

**Н. Бурбаки**

# **Алгебра**

## **Часть 3. Модули, кольца, формы**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Н11

Н11 **Н. Бурбаки**  
Алгебра: Часть 3. Модули, кольца, формы / Н. Бурбаки – М.: Книга по Требованию, 2021. – 554 с.

**ISBN 978-5-458-31377-3**

Группа французских математиков, объединенных под псевдонимом "Бурбаки", поставила перед собой цель — написать под общим заглавием "Элементы математики" полный трактат по современной математике. Многие выпуски этого трактата уже вышли во Франции, вызвав большой интерес математиков всего мира. Книга рассчитана на математиков — научных работников, аспирантов и студентов старших курсов университетов и пединститутов.

**ISBN 978-5-458-31377-3**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2021

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



3. Радикал кольца . . . . .	190
4. Радикал артинова кольца и артинова модуля . . . . .	195
5. Модули над артиновым кольцом . . . . .	197
§ 7. Радикал и полупростота тензорных произведений . . . . .	208
1. Предварительные замечания . . . . .	208
2. Расширение скаляров и радикал . . . . .	210
3. Тензорное произведение полей . . . . .	214
4. Тензорное произведение полупростых модулей . . . . .	216
5. Сепарабельные модули и алгебры . . . . .	221
6. Тензорное произведение с сепарабельным модулем . . . . .	223
7. Простые модули над тензорным произведением алгебр . . . . .	225
§ 8. Применения: I. Композиции расширений . . . . .	232
§ 9. Применения: II. Полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства . . . . .	237
1. Полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства . . . . .	237
2. Абсолютно полупростые семейства эндоморфизмов векторного пространства . . . . .	238
3. Диагонализируемые семейства эндоморфизмов векторного пространства . . . . .	241
4. Полупростые и нильпотентные компоненты эндоморфизма . . . . .	242
§ 10. Простые подкольца. Изоморфизмы простых колец . . . . .	245
1. Теорема Сколема — Нетер . . . . .	245
2. Простые подкольца простых колец . . . . .	247
3. Подполя простых колец . . . . .	250
4. Группа Брауэра . . . . .	252
5. Нейтрализующие поля . . . . .	254
§ 11. Применения . . . . .	266
1. Конечные тела . . . . .	266
2. Характеризация тел кватернионов . . . . .	266
§ 12. Нормы и следы . . . . .	272
1. Норма и след относительно модуля . . . . .	272
2. Норма и след в алгебре . . . . .	276
3. Приведенные норма и след . . . . .	283
§ 13. Линейные представления . . . . .	294
1. Линейные представления алгебр . . . . .	294
2. Матричные представления . . . . .	296
3. Коэффициенты представлений . . . . .	297
4. Расширение основного поля линейного представления . . . . .	300
5. Норма и след относительно представления . . . . .	302
Приложение. Алгебры без единицы . . . . .	305
1. Регулярные идеалы . . . . .	305
2. Простые модули . . . . .	308
3. Радикал . . . . .	309

Исторический очерк к главе VIII . . . . .	314
Библиография . . . . .	322
<b>Г л а в а IX. Полуторалинейные и квадратичные формы . . . . .</b>	<b>325</b>
§ 1. Полуторалинейные формы . . . . .	325
1. Билинейные отображения . . . . .	325
2. Полуторалинейные отображения . . . . .	328
3. Ортогональность. Прямые суммы билинейных и полуторалинейных отображений . . . . .	330
4. Замена основных колец . . . . .	332
5. Некоторые тождества . . . . .	337
6. Билинейные и полуторалинейные формы. Ранг . . . . .	337
7. Обратная форма для билинейной и полуторалинейной форм . . . . .	342
8. Сопряженный гомоморфизм . . . . .	344
9. Тензорные произведения и внешние степени полуторалинейных форм . . . . .	347
10. Матричное исчисление . . . . .	352
§ 2. Дискриминант полуторалинейной формы . . . . .	363
§ 3. Эрмитовы и квадратичные формы . . . . .	371
1. Эрмитовы и $\varepsilon$ -эрмитовы формы . . . . .	372
2. Модули над квадратичным расширением . . . . .	374
3. Билинейные формы, ассоциированные с эрмитовой формой . . . . .	375
4. Квадратичные формы . . . . .	377
§ 4. Вполне изотропные подпространства. Теорема Витта . . . . .	387
1. Изотропные подпространства . . . . .	387
2. Разложение Витта] . . . . .	389
3. Теорема Витта . . . . .	396
§ 5. Некоторые свойства знакопеременных билинейных форм . . . . .	405
1. Приведение знакопеременных билинейных форм . . . . .	405
2. Пфаффиан знакопеременной матрицы . . . . .	408
3. Симплектическая группа . . . . .	410
§ 6. Некоторые свойства эрмитовых форм . . . . .	417
1. Ортогональные базисы . . . . .	417
2. Унитарная группа и ортогональная группа . . . . .	421
3. Ортогональные проектирования и инволюции . . . . .	423
4. Симметрии в ортогональной группе . . . . .	425
5. Группа подобий . . . . .	426
6. Эрмитова геометрия . . . . .	428
§ 7. Эрмитовы формы и упорядоченные поля . . . . .	445
1. Положительные эрмитовы формы . . . . .	445
2. Закон инерции . . . . .	448
3. Приведение формы по отношению к данной положительной эрмитовой форме . . . . .	449
§ 8. Типы квадратичных форм . . . . .	466
1. Типы квадратичных форм . . . . .	466

2. Группа типов квадратичных форм . . . . .	468
3. Кольцо типов квадратичных форм . . . . .	470
§ 9. Алгебры Клиффорда . . . . .	472
1. Определение и универсальное свойство алгебры Клиффорда	473
2. Некоторые операции в тензорной алгебре . . . . .	475
3. Базис алгебры Клиффорда . . . . .	477
4. Структура алгебры Клиффорда . . . . .	480
5. Группа Клиффорда . . . . .	485
§ 10. Углы . . . . .	496
1. Прямые подобия в плоскости . . . . .	496
2. Плоская тригонометрия . . . . .	501
3. Углы . . . . .	503
4. Угловые секторы . . . . .	510
Исторический очерк к главе IX . . . . .	524
Библиография . . . . .	539
Указатель обозначений . . . . .	542
Указатель терминов . . . . .	544
Определения к главе VII . . . . .	Вклейка № 1
Определения к главе VIII . . . . .	Вклейка № 2
Определения к главе IX . . . . .	Вклейка № 3

---





## ГЛАВА VII

### МОДУЛИ НАД КОЛЬЦАМИ ГЛАВНЫХ ИДЕАЛОВ

*Если не оговорено противное, все кольца, рассматриваемые в этой главе, предполагаются коммутативными и имеющими единицу, а модули — унитарными.*

#### § 1. Кольца главных идеалов

##### 1. Определение кольца главных идеалов

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.** Кольцо  $A$  называется *кольцом главных идеалов*, если оно является кольцом целостности (гл. I, § 8, п° 3, определение 3) с единицей и всякий его идеал — главный.

**П р и м е р ы.** Кольцо  $\mathbb{Z}$  целых рациональных чисел является кольцом главных идеалов (гл. I, § 8, п° 5, пример 4). Кольцо  $K[X]$  многочленов от одного переменного над полем  $K$  является кольцом главных идеалов (гл. V, IV, § 1, п° 5, предложение 7); таковым же будет и кольцо  $K[[X]]$  формальных степенных рядов, так как всякий идеал этого кольца имеет вид  $(X^n)$  (гл. IV, § 5, п° 7). Кольцо целых  $p$ -адических чисел является кольцом главных идеалов.

Пусть  $\mathcal{Q}(i)$  — поле, полученное из поля  $\mathcal{Q}$  рациональных чисел присоединением корня  $i$  неприводимого многочлена  $X^2 + 1$ . Элементы этого поля  $a + bi$ , где  $a$  и  $b$  — целые рациональные числа, образуют подкольцо  $A$  поля  $\mathcal{Q}(i)$ , называемое «кольцом целых гауссовых чисел» и являющееся кольцом главных идеалов (упражнение 7).

Напротив, в поле  $\mathcal{Q}(\varrho)$ , где  $\varrho$  — корень многочлена  $X^2 + 5$ , подкольцо  $B$ , составленное из элементов вида  $a + b\varrho$  ( $a$  и  $b$  — целые рациональные), не будет кольцом главных идеалов.

Кольцо  $K[X, Y]$  многочленов от двух переменных над полем  $K$  не является кольцом главных идеалов, так как только ненулевые константы делят одновременно  $X$  и  $Y$ , но ни одна из них не будет образующей идеала, порожденного  $X$  и  $Y$ .

## 2. Делимость в кольцах главных идеалов

Пусть  $A$  — кольцо главных идеалов,  $K$  — его поле дробей; ранее мы видели, что упорядоченная группа  $\mathcal{D}^*$  главных дробных идеалов (гл. VI, § 1, п° 5) поля  $K$  решеточно упорядочена. Более точно:

**Предложение 1.** Пусть  $K$  — поле дробей кольца главных идеалов  $A$  и  $(x_i)_{i \in I}$  — семейство элементов  $K$  с общим знаменателем  $b \in K^*$  (то есть  $bx_i \in A$  при любом  $i$ ). Тогда:

1) Семейство  $(x_i)$  имеет н. о. д. в  $K$ .

2) Всякий н.о.д. семейства  $(x_i)$  имеет вид  $d = \sum_i a_i x_i$ , где  $a_i$  — элементы кольца  $A$ , причем лишь конечное число их отлично от нуля.

Действительно, идеал  $\sum_i A b x_i$  кольца  $A$  — главный и, следовательно, имеет вид  $A d'$ . Положим  $d' = b d$ . Из равенства  $d' = \sum_i a_i b x_i$  следует  $d = \sum_i a_i x_i$ , так что всякий общий делитель элементов  $x_i$  делит  $d$ . С другой стороны,  $b d$ , очевидно, общий делитель элементов  $b x_i$ , и поэтому  $d$  является общим делителем элементов  $x_i$ , что и требовалось доказать.

**З а м е ч а н и е.** Предложение 1 применимо также к любому семейству  $(x_i)$  элементов кольца  $A$  (достаточно взять  $b = 1$ ), а также к любому *конечному* семейству  $(x_i)$  элементов  $K$  (в самом деле, если  $x_i = c_i b_i^{-1}$ ,  $c_i \in A$ ,  $b_i \in A$ , то в качестве  $b$  достаточно взять произведение всех  $b_i$ ).

**Следствие.** Пусть  $(x_i)$  — произвольное семейство элементов в подкольце главных идеалов  $A$  кольца целостности и  $d$  — н. о. д. этого семейства в  $A$ . Тогда семейство  $(x_i)$  обладает н. о. д. в  $B$  и  $d$  является одним из этих н. о. д.

В самом деле,  $d$  является общим делителем элементов  $x_i$  в  $B$ . С другой стороны, равенство  $d = \sum_i a_i x_i$  ( $a_i \in A$ ) показывает, что всякий общий делитель элементов  $x_i$  в  $B$  делит  $d$ .

Важным применением этого следствия является тот случай, когда  $A = K[X]$ ,  $B = E[X]$ , где  $K$  — некоторое поле,  $E$  — его расширение.

Первое утверждение предложения 1 означает, что группа  $\mathfrak{F}^*$  решоточно упорядочена (гл. VI, § 1, п° 9). В частности, всякое конечное семейство элементов поля  $K$  обладает н. о. к. Следовательно, к кольцам главных идеалов можно применять результаты гл. VI, п° 9, 10, 11 и 12, отмеченные знаком (ДЕЛ).

Из второго утверждения предложения 1 следует

**ТЕОРЕМА 1** («тождество Безу»). *Для того чтобы элементы  $x_i$  ( $i \in I$ ) кольца главных идеалов  $A$  были в совокупности независимы, необходимо и достаточно, чтобы существовали такие элементы  $a_i$  ( $i \in I$ ) кольца  $A$ , что  $\sum_i a_i x_i = 1$ , причем лишь конечное число  $a_i$  отлично от нуля.*

Необходимость этого условия следует из предложения 1. Обратно, если  $\sum_i a_i x_i = 1$ , то всякий общий делитель элементов  $x_i$  делит 1, и следовательно, 1 — н. о. д. этих элементов.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2.** Пусть  $a, b, d, m$  и  $p$  — элементы поля дробей  $K$  кольца главных идеалов  $A$ . Тогда следующие утверждения равносильны:

- 1) « $d$  — н. о. д. элементов  $a$  и  $b$ » и « $(d) = (a) + (b)$ ».
- 2) « $m$  — н. о. к. элементов  $a$  и  $b$ » и « $(m) = (a) \cap (b)$ ».
- 3) « $p$  — экстремальный элемент  $A$ » и « $(p)$  — максимальный идеал  $A$ ».

Утверждение 1) уже доказано (предложение 1). Далее, общие кратные элементов  $a$  и  $b$  образуют идеал  $(a) \cap (b)$ , который, по предположению, является главным идеалом  $(m)$ , то есть  $m$  — н. о. к. элементов  $a$  и  $b$ . Это доказывает утверждение 2). Наконец, первое из утверждений 3), по определению (гл. VI, § 1, п° 13), равносильно утверждению, что  $(p)$  — максимальный элемент упорядоченного по включению множества отличных от  $A$  главных идеалов кольца  $A$ . Так как все идеалы кольца  $A$  — главные, это означает, что  $(p)$  — максимальный идеал кольца  $A$ , откуда следует 3).

Сумму (соответственно пересечение) конечного числа идеалов кольца главных идеалов  $A$  называют иногда н. о. д. (соответственно н. о. к.) этих идеалов.

**ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.** Пусть  $a, b, c$  — элементы поля дробей кольца главных идеалов  $A$  и  $d$  — н. о. д. элементов  $a$  и  $c$ . Сравнение

$ax \equiv b \pmod{c}$  имеет целое решение  $x_0 \in A$  тогда и только тогда, когда  $d$  делит  $b$ ; в этом случае все целые решения  $x \in A$  этого сравнения совпадают с целыми решениями сравнения  $x \equiv x_0 \pmod{cd^{-1}}$ .

Если  $ax \equiv b \pmod{c}$  и  $x \in A$ , то существует такой элемент  $y \in A$ , что  $b = ax + cy$ . Следовательно,  $d$  делит  $b$ . Обратно, если  $d$  делит  $b$ , то  $b = ax_0 + cy_0$ , где  $x_0, y_0 \in A$  (предложение 1). Поэтому  $ax_0 \equiv b \pmod{c}$ . Кроме того, в этом случае сравнение  $ax \equiv b \pmod{c}$  равносильно сравнению  $a(x - x_0) \equiv 0 \pmod{c}$ ; положив  $a = da'$  и  $c = dc'$ , получим  $a'(x - x_0) \equiv 0 \pmod{c'}$ . Но это сравнение (для всех  $x \in A$ ) равносильно сравнению  $x - x_0 \equiv 0 \pmod{c'}$ , так как  $a'$  и  $c'$  — независимые целые элементы (гл. VI, § 1, предложение 10 (ДЕЛ) и следствие 1 предложения 11 (ДЕЛ)).

**Предложение 4.** Пусть  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$  — конечное семейство попарно независимых элементов кольца главных идеалов  $A$ . Тогда факторкольцо (соответственно  $A$ -модуль)  $A/(\prod_{i=1}^n a_i)$  изоморфно (соответственно изоморфен) произведению колец (соответственно  $A$ -модулей)  $A/(a_i)$ .

Так как элемент  $a_n$  не зависит от  $a_1, \dots, a_{n-1}$  (гл. VI, § 1, п° 12, следствие 3 предложения 11 (ДЕЛ)), то индукцией по  $n$  доказательство сводится к случаю  $n = 2$ .

Пусть  $a$  и  $b$  — независимые элементы кольца  $A$ . Тогда  $(a) + (b) = A$  и  $(a) \cap (b) = (ab)$  (гл. VI, § 1, п° 12, предложение 12 (ДЕЛ)). Пусть  $g$  (соответственно  $h$ ) — каноническое отображение кольца  $A$  на  $A/(a)$  (соответственно на  $A/(b)$ ). Рассмотрим отображение  $f = (g, h)$  кольца  $A$  в  $(A/(a)) \times (A/(b))$ . Ясно, что  $f$  — гомоморфизм (структуры кольца и структуры  $A$ -модуля) и его ядро равно  $(a) \cap (b) = (ab)$ . Поэтому достаточно показать, что  $f$  является отображением кольца  $A$  «на»  $(A/(a)) \times (A/(b))$ , то есть для произвольных элементов  $c$  и  $d$  кольца  $A$  нужно доказать существование такого элемента  $x \in A$ , что  $x \equiv c \pmod{a}$ ,  $x \equiv d \pmod{b}$ . Но в силу независимости элементов  $a$  и  $b$  существуют элементы  $u, v \in A$ , удовлетворяющие условию  $ua + vb = 1$ . Поэтому достаточно положить  $x = dua + cvb$ .

Заключение предложения 4 неверно без предположения о попарной независимости элементов  $a_i$  (см. § 4, предложение 6).

### 3. Разложение на экстремальные элементы в кольцах главных идеалов

Теперь мы применим к кольцам главных идеалов результаты гл. VI, § 1, п° 13, относящиеся к разложению на экстремальные элементы. По предложению 2 элемент  $p$  кольца главных идеалов  $A$  экстремален тогда и только тогда, когда кольцо  $A/(p)$  является полем (гл. I, § 9, п° 3, теорема 2), то есть сравнение  $ax \equiv b \pmod{p}$  имеет в  $A$  решение при любых  $a$  и  $b$ , не кратных  $p$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.** Системой представителей экстремальных элементов кольца главных идеалов  $A$  называется такое семейство  $(p_\alpha)$  экстремальных элементов, что всякий экстремальный элемент кольца  $A$  ассоциирован с одним и только одним  $p_\alpha$ .

**ТЕОРЕМА 2.** Пусть  $A$  — кольцо главных идеалов и  $(p_\alpha)$  — система представителей его экстремальных элементов. Тогда всякий ненулевой элемент  $x$  поля дробей кольца  $A$  имеет единственное представление вида

$$x = u \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{n_{\alpha}}, \quad (1)$$

где  $u$  — обратимый элемент кольца  $A$ ,  $n_{\alpha}$  — целые рациональные числа, из которых лишь конечное число отлично от нуля. Для того чтобы элемент  $x$  был целым, необходимо и достаточно, чтобы все  $n_{\alpha}$  были положительными.

Для доказательства применим теорему о разложении в сумму экстремальных элементов (гл. VI, § 1, теорема 2 и предложение 15), наше утверждение, по существу, является ее перефразировкой. Так как группа  $\mathfrak{F}^*$  решеточно упорядочена, условия упомянутой теоремы будут выполнены, если мы убедимся в том, что всякое непустое множество главных идеалов кольца  $A$  имеет максимальный элемент; но это следует из леммы:

**ЛЕММА.** Пусть  $A$  — кольцо (быть может, некоммутативное и без единицы), в котором всякий левый идеал имеет конечное число образующих. Тогда всякое непустое множество  $\Phi$  левых идеалов кольца  $A$ , упорядоченное по включению, имеет максимальный элемент.

В силу теоремы Цорна (Теор. мн., Рез., § 6, п° 10) достаточно доказать, что множество  $\Phi$  индуктивно. Если  $(\alpha_\lambda)$  — совершенно

упорядоченное множество элементов  $\Phi$ , то объединение  $\mathfrak{a}$  идеалов  $\mathfrak{a}_\lambda$  является левым идеалом кольца  $A$  и имеет, следовательно, конечное число образующих  $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ . Но всякий элемент  $a_i$  принадлежит некоторому идеалу  $\mathfrak{a}_{\lambda_i}$ , и так как множество  $(\mathfrak{a}_\lambda)$  совершенно упорядочено, то все  $a_i$  ( $1 \leq i \leq n$ ) входят в наибольший из идеалов  $\mathfrak{a}_{\lambda_i}$ , скажем  $\mathfrak{a}_\mu$ . Тогда  $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_\mu$  принадлежит  $\Phi$ , то есть множество  $\Phi$  индуктивно.

В дальнейшем мы будем изучать *нетеровы кольца*, то есть коммутативные кольца, в которых каждое непустое множество идеалов имеет максимальный элемент.

**З а м е ч а н и е.** Правая часть равенства (1) называется разложением элемента  $x$  на экстремальные множители. Если  $x = u \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{n_{\alpha}}$  и  $y = v \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{m_{\alpha}}$  — разложения элементов  $x$  и  $y$  на экстремальные множители, то  $x$  делит  $y$  тогда и только тогда, когда для всякого  $\alpha$   $n_{\alpha} \leq m_{\alpha}$ ; отсюда

$$\text{н. о. д. } (x, y) = \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{\inf(n_{\alpha}, m_{\alpha})}, \quad (2)$$

$$\text{н. о. к. } (x, y) = \prod_{\alpha} p_{\alpha}^{\sup(n_{\alpha}, m_{\alpha})}. \quad (3)$$

Свойство, описываемое теоремой 2, справедливо для колец более широкого класса; эти кольца появятся у нас ниже под названием *факториальных колец*. Мы увидим, что кольца многочленов и формальных степенных рядов от любого числа переменных являются факториальными кольцами.

#### 4. Делимость целых рациональных чисел

Как было сказано, кольцо  $\mathbb{Z}$  целых рациональных чисел является кольцом главных идеалов; его поле дробей есть  $\mathbb{Q}$ . Мультипликативная группа  $U$  обратимых элементов кольца  $\mathbb{Z}$  состоит из двух элементов: 1 и  $-1$ . Группа  $\mathbb{Q}_+^*$  строго положительных рациональных чисел содержит единственный элемент из каждого класса ассоциированных элементов кольца  $\mathbb{Q}$ ; следовательно, она изоморфна группе  $\mathbb{F}^* = \mathbb{Q}^*/U$  главных дробных идеалов поля  $\mathbb{Q}$ , с которой ее обычно и отождествляют. В дальнейшем, когда речь будет о н. о. д. или н. о. к. в поле  $\mathbb{Q}$  (относительно кольца  $\mathbb{Z}$ ), будет предполагаться, что эти элементы  $\geq 0$ ; это