

Н. Бурбаки

Алгебра

Часть 3. Модули, кольца, формы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. Бурбаки**
Алгебра: Часть 3. Модули, кольца, формы / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2021. – 554 с.

ISBN 978-5-458-31377-3

Группа французских математиков, объединенных под псевдонимом "Бурбаки", поставила перед собой цель — написать под общим заглавием "Элементы математики" полный трактат по современной математике. Многие выпуски этого трактата уже вышли во Франции, вызвав большой интерес математиков всего мира. Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и пединститутов.

ISBN 978-5-458-31377-3

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

3. Радикал кольца	190
4. Радикал артинова кольца и артинова модуля	195
5. Модули над артиновым кольцом	197
§ 7. Радикал и полупростота тензорных произведений	208
1. Предварительные замечания	208
2. Расширение скаляров и радикал	210
3. Тензорное произведение полей	214
4. Тензорное произведение полупростых модулей	216
5. Сепарабельные модули и алгебры	221
6. Тензорное произведение с сепарабельным модулем	223
7. Простые модули над тензорным произведением алгебр	225
§ 8. Применения: I. Композиции расширений	232
§ 9. Применения: II. Полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства	237
1. Полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства	237
2. Абсолютно полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства	238
3. Диагонализируемые семейства эндоморфизмов векторного пространства	241
4. Полупростые и нильпотентные компоненты эндоморфизма	242
§ 10. Простые подкольца. Изоморфизмы простых колец	245
1. Теорема Сколема — Нетер	245
2. Простые подкольца простых колец	247
3. Подполя простых колец	250
4. Группа Брауэра	252
5. Нейтрализующие поля	254
§ 11. Применения	266
1. Конечные тела	266
2. Характеризация тел кватернионов	266
§ 12. Нормы и следы	272
1. Норма и след относительно модуля	272
2. Норма и след в алгебре	276
3. Приведенные норма и след	283
§ 13. Линейные представления	294
1. Линейные представления алгебр	294
2. Матричные представления	296
3. Коэффициенты представлений	297
4. Расширение основного поля линейного представления	300
5. Норма и след относительно представления	302
Приложение. Алгебры без единицы	305
1. Регулярные идеалы	305
2. Простые модули	308
3. Радикал	309

Исторический очерк к главе VIII	314
Библиография	322
Г л а в а IX. Полуторалинейные и квадратичные формы	325
§ 1. Полуторалинейные формы	325
1. Билинейные отображения	325
2. Полуторалинейные отображения	328
3. Ортогональность. Прямые суммы билинейных и полуторалинейных отображений	330
4. Замена основных колец	332
5. Некоторые тождества	337
6. Билинейные и полуторалинейные формы. Ранг	337
7. Обратная форма для билинейной и полуторалинейной форм	342
8. Сопряженный гомоморфизм	344
9. Тензорные произведения и внешние степени полуторалинейных форм	347
10. Матричное исчисление	352
§ 2. Дискриминант полуторалинейной формы	363
§ 3. Эрмитовы и квадратичные формы	371
1. Эрмитовы и ϵ -эрмитовы формы	372
2. Модули над квадратичным расширением	374
3. Билинейные формы, ассоциированные с эрмитовой формой	375
4. Квадратичные формы	377
§ 4. Вполне изотропные подпространства. Теорема Витта	387
1. Изотропные подпространства	387
2. Разложение Витта]	389
3. Теорема Витта	396
§ 5. Некоторые свойства знакопеременных билинейных форм	405
1. Приведение знакопеременных билинейных форм	405
2. Пфаффиан знакопеременной матрицы	408
3. Симплектическая группа	410
§ 6. Некоторые свойства эрмитовых форм	417
1. Ортогональные базисы	417
2. Унитарная группа и ортогональная группа	421
3. Ортогональные проектирования и инволюции	423
4. Симметрии в ортогональной группе	425
5. Группа подобий	426
6. Эрмитова геометрия	428
§ 7. Эрмитовы формы и упорядоченные поля	445
1. Положительные эрмитовы формы	445
2. Закон инерции	448
3. Приведение формы по отношению к данной положительной эрмитовой форме	449
§ 8. Типы квадратичных форм	466
1. Типы квадратичных форм	466

2. Группа типов квадратичных форм	468
3. Кольцо типов квадратичных форм	470
§ 9. Алгебры Клиффорда	472
1. Определение и универсальное свойство алгебры Клиффорда	473
2. Некоторые операции в тензорной алгебре	475
3. Базис алгебры Клиффорда	477
4. Структура алгебры Клиффорда	480
5. Группа Клиффорда	485
§ 10. Углы	496
1. Прямые подобия в плоскости	496
2. Плоская тригонометрия	501
3. Углы	503
4. Угловые секторы	510
Исторический очерк к главе IX	524
Библиография	539
Указатель обозначений	542
Указатель терминов	544
Определения к главе VII	Вклейка № 1
Определения к главе VIII	Вклейка № 2
Определения к главе IX	Вклейка № 3

ГЛАВА VII

МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

Если не оговорено противное, все кольца, рассматриваемые в этой главе, предполагаются коммутативными и имеющими единицу, а модули — унитарными.

§ 1. Кольца главных идеалов

1. Определение кольца главных идеалов

Определение 1. Кольцо A называется кольцом главных идеалов, если оно является кольцом целостности (гл. I, § 8, № 3, определение 3) с единицей и всякий его идеал — главный.

П р и м е ры. Кольцо \mathbf{Z} целых рациональных чисел является кольцом главных идеалов (гл. I, § 8, № 5, пример 4). Кольцо $K[X]$ многочленов от одного переменного над полем K является кольцом главных идеалов (гл. V, IV, § 1, № 5, предложение 7); таковым же будет и кольцо $K[[X]]$ формальных степенных рядов, так как всякий идеал этого кольца имеет вид (X^n) (гл. IV, § 5, № 7). Кольцо целых p -адических чисел является кольцом главных идеалов.

Пусть $Q(i)$ — поле, полученное из поля Q рациональных чисел присоединением корня i неприводимого многочлена $X^2 + 1$. Элементы этого поля $a + bi$, где a и b — целые рациональные числа, образуют подкольцо A поля $Q(i)$, называемое «кольцом целых гауссовых чисел» и являющееся кольцом главных идеалов (упражнение 7).

Напротив, в поле $Q(\sqrt{-5})$, где $\sqrt{-5}$ — корень многочлена $X^2 + 5$, подкольцо B , составленное из элементов вида $a + b\sqrt{-5}$ (a и b — целые рациональные), не будет кольцом главных идеалов.

Кольцо $K[X, Y]$ многочленов от двух переменных над полем K не является кольцом главных идеалов, так как только ненулевые константы делят одновременно X и Y , но ни одна из них не будет образующей идеала, порожденного X и Y .

2. Делимость в кольцах главных идеалов

Пусть A — кольцо главных идеалов, K — его поле дробей; ранее мы видели, что упорядоченная группа \mathcal{P}^* главных дробных идеалов (гл. VI, § 1, № 5) поля K решеточно упорядочена. Более точно:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Пусть K — поле дробей кольца главных идеалов A и $(x_i)_{i \in I}$ — семейство элементов K с общим знаменателем $b \in K^*$ (то есть $bx_i \in A$ при любом i). Тогда:*

1) *Семейство (x_i) имеет н. о. д. в K .*

2) *Всякий н.о.д. семейства (x_i) имеет вид $d = \sum_i a_i x_i$, где a_i — элементы кольца A , причем лишь конечное число их отлично от нуля.*

Действительно, идеал $\sum_i A bx_i$ кольца A — главный и, следовательно, имеет вид $A d'$. Положим $d' = bd$. Из равенства $d' = \sum_i a_i bx_i$ следует $d = \sum_i a_i b_i$, так что всякий общий делитель элементов x_i делит d . С другой стороны, bd , очевидно, общий делитель элементов bx_i , и поэтому d является общим делителем элементов x_i , что и требовалось доказать.

З а м е ч а н и е. Предложение 1 применимо также к любому семейству (x_i) элементов кольца A (достаточно взять $b = 1$), а также к любому *конечному* семейству (x_i) элементов K (в самом деле, если $x_i = c_i b_i^{-1}$, $c_i \in A$, $b_i \in A$, то в качестве b достаточно взять произведение всех b_i).

Следствие. *Пусть (x_i) — произвольное семейство элементов в подкольце главных идеалов A кольца целостности и d — н. о. д. этого семейства в A . Тогда семейство (x_i) обладает н. о. д. в B и d является одним из этих н. о. д.*

В самом деле, d является общим делителем элементов x_i в B . С другой стороны, равенство $d = \sum_i a_i x_i$ ($a_i \in A$) показывает, что всякий общий делитель элементов x_i в B делит d .

Важным применением этого следствия является тот случай, когда $A = K[X]$, $B = E[X]$, где K — некоторое поле, E — его расширение.

Первое утверждение предложения 1 означает, что группа \mathcal{F}^* решеточно упорядочена (гл. VI, § 1, № 9). В частности, всякое конечное семейство элементов поля K обладает н. о. к. Следовательно, к кольцам главных идеалов можно применять результаты гл. VI, №№ 9, 10, 11 и 12, отмеченные знаком (ДЕЛ).

Из второго утверждения предложения 1 следует

Теорема 1 («тождество Безу»). Для того чтобы элементы x_i ($i \in I$) кольца главных идеалов A были в совокупности независимы, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие элементы a_i ($i \in I$) кольца A , что $\sum_i a_i x_i = 1$, причем лишь конечное число a_i отлично от нуля.

Необходимость этого условия следует из предложения 1. Обратно, если $\sum_i a_i x_i = 1$, то всякий общий делитель элементов x_i делит 1, и следовательно, 1 — н. о. д. этих элементов.

Предложение 2. Пусть a, b, d, m и p — элементы поля дробей K кольца главных идеалов A . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) « d — н. о. д. элементов a и b » и « $(d) = (a) + (b)$ ».
- 2) « m — н. о. к. элементов a и b » и « $(m) = (a) \cap (b)$ ».
- 3) « p — экстремальный элемент A » и « (p) — максимальный идеал A ».

Утверждение 1) уже доказано (предложение 1). Далее, общие кратные элементов a и b образуют идеал $(a) \cap (b)$, который, по предположению, является главным идеалом (m) , то есть m — н. о. к. элементов a и b . Это доказывает утверждение 2). Наконец, первое из утверждений 3), по определению (гл. VI, § 1, № 13), равносильно утверждению, что (p) — максимальный элемент упорядоченного по включению множества различных от A главных идеалов кольца A . Так как все идеалы кольца A — главные, это означает, что (p) — максимальный идеал кольца A , откуда следует 3).

Сумму (соответственно пересечение) конечного числа идеалов кольца главных идеалов A называют иногда н. о. д. (соответственно н. о. к.) этих идеалов.

Предложение 3. Пусть a, b, c — элементы поля дробей кольца главных идеалов A и d — н. о. д. элементов a и c . Сравнение

$ax \equiv b \pmod{c}$ имеет целое решение $x_0 \in A$ тогда и только тогда, когда d делит b ; в этом случае все целые решения $x \in A$ этого сравнения совпадают с целыми решениями сравнения $x \equiv x_0 \pmod{cd^{-1}}$.

Если $ax \equiv b \pmod{c}$ и $x \in A$, то существует такой элемент $y \in A$, что $b = ax + cy$. Следовательно, d делит b . Обратно, если d делит b , то $b = ax_0 + cy_0$, где $x_0, y_0 \in A$ (предложение 1). Поэтому $ax_0 \equiv b \pmod{c}$. Кроме того, в этом случае сравнение $ax \equiv b \pmod{c}$ равносильно сравнению $a(x - x_0) \equiv 0 \pmod{c}$; положив $a = da'$ и $c = dc'$, получим $a'(x - x_0) \equiv 0 \pmod{c'}$. Но это сравнение (для всех $x \in A$) равносильно сравнению $x - x_0 \equiv 0 \pmod{c'}$, так как a' и c' — независимые целые элементы (гл. VI, § 1, предложение 10 (ДЕЛ) и следствие 1 предложения 11 (ДЕЛ)).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ — конечное семейство попарно независимых элементов кольца главных идеалов A . Тогда факторкольцо (соответственно A -модуль) $A / (\prod_{i=1}^n a_i)$ изоморфно (соответственно изоморфен) произведению колец (соответственно A -модулей) $A / (a_i)$.

Так как элемент a_n не зависит от a_1, \dots, a_{n-1} (гл. VI, § 1, № 12, следствие 3 предложения 11 (ДЕЛ)), то индукцией по n доказательство сводится к случаю $n = 2$.

Пусть a и b — независимые элементы кольца A . Тогда $(a) + (b) = A$ и $(a) \cap (b) = (ab)$ (гл. VI, § 1, № 12, предложение 12 (ДЕЛ)). Пусть g (соответственно h) — каноническое отображение кольца A на $A / (a)$ (соответственно на $A / (b)$). Рассмотрим отображение $f = (g, h)$ кольца A в $(A / (a)) \times (A / (b))$. Ясно, что f — гомоморфизм (структуры кольца и структуры A -модуля) и его ядро равно $(a) \cap (b) = (ab)$. Поэтому достаточно показать, что f является отображением кольца A «на» $(A / (a)) \times (A / (b))$, то есть для произвольных элементов c и d кольца A нужно доказать существование такого элемента $x \in A$, что $x \equiv c \pmod{a}$, $x \equiv d \pmod{b}$. Но в силу независимости элементов a и b существуют элементы $u, v \in A$, удовлетворяющие условию $ua + vb = 1$. Поэтому достаточно положить $x = dua + cvb$.

Заключение предложения 4 неверно без предположения о попарной независимости элементов a_i (см. § 4, предложение 6).

3. Разложение на экстремальные элементы в кольцах главных идеалов

Теперь мы применим к кольцам главных идеалов результаты гл. VI, § 1, № 13, относящиеся к разложению на экстремальные элементы. По предложению 2 элемент p кольца главных идеалов A экстремален тогда и только тогда, когда кольцо $A/(p)$ является полем (гл. I, § 9, № 3, теорема 2), то есть сравнение $ax \equiv b \pmod{p}$ имеет в A решение при любых a и b , не кратных p .

Определение 2. Системой представителей экстремальных элементов кольца главных идеалов A называется такое семейство (p_α) экстремальных элементов, что всякий экстремальный элемент кольца A ассоциирован с одним и только одним p_α .

Теорема 2. Пусть A — кольцо главных идеалов и (p_α) — система представителей его экстремальных элементов. Тогда всякий ненулевой элемент x поля дробей кольца A имеет единственное представление вида

$$x = u \prod_{\alpha} p_\alpha^{n_\alpha}, \quad (1)$$

где u — обратимый элемент кольца A , n_α — целые рациональные числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Для того чтобы элемент x был целым, необходимо и достаточно, чтобы все n_α были положительными.

Для доказательства применим теорему о разложении в сумму экстремальных элементов (гл. VI, § 1, теорема 2 и предложение 15), наше утверждение, по существу, является ее перефразировкой. Так как группа \mathcal{F}^* решеточно упорядочена, условия упомянутой теоремы будут выполнены, если мы убедимся в том, что всякое непустое множество главных идеалов кольца A имеет максимальный элемент; но это следует из леммы:

Лемма. Пусть A — кольцо (быть может, некоммутативное и без единицы), в котором всякий левый идеал имеет конечное число образующих. Тогда всякое непустое множество Φ левых идеалов кольца A , упорядоченное по включению, имеет максимальный элемент.

В силу теоремы Цорна (Теор. мн., Рез., § 6, № 10) достаточно доказать, что множество Φ индуктивно. Если (a_λ) — совершенно

упорядоченное множество элементов Φ , то объединение \mathfrak{a} идеалов \mathfrak{a}_λ является левым идеалом кольца A и имеет, следовательно, конечное число образующих $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$. Но всякий элемент a_i принадлежит некоторому идеалу \mathfrak{a}_{λ_i} , и так как множество (\mathfrak{a}_λ) совершенно упорядочено, то все a_i ($1 \leq i \leq n$) входят в наибольший из идеалов \mathfrak{a}_{λ_i} , скажем \mathfrak{a}_μ . Тогда $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\mu$ принадлежит Φ , то есть множество Φ индуктивно.

В дальнейшем мы будем изучать *нетеровы кольца*, то есть коммутативные кольца, в которых каждое непустое множество идеалов имеет максимальный элемент.

З а м е ч а н и е. Правая часть равенства (1) называется разложением элемента x на экстремальные множители. Если $x = u \prod_a p_a^{n_\alpha}$ и $y = v \prod_a p_a^{m_\alpha}$ — разложения элементов x и y на экстремальные множители, то x делит y тогда и только тогда, когда для всякого α $n_\alpha \leq m_\alpha$; отсюда

$$\text{н. о. д. } (x, y) = \prod_a p_a^{\inf(n_\alpha, m_\alpha)}, \quad (2)$$

$$\text{н. о. к. } (x, y) = \prod_a p_a^{\sup(n_\alpha, m_\alpha)}. \quad (3)$$

Свойство, описываемое теоремой 2, справедливо для колец более широкого класса; эти кольца появятся у нас ниже под названием *факториальных колец*. Мы увидим, что кольца многочленов и формальных степенных рядов от любого числа переменных являются факториальными кольцами.

4. Делимость целых рациональных чисел

Как было сказано, кольцо \mathbf{Z} целых рациональных чисел является кольцом главных идеалов; его поле дробей есть \mathbf{Q} . Мультипликативная группа U обратимых элементов кольца \mathbf{Z} состоит из двух элементов: 1 и -1 . Группа \mathbf{Q}_+^* строго положительных рациональных чисел содержит единственный элемент из каждого класса ассоциированных элементов кольца \mathbf{Q} ; следовательно, она изоморфна группе $\mathcal{F}^* = \mathbf{Q}^*/U$ главных дробных идеалов поля \mathbf{Q} , с которой ее обычно и отождествляют. В дальнейшем, когда речь будет о н. о. д. или н. о. к. в поле \mathbf{Q} (относительно кольца \mathbf{Z}), будет предполагаться, что эти элементы ≥ 0 ; это