δ_{ij} — символ Кронекера. Кроме того, соотношения можно компактно записать через дивергаторы и шаровые части тензоров. Пусть s_{ij} и e_{ij} — дивергаторные компоненты напряжений и деформаций, определяемые как

$$\begin{aligned} s_{ij} &= \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \sigma_{kk}, \\ e_{ij} &= \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \varepsilon_{kk}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

При помощи (1.16) соотношения напряжение — деформация (1.15) принимают вид

$$\begin{aligned} s_{ij} &= 2\mu e_{ij}, \\ \sigma_{kk} &= 3k \varepsilon_{kk}, \end{aligned} \quad (1.17)$$