

Флоренский Павел Александрович

**Мнимости в геометрии.
Расширение области
двухмерных образов
геометрии**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
П12

П12 **Павел Александрович Ф.**
Мнимости в геометрии. Расширение области двухмерных образов геометрии
/ Флоренский Павел Александрович – М.: Книга по Требованию, 2022. –
72 с.

ISBN 978-5-521-28431-3

ISBN 978-5-521-28431-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Павел Флоренский

МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ

Расширение области двумерных образов геометрии

(ОПЫТ НОВОГО ИСТОЛКОВАНИЯ МНИМОСТЕЙ)



ИЗДАТЕЛЬСТВО
ПОМОРЕ
МОСКВА—1922 г.

1000 экз.

(Р. Б. Ц.) Москва.

№ 1987 11/VII 22 г.

Ген. Секретарю и Груд. 31-ая МСНХ, архив. Г.У.М. Никольская 1-3.

МНИМОСТИ В ГЕОМЕТРИИ.

Расширение области двумерных образов геометрии.

(Опыт нового истолкования мнимостей).

§ 1. В настоящей заметке делается попытка истолковать мнимые величины, *не* выходя при этом из первоначальных посылок аналитической геометрии на плоскости. А далее, в одном из последующих параграфов, будет показано, что предлагаемое истолкование может быть применимо и вообще к двумерным образам на кривых поверхностях, т. е. введено в дифференциальную геометрию.

Существует несколько способов подойти к мнимостям. Из них на первом месте должна стоять, конечно, формально-арифметическая установка комплексных чисел посредством Гамильтоновских двойц, как наиболее абстрактная. Затем идет оперативная установка комплексов, как символов операций, и, близкая к ней, установка векторная. В качестве дальнейшего конкретного оплотнения двух последних установок следует рассматривать то семейство теорий, весьма близких между собою, но не абсолютно тождественных, в котором самая плоскость делается носительницей комплексных точек. Эти теории возникали самостоятельно неоднократно; привычнее многих других имен связываются с ними имена О. Коши. (1821, 1847), Гаусса (1799) и женеваца Р. Ж. Арганда. (1806); но мысль о подобной установке мнимостей уходит своими корнями и в более глубокое и более широкое прошлое: так, в этом отношении не должны быть обойденными имена прусского

геометра Генриха Кюна (1750), нашего принят своему мемуару в Записках С.-Петербургской Академии Наук, датского математика Каспара Весселя (1797), аббата Бюэ (1806), эльзасца Франса (1813—1815), француза Мурейя (1828), англичанина Джона Уаррена (1828), итальянца О. Беллавитиса (1832), француза Гоюэля (1867), португальца Ф. Гомеса Техейры (1883) и многих других ¹.

В этом логическом преемстве ряда теорий бесспорно проходит один, постепенно конкретизирующийся, замысел; было бы несправедливым и вредным пытаться разрушить выработанное многими совокупными усилиями орудие анализа, столь полезное при изучении функций мнимого переменного. Но не следует при таком признании обычного истолкования мнимостей забывать, что, все же,—это есть не более как интерпретация, символически являющаяся, но не исчерпывающая соответственных арифметических сущностей. Плоскость комплексного переменного не есть еще само переменное,—а лишь одно из истолкований такового на языке пространственных образов, и, следовательно, разделяющее с прочими истолкованиями присущие таковым формальные свойства ². Ведь, всякое истолкование подлежит тому, что сказано Г. Герцем картинах мира: это есть система образов, взятых произвольно, но соответствующих системе истолковываемой, и притом так, чтобы возможно большее число следствий из принятых истолковывающих образов соответствовало последствиям системы истолковываемой. Мы заранее знаем, что ни при одном способе толкования такой параллелизм следствий не может идти беспределенно далеко: мы не нуждаемся в доказательствах того, что перевод не покрывает подлинника во всех его оттенках и деталях, и загодя убеждены, что рано или поздно наступит такое их расхождение, которое не терпимо в пределах требуемой точности совпадения: всякий символ с успехом применим лишь в определенной, свойственной ему сфере, и за пределами известного поля

зрения расплывается, теряет четкость и скорее мешает работе, нежели помогает ей. Мы знаем и то, что, как несколько переводов поэтического произведения на другой язык или на другие языки не только не мешают друг другу, но и восполняют друг друга, хотя ни один не заменяет всецело подлинника; так и научные картины одной и той же реальности могут и должны быть умножаемы—вовсе не в ущерб истине. Зная же все это, мы научились не попрекать то или другое истолкование за то, чего оно не дает, а быть ему благодарным, когда удастся использовать его.

Однако, к указанию ограниченности известной интерпретации мы вынуждаемся, коль скоро наблюдается гипертрофия того или другого перевода, пытающегося отождествить себя с подлинником и заменить его собою. Т. е. тем самым монополизирующего некоторую сущность и ревниво исключаящего какое-либо иное истолкование: тогда ничего не остается, как напомнить забывшейся интерпретации о приличном ей месте и объеме ее применимости.

Так именно обстоит дело с комплексной плоскостью Клона—Вессели—Арганда—Гаусса—Коши. Конечно, она есть прекрасное пособие для изображения комплексного переменного и функций его,—впрочем недостаточное, как показывает необходимость введения поверхностей Римана. Но это пособие отвечает определению функций, ведущему свою родословную от Л. Дирихле, т. е. посредством понятия о соответствии, и, конечно, недостаточному: ведь это определение, принимая во внимание лишь содержание («материальную причину») функции, проходит мимо главного, мимо самой функции, как целого, как формы, связующей это содержание во-едино («формальная причина»). Тут не место говорить, сколько зла произошло и происходит от такого определения функции; не место говорить и о попытках перейти к иному образу понимания—развитием функционального исчисления, теории интегральных и интегро-дифференциальных уравнений, учением о функ-

циях линий и линейных уравнениях. Но и в пределах теории функций, поскольку речь идет о функциях действительного переменного, зло от определения Дирихле отчасти ослабляется контрабандно вносимой поправкою в виде интуитивно представленной формы функции, как над-атомистического начала: имея в виду истолковывание течения функции посредством некоторой кривой. Когда же речь заходит о функциях переменного комплексного, то атомистичность сказанного определения выступает в полной силе. Ведь в теории функций комплексного переменного вся плоскость занимается под изображение переменного независимого, и потому переменному зависимому ничего не остается, как разместиться на самостоятельной плоскости, решительно ничем не связанной с первой. И потому, хотя мы и утверждаем, что будто точки на этой второй плоскости изображают зависимое переменное, однако, именно только утверждаем, но ничуть не показываем и не доказываем, ибо то, что одно только и могло бы геометрически показать и доказать эту зависимость,—самая *связь* двух переменных,—остается никак не представленной геометрически и, в порядке геометрическом, т. е. в порядке самой интерпретации, есть голословное утверждение, лежащее вне возможности проверки, т. е. геометрически не существует. Повторяю, принятая интерпретация минимостей в теории функций комплексного переменного интерпретирует лишь переменные, но отнюдь не *самые функции*, и в этом смысле может быть признана полезным, но далеко не достаточным, костылем анализа.—именно анализа и только его. Аналогичное должно быть повторено и о сфере Нейманна. А между тем, наряду с использованием геометрии в анализе, существует и должно существовать обратное использование анализа в геометрии, будь то геометрия аналитическая, дифференциальная или еще какая иная. И вот тут-то плоскость комплексного переменного *никак* не применима, ибо она порывает с установленными здесь и притом вполне естественными методами и ни-

как с ними не соизмерима. А между тем, и в геометрии мнимости появляются не случайно, но необходимо связанные с формулировкой ее теорем и процессами ее доказательств, хотя здесь и не имеют геометрической наглядности. Уже в элементарном курсе аналитической геометрии, учащийся сплошь и рядом сталкивается с мнимыми образами, но, не будучи в состоянии дать им конкретно-воззрительное содержание, принужден трактовать в высшей степени обобщающие термины, вроде например «мнимой точки», чисто-формально, тогда как на то и существует геометрия, чтобы знанию не быть оторванным от пространственного созерцания. Хотя и аналитическая, однако, все же геометрия, аналитическая геометрия превращается наполовину в анализ, и притом так, что вся изрешетчивается *пробелами*, лишенными геометрического смысла: на каждом шагу тут, за сплошь геометрической фразеологией, падаются *разрывы* геометрической картины, и такое истолкование анализа, какое дает аналитическая геометрия, напоминает перевод с китайского языка, оставивший неперевоенными и лишь транскрибированными помощью русских букв добрую половину иероглифических знаков. Можно сказать, что аналитическая геометрия уже не аналитична, как внесшая ряд пространственных истолкований, и еще не геометрия, как не переводящая всего своего аналитического содержания на геометрические образы. Но ведь очень многие положения аналитической геометрии не имеют существенной важности, как аналитические, и ценны—именно как геометрические; усмотреть их пространственный смысл (а не утверждать таковой только на словах)—дело первостепенной важности. Правда, математика, привыкшего ко всяким «мнимым эллипсам», «циклическим точкам», «изотропам» и т. п., в силу привычки (но отнюдь не вследствие понимания) подобная фразеология давно уж перестала беспокоить. Но эта успокоенность едва ли может рассматриваться, как источник развития математики. Учащийся в этом отношении более прав, когда

он чувствует в подобных высказываниях нечто недоговоренное. Определение окружности бесконечно-малого радиуса—как пары мнимых прямых, пересекающихся в действительной точке, центре окружности, представляется учащемуся—сперва блестящим парадоксом; а когда подобных понятий накопится много, вся их совокупность раздражает, как приевшиеся остроты.

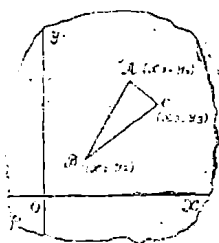
Итак, комплексная плоскость Коши—сама по себе, а мнимости, в аналитической и прочих геометриях,—сами по себе, и с ними обстоит неблагоприятно, а вышеозначенное истолкование помочь тут никак не способно, и лишь запутывает нашу мысль, раздвояя ее между плоскостью, как носительницей самых функциональных связей, т. е. кривых, как это делается в аналитической геометрии и в теории функций действительного переменного, и плоскостью—носительницей одного только переменного, как такового, вне его связи с другим переменным, как об этом говорит теория функций переменного комплексного. Возникает задача: отправляясь от определения точки на плоскости двумя координатами (или соответственно тремя однородными) и понимания кривой на плоскости, как наглядного образа функциональной зависимости между текущими координатами точки ее, и не внося далее никакого разрыва в обычное изложение аналитической и прочих геометрий, *расширить область двумерных образов геометрии так, чтобы в систему пространственных представлений вошли и мнимые образы.* Короче говоря, необходимо найти в пространстве место для мнимых образов, и притом ничего не отнимая от уже занявших свои места образов действительных.

Или, говоря еще иначе, нужно, оставив без внимания все истолкования мнимостей, вернуться к формальной установке комплексных чисел и посмотреть, не допускают ли формально-необходимые, т. е. конститутивные, свойства комплексных чисел и иной, нежели исторически выработалась, линии истолкования. На это,

может быть, последует замечание о нежелательности разрыва с традицией, насчитывающей до пяти двадцатипяти-летий. Да, это нежелательно; но еще более нежелателен разрыв с традицией, имеющей за собою до одиннадцати таких же промежутков времени. «Открытие Гаусса-Коши дало очень много»,—скажут вероятно. Да, но еще более дало открытие Декарта и примыкающая к нему теория действительного переменного. С кем-то из двух, если не посориться, то охладить отношения, приходится силою вещей, ибо эти двое—не в ладах между собою. А если так, то не пожертвовать ли ради Декарта и геометрической сообразности исключительностью в верности Коши?

§ 2. Итак, обращаемся к формальной теории комплексов. Они вводятся здесь посредством Гамильтоновских символов вида (a, b) , разработанных Вейерштрассом³. Самой основной, самой конститутивной характеристикой их является, конечно, именно их *двоичность*. Комплексы образуют множество двукратное. множество двояко-протяженное. Эту двоичность их конституции обычное истолкование приурочивает к двумерности координатной плоскости. Но мы не можем сделать такого шага, потому что двукратная протяженность плоскости уже использована под интерпретацию функциональных зависимостей, и снова обращаться к тому же свойству плоскости—это значит нарушить *jus primæ occupantis*,—в данном случае Декарта. Нам кажется, однако, что и Декарт и Коши впали в одну методологическую ошибку, которая, несмотря на свою кажущуюся маловажность, была чревата и логическими и практическими последствиями. Ошибка эта—в неправильном принятии единицы основной меры. В самом деле, спросим себя, что именно изучаем мы в геометрии. В геометрии изучаем мы пространство,—не линии, точки и поверхности, как таковые, а именно свойства пространства, выражающиеся и в этих частных пространственных образованиях.

И значит, единицею меры мы должны брать *не* величину не однородную с изучаемым объектом, а величину однородную, — часть самого пространства. В абсолютной системе мер, секунда есть отрезок самого времени, как первоосновной реальности. Почему же, в отношении пространства, в основу не положена часть самого пространства? Точно так же, *плоская геометрия изучает самую плоскость* (или вообще поверхность); *плоскость есть ее предмет*, линии же и точки на ней — частные образования на ней, и потому единицею меры мы должны брать в геометрии на плоскости именно *часть плоскости*, линейную же единицу рассматривать в качестве единицы производной. Естественно при изучении любого объекта выбирать первоосновную единицу для его измерения *однородною* с величиною измеряемой, и лишь впоследствии можно придумать какие-либо единицы вторичные и разнородные с первоосновной, хотя, быть может, в каком-нибудь отношении и более удобные практически. Таков логический путь, и пренебрежение им ведет к разным осложнениям.



Чертеж 1-й.

Чтобы наши рассуждения были более конкретными, поведем их на совсем простых примерах.

Пусть в плоскости P дан треугольник ABC (чертеж 1-й); координаты вершин его, отнесенные к прямоугольным декартовым осям, суть:

$$A_1(x_1, y_1), \quad B(x_2, y_2), \quad C(x_3, y_3).$$

Тогда, как известно, площадь его

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} \quad [1]$$

Но ведь вершины его вполне равноправны между собою. Поэтому мы должны, по видимому, получить то же, если переименуем вершину B в C , а C в B .