М.А. Бонч-Бруевич

Элементы радиотехники

Часть 1

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 53
ББК 22.3
М11

М.А. Бонч-Бруевич

М11 Элементы радиотехники: Часть 1 / М.А. Бонч-Бруевич – М.: Книга по Требованию, 2024. – 264 с.

ISBN 978-5-458-48240-0

Эта книга написана в качестве учебного пособия по курсу радиотехники для техникумов связи. В основном она представляет- собою сокращенное и переработанное изложение материала, содержащегося в моей книге «Основы радиотехники», часть 1. Исключение представляет глава о фильтрах, которая сильно расширена по сравнению с тем, что было изложено в «Основах радиотехники». Теория фильтров изложена методом четырехполюсника. Можно еще отметить, что цепи с распределенными постоянными изложены раньше цепей с сосредоточенными постоянными. Это еделанб с целью осветить явления в цепях с сосредоточенными постоянными с более общей точки зрения. Характер текста позволяет, однако, в процессе преподавания принять и обратную последовательность изложения, если преподаватель более склонен, следовать установившейся традиции. Я стремился придать изложению такой характер, при котором физическое содержание явлений выступало бы на первый план и не затемнялось бы формальной стороной математической символики. С этой же целью я подробно остановился во введении на вопросе о физических представлениях, способствующих обобщенному пониманию процессов в колебательных цепях, и на физическом смысле символического метода. В конце книги даны некоторые приложения, которые могут быть полезны для вычислений. . .

ISBN 978-5-458-48240-0

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ОБОЗНАЧЕНИЯ К ВВЕДЕНИЮ

C — емкость
E, e — напряжение, разность потенциалов
e — основание неперовых логарифмов
I, i — сила тока
j — мнимое число $\sqrt{-1}$ (оператор поворота вектора на угол $\frac{\pi}{2}$)
K — различные коэфициенты
L — коэфициент самоиндукции
ln — натуральный логарифм
R — активное (ваттное) положительное сопротивление
T — период
t — время
Z — комплексное выражение кажущегося сопротивления
z — кажущееся (полное) сопротивление (модуль)
ω, Ω — круговая частота
δ — коэфициент затухания
$\equiv$ — знак тождества. Выражение $(a+b)\equiv c$ означает „обозначим $(a+b)$ через c"

Амплитудные значения переменных величин обозначены большой буквой с индексом m, например, E_m, I_m, P_m и т. д.

Постоянные и среднеквадратичные значения — теми же буквами без индекса, например, E, I, P и т. д.

Мгновенные значения, выраженные в тригонометрической форме, обозначены малыми буквами, например,

$$i = I_m \sin(\omega t).$$

Мгновенные значения, выраженные в комплексной форме, обозначены большой буквой с точкой наверху, например,

$$\dot{I} = a + jb;\ \dot{E} = E_m e^{j(\omega t+\varphi)}.$$

Векторы обозначены прямым жирным шрифтом.

§ 1. Предмет радиотехники.

Радиотехника пользуется для передачи сигналов электромагнитными волнами, распространяющимися в пространстве, окружающем передающую станцию.

Электромагнитная волна, с которой мы в дальнейшем познакомимся подробно, представляет собой определенное сочетание магнитного и электрического полей, движущихся со скоростью света.

Такие волны отделяются (или „излучаются") от всякого провода, в котором изменяется сила тока. Однако в большинстве случаев количество излученной энергии очень незначительно, и электромагнитные волны могут быть обнаружены только вблизи излучателя и притом только посредством очень чувствительных индикаторов. Так обстоит дело, например, в случае обыкновенного технического переменного тока.

Для того чтобы создать значительное излучение, применяют специальные устройства, так называемые „антенны", и пользуются токами высокой частоты, так как чем выше частота, тем сильнее излучение.

Применение антенн, излучающих и принимающих электромагнитные волны, является отличительным признаком радиотехники. Немного лет назад таким же отличительным признаком радиотехнических устройств являлось применение высокой частоты. В настоящее время высокая частота широко применяется и в проволочной связи, и в этом смысле резкое различие между проволокой и радио с каждым годом все более стирается.

Остается, однако, различие вот какого рода. В проволочных линиях те же электромагнитные волны, которыми пользуется радио, направляются посредством проводов. Провода образуют границы того канала, по которому движется электромагнитная энергия, и не дают ей расходиться во все стороны.

При радиопередаче же эти волны свободно расходятся вокруг антенны (или в пределах некоторого угла в случае направленных антенн).

Поэтому для того, чтобы достаточное количество энергии достигло приемника, в радиотехнике приходится часто применять огромные мощности, исчисляемые сотнями киловатт.

Применение таких мощностей в проволочных линиях затруднительно и не имеет смысла.

В каждой радиолинии можно различить три отдельные части. Это — передающая станция, приемная станция и разделяющая их местность.

Передающая станция должна иметь некоторый преобразователь (или „генератор“), который получаемый станцией технический ток (или иной вид исходной энергии) превращает в ток высокой частоты. Последний может быть излучен антенной. Далее передающая станция должна иметь устройство, посредством которого ток высокой частоты подвергается тем либо другим изменениям, в результате которых из него формируется сигнал. Это устройство называется „модулятором“. Например, в случае простой телеграфной передачи таким модулятором может явиться телеграфный ключ, прерывающий ток высокой частоты и образующий этим длинные и короткие посылки.

Если мощность высокой частоты непосредственно после сформирования сигнала недостаточна, то на передающей станции производят усиление мощности, и только после этого токи высокой частоты поступают в антенну.

Волны, излученные передающей антенной, распространяются вдоль земной поверхности и в верхних слоях атмосферы, где они испытывают отражения и преломления.

Распространение волн зависит от состояния земной поверхности, ее рельефа и влажности и от состояния верхней атмосферы: степени ее ионизации и распределения этой ионизации по высоте. Поэтому волны, достигшие приемной станции, могут иметь весьма различную интенсивность в зависимости от времени года и суток, от метеорологической и от космической ситуации. Даже при самых благоприятных обстоятельствах количество энергии, достигающей приемной станции, бывает очень ничтожным. Однако, если интенсивность этих сигналов все же больше интенсивности различных помех, образуемых, главным образом, электрическими явлениями в природе, то сигналы могут быть обнаружены и воспроизведены. Это достигается благодаря необычайно чувствительным и точным приборам, которыми располагает современная техника.

Задачами приемной станции является: уловить волны, отделить желаемый сигнал от всех других бесчисленных сигналов и природных помех, усилить принятые колебания, воспроизвести первоначальный переданный сигнал и придать ему необходимую интенсивность.

Таким образом радиолиния представляет собой электрический механизм, в котором происходят чрезвычайно сложные и многообразные превращения электрической энергии и который состоит из множества сложных электрических и электромеханических приборов.

Современная радиотехника не ограничивается только передачей наиболее простых телеграфных сигналов. Односторонний и двусторонний (дуплексный) радиотелефон, передача неподвижных изображений, телевидение, шифрованный телефон, многократная передача и ряд других сложных сигналов, требующих величайшей точности воспроизведения, передаются по современным радиолиниям.

Передача этих сигналов в условиях коммерческой эксплоатации требует правильного расчета радиолинии и безупречной стабильности и точности работы всех ее приборов и механизмов.

Регулировка, управление и обслуживание всех этих сложных, тонких и разнообразных электрических инструментов требует наличия не только производственных навыков, но и ясного понимания тех физических процессов, которые в них происходят, и тех физических законов, на которых они основаны.

Как бы ни были сложны и многообразны радиотехнические устройства, как бы ни были, на первый взгляд, запутаны и сложны происходящие в них процессы, все приборы в конечном итоге являются комбинацией немногих относительно простых элементов, а все явления управляются некоторыми общими физическими законами и принципами.

Изучение этих элементов и их простейших и типичных комбинаций, так же, как и изучение различных физических явлений и процессов, происходящих в радиотехнических устройствах, и составляет предмет настоящего курса.

На протяжении курса читатель встретится не только с новыми понятиями и явлениями, но также и с уже знакомыми ему из общего курса электротехники. Мы, однако, должны будем подойти к этим уже знакомым понятиям и явлениям с несколько другой меркой, чем в случае медленно изменяющегося тока.

Это обусловлено тем, что многие свойства электрических цепей и многие явления, остающиеся незаметными или не играющие никакой роли в технике 50-герцного тока, получают важное значение при высоких частотах и при сложном характере изменения тока и напряжения во времени.

§ 2. Линейные и нелинейные системы и принцип суперпозиции.

Электрические цепи могут быть разделены на две группы. В цепях первой группы, называемых **линейными цепями**, между током и напряжением существует прямая пропорциональность. Говоря иначе, ток и напряжение связаны линейной зависимостью. Например, омическое сопротивление является линейной цепью, так как закон Ома

$$I = \frac{E}{R}$$

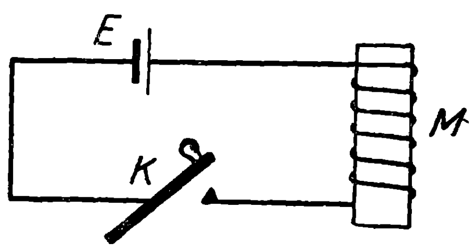
дает линейную зависимость.

Цепь, состоящая из сопротивления, емкости и самоиндукции, является линейной цепью, так как

$$I_m = \frac{E_m}{z},$$

где z (модуль сопротивления цепи) — постоянная, не зависящая от тока, величина.

Цепь, в которой сопротивление изменяется во времени, но не зависит от величины тока или напряжения, также является линейной. Такой является, например, цепь, состоящая из элемента E, электромагнита M и телеграфного ключа K (фиг. 0.1).



Фиг. 0.1.

Размыкая и замыкая ключ мы меняем сопротивление цепи (например, от ∞ до R), но это изменение не зависит ни от тока, ни от напряжения. Цепь, свойства которой не изменяются во времени, называется цепью с постоянными параметрами, в отличие от цепи с переменными параметрами.

Напротив того, если зависимость между током и напряжением не имеет линейного характера, то цепь называется нелинейной. В этом случае параметры цепи, очевидно, зависят от величины тока или напряжения.

В простейшем случае нелинейная зависимость может быть выражена степенным рядом, например:

$$i = a_0 + a_1 e + a_2 e^2 + \dots \qquad (0.1)$$

или

$$e = b_0 + b_1 i + b_2 i^2 + \dots, \qquad (0.2)$$

где a_n и b_n — постоянные величины, или нули, или функции времени, не зависящие от i и e.

Таким рядом может быть выражено, например, сопротивление детектора или кенотрона, которые являются примерами простейших нелинейных цепей.

Электрический звонок, схема которого по существу аналогична фиг. 1, но в котором ток, намагничивая магнит, заставляет якорь ударника разрывать цепь, является в отличие от цепи с ключом — нелинейной цепью. Изменение сопротивления при разрыве контакта производится самим током, и, следовательно, сопротивление цепи зависит (очень сложным образом) от силы тока.

Замечательным свойством линейных цепей является полная независимость действия каждой из эдс от присутствия или отсутствия других эдс.

Поэтому, если на какую-нибудь линейную цепь действовали порознь эдс e_1, e_2, e_3 и т. д. и каждая из них, действуя порознь, создавала (соответственно своему номеру) токи i_1, i_2, i_3 и т. д., то в случае действия всех этих эдс одновременно общий ток будет равняться сумме всех отдельных токов.

Принцип, согласно которому можно действие какого-нибудь физического деятеля рассматривать независимо от присутствия или отсутствия других деятелей этого же рода, называется принципом независимости действия или принципом суперпозиции.

Следовательно, к линейной цепи приложим принцип независимости действия и это является ее основным и характерным отличием от нелинейной цепи, к которой этот принцип ни в коем случае не приложим.

Сказанному можно придать следующую более общую формулировку.

Если свойства какой-нибудь физической системы не изменяются ни прямо, ни косвенно под влиянием какого-нибудь физического деятеля, то данная система является линейной по отношению к этому деятелю и к ней приложим принцип суперпозиции.

Возможность приложения принципа суперпозиции необычайно облегчает всякое физическое исследование. В последующем мы убедимся, насколько исследование линейных цепей оказывается проще и полнее благодаря возможности прилагать этот принцип.

Необходимо подчеркнуть, что, строго говоря, в природе не только не существует, но и принципиально не может существовать действительно вполне точных линейных соотношений. Всякое явление обязательно влияет на всю физическую обстановку, в которой оно происходит. Ток влияет на провод, электрическое поле изменяет свойства диэлектрика, скорость влияет на величину массы и т. д.

Поэтому, когда мы считаем какую-нибудь систему линейной, мы делаем ошибку, и в результате этой ошибки получаем некоторую неточность.

Если эта неточность столь мала, что не может быть обнаружена или не играет никакой роли для наших целей, то мы в праве не обращать на нее внимания. Все наши выкладки и рассуждения вполне оправдаются на практике.

Если эта неточность относительно мала, но уже играет некоторую роль — мы можем ввести в результат дополнительные поправки. Наконец, если нелинейность системы достаточно ясно выражена, мы должны вовсе отказаться от принципа суперпозиции и перейти к другим способам исследования.

В первой части этой книги мы будем рассматривать только такие системы, которые могут рассматриваться как линейные с постоянными параметрами и будем постоянно пользоваться принципом суперпозиции.

§ 3. Синусоидальная функция.

Изменение тока или напряжения во времени может быть дано в виде некоторой математической формулы

$$i = F_1(t)$$

или

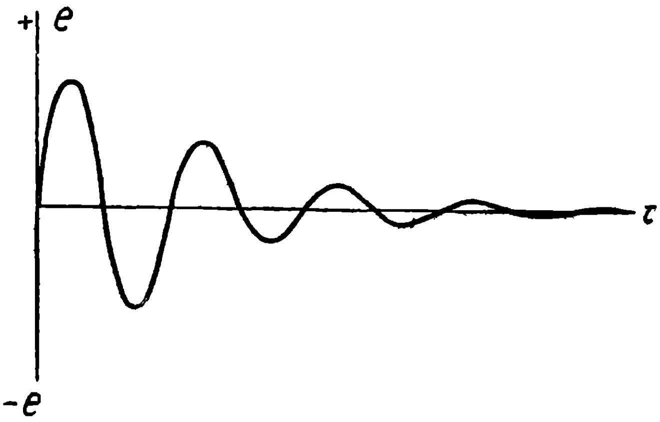
$$e = F_2(t).$$

Оно может быть также дано в виде некоторой кривой, как например, кривая фиг. 0.2.

Чтобы изучить встречающееся в радиотехнике бесчисленное количество всевозможных видов $F(t)$ (или бесчисленное количество форм кривых, выражающих эти функции), все их можно свести к некоторому, относительно небольшому, числу типов, обладающих определенными признаками и свойствами. На протяжении курса мы будем неоднократно отмечать такие характерные типы кривых.

Этот способ представляется во многих случаях очень удобным и важным, так как дает возможность предвидеть характер явлений в электрических цепях, в которых действует данная эдс или данный ток, и оценивать эти явления с их качественной стороны.

Однако гораздо более общим (и притом дающим возможность количественной оценки) является такой способ представления, при котором данная сложная функция рассматривается как сумма или как произведение некоторых более простых функций, действие которых на данную цепь хорошо известно. В случае линейной системы действие данной сложной функции будет равно сумме действий элементарных функций, на которые она разложена.



Фиг. 0.2.

Очевидно, что этот способ получит универсальное значение в том случае, если все возможные виды функций будут приводиться к сумме или к произведению одних и тех же элементарных функций, если эти последние окажутся удобными для математического анализа и, наконец, если действие их на электрические цепи может быть удобно изучено.

В этом смысле практически наиболее удобными оказываются синусоидальные и экспоненциальные функции. Синусоидальные функции (соответствующие гармоническим колебаниям) позволяют выразить всякую функцию, имеющую интерес для радиотехники, в виде ряда или интеграла Фурье. Произведение синусоидальной функции на экспоненциальную дает возможность простейшим образом выразить гармоническое колебание, амплитуда которого постепенно уменьшается со временем вследствие расхода энергии в цепи.

Наконец, в более сложных случаях и, в частности, при изучении явлений в длинной проволочной линии, когда на величину эдс или тока влияет не только координата времени, но и координата пространства, удобно пользоваться гиперболическими функциями.

Все эти три вида функций, как это будет показано ниже, весьма родственны между собой и могут быть приведены к экспоненциальной функции с комплексным показателем, на которой ниже мы поэтому подробно остановимся.

§ 4. Символическое изображение синусоидальной функции комплексным числом.

Если синусоидальная функция записана в виде

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi), \tag{0.3}$$

то математически это означает, что переменный ток i продолжается от $t = -\infty$ до $t = +\infty$, т. е. всегда.

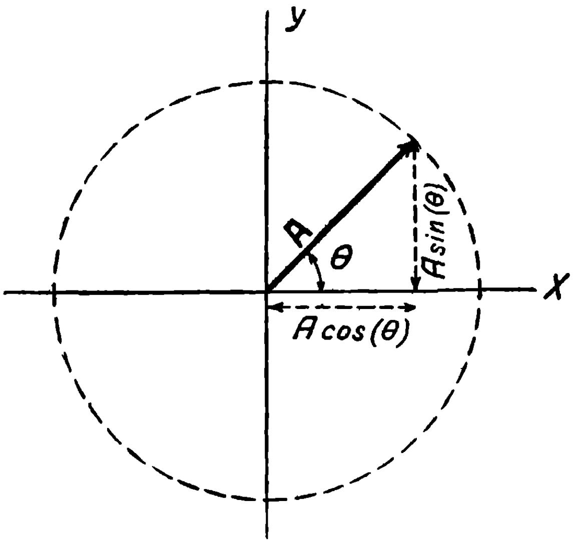
На самом деле всякий переменный ток, наблюдаемый на опыте, продолжается в течение некоторого ограниченного времени и должен быть записан так:

$$\left.\begin{array}{l} i = I_m \sin(\omega t + \varphi) \text{ при } \tau_1 > t < \tau_2 \\ i = 0 \text{ при всех остальных значениях } t \end{array}\right\} \qquad (0.4)$$

Кривая, изображающая ток, длящийся от $t = \tau_1$ до $t = \tau_2$, не есть уже синусоида в математическом смысле, и мы должны называть ее „отрезком синусоиды".

Очевидно, что если бы существовал ток, выражаемый ур-нием (0.3), то для того, чтобы убедиться, что мы имеем дело с действительной синусоидой, а не с отрезком синусоиды, потребовалось бы бесконечное время. Так как время, имеющееся в нашем распоряжении, всегда ограничено, то нельзя путем физического опыта отличить действительную синусоиду от отрезка синусоиды, длящегося дольше, чем время опыта.

Из этого следует, что если отрезок синусоиды длится дольше того времени, в течение которого исследуется действие тока или напряжения на наши приборы, и если за это время все явления приобретут установившийся характер, то математически мы с полным правом можем пользоваться выражением (0.3). В противном случае надо пользоваться выражением (0.4).



Фиг. 0.3.

Для математических операций тригонометрическое выражение (0.4) не всегда оказывается удобным, так как действия с тригонометрическими функциями приводят к громоздким вычислениям. Часто гораздо удобнее пользоваться так называемым символическим методом, сущность которого мы вкратце напомним.

Возьмем в прямоугольной координатной системе (фиг. 0.3) отрезок **A**, который будем считать вектором, т. е. припишем ему, кроме длины A, еще и направление, указанное стрелкой. Пусть это направление составляет угол θ с осью абсцисс.

Будем удерживать начало этого вектора в начале координат, а конец его заставим двигаться по окружности с равномерной угловой скоростью ω.

Тогда

$$\theta = \omega t + \varphi, \qquad (0.5)$$

причем φ зависит от выбора момента начала отсчета времени t.

Положим, что длина вектора численно равна I_m. Тогда проекция вектора на ось абсцисс будет

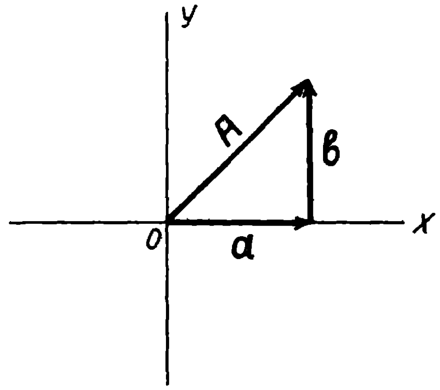
$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi), \qquad (0.6)$$

т. е. будет выражать собой гармоническую функцию.

Обратно: каждой гармонической функции соответствует, следовательно, некоторый вращающийся вектор. Длина этого вектора равна амплитуде, а угол с осью абсцисс — фазе гармонической функции. Следует обратить внимание на то, что гармоническая функция при этом вовсе не отождествляется с вращающимся вектором, а устанавливается лишь соответствие между ними. Это соответствие, однако, таково, что каждой гармонической функции соответствует только один вектор. Это позволяет заменить действия с тригонометрическими величинами действиями с соответствующими им векторами. Вместо того, чтобы складывать, вычитать, делить или перемножать тригонометрические функции, эти действия можно производить с соответствующими им векторами. Результирующий вектор будет соответствовать результирующей тригонометрической функции.

На первый взгляд может показаться, что подобная операция только усложняет дело, так как вводится некоторое новое понятие, которое требует освоения. В действительности это не так. Операции с векторами оказываются значительно проще, если для их изображения применить комплексные числа.

Очевидно, что вектор **A** (фиг. 0.4) может быть представлен как сумма вектора **a** и перпендикулярного ему вектора **b**.



Фиг. 0.4.

Если условиться выражать расстояния от начала координат вдоль оси X-ов действительными числами, то вектор **a** вполне определится одним единственным числом, выражающим его длину. Направлению вправо от начала координат будет соответствовать знак „+“, а влево — знак „—“.

Второй составляющий вектор, изображаемый отрезком **b**, уже не может быть просто определен числом, так как он отличается от первого вектора еще и направлением.

Это изменение направления можно было бы отметить каким-нибудь условным знаком, который позволил бы не спутать вектора одного направления с векторами другого.

В этом случае и второй вектор можно было бы также обозначать числом с указанным значком, причем число и знак опять-таки выражали бы длину вектора и направление его вверх либо вниз.

Можно поступить и иначе. Заметив, что умножение числа, выражающего длину вектора, на (-1) поворачивает направление вектора на 180°, посмотрим, нельзя ли найти такое число, умножение на которое поворачивает вектор на 90°. Обозначим это число буквой j. Так как двойной поворот вектора на 90° создает поворот на 180°, то очевидно, что двойное умножение числа на j должно дать (-1).

Поэтому

$$j^2 = -1$$

или

$$j = \sqrt{-1}\ [1].$$

[1] Совершенно так же, например, повороту на 45° будет соответствовать умножение числа, выражающего длину вектора, на число

$$\sqrt{j} = \sqrt[4]{-1}.$$

Равным образом умножение, например, на число

$$\sqrt[9]{j} = (-1)^{\frac{1}{18}}$$

соответствует повороту на 10°.

Выражение

$$\dot{A} = A_m(-1)^{\frac{\theta}{\pi}} \equiv A_m j^{\frac{2\theta}{\pi}}$$

соответствует вектору длиной A_m, повернутому относительно оси абсцисс на угол θ.

Выражение

$$\dot{A} = A_m(-1)^{\frac{\omega t}{\pi}} \equiv A_m j^{\frac{2\omega t}{\pi}}$$

соответствует вектору, вращающемуся с частотой ω.

В обоих последних случаях вектор выражен уже не комплексным числом, а степенной функцией.

С аналогичным изображением вектора, но в другой форме, мы встретимся дальше.

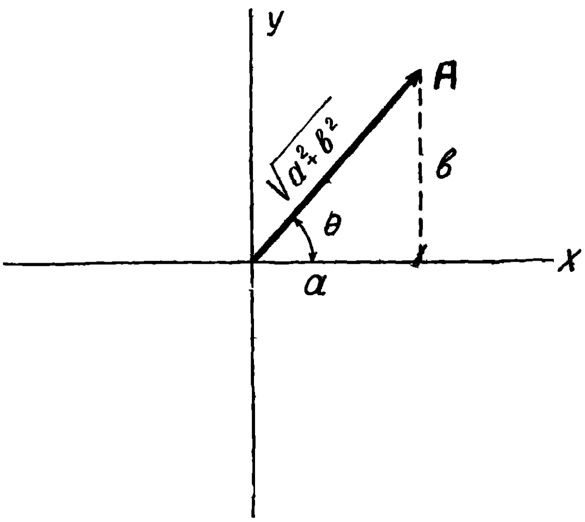
Таким образом комплексное число

$$a+jb$$

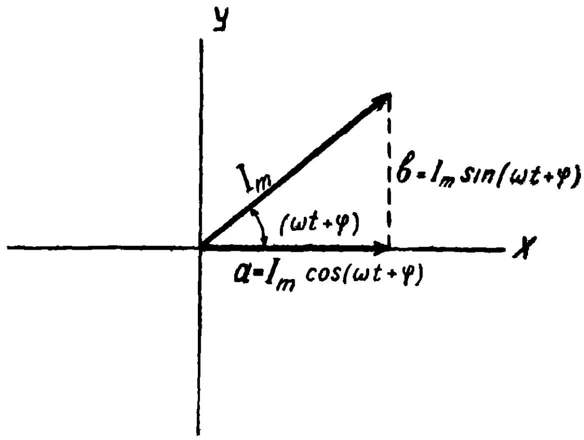
соответствует вектору **A** (фиг. 0.5), являющемуся суммой вектора **a** и перпендикулярного ему вектора **b**. Длина (или амплитуда) вектора равна $\sqrt{a^2+b^2}$, а угол θ определяется дугой, тангенс которой равен $\frac{b}{a}$, т. е.

$$\left.\begin{aligned} A&=\sqrt{a^2+b^2} \\ \theta&=\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \tag{0.8}$$

Здесь опять следует обратить внимание, что вектор A отнюдь не отождествляется с комплексным числом, а между ними устанавливается определенное соответствие, в силу которого каждому вектору соответствует комплексное число, и наоборот.



Фиг. 0.5.



Фиг. 0.6.

Теперь взамен тока или напряжения, выраженных тригонометрической функцией, мы можем написать соответствующее комплексное число и, таким образом, заменить тригонометрические действия алгебраическими

Для перехода от тригонометрических обозначений к комплексным числам заметим следующее соотношение, которое очевидно из фиг. 0 6.

Если ток дан в виде

$$i=I_m\cos(\omega t+\varphi),$$

то комплексное его выражение будет

$$\dot{I}=a+jb,$$

причем (фиг. 0.6)

$$a=I_m\cos(\omega t+\varphi),$$

$$b=I_m\sin(\omega t+\varphi).$$

Поэтому

$$\dot{I}=I_m[\cos(\omega t+\varphi)+j\sin(\omega t+\varphi)]. \tag{0.9}$$

§ 5. Символическое изображение синусоидальных функций при помощи мнимой степени.

Как известно,

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}\ [1]). \tag{0.10}$$

Поэтому взамен выражения

$$i = I_m \cos(\omega t + \varphi) \tag{0.14}$$

мы можем символически писать

$$\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)}\ . \tag{0.15}$$

Выражения (0.14) и (0.15) отнюдь не тождественны, но второе выражение соответствует первому, поскольку косинусоиде соответствует вращающийся вектор, а вращающемуся вектору соответствует комплексное число.

Оперируя с символическим выражением типа (0.15), мы сильно упрощаем все математические операции. В любой момент мы можем вновь вернуться к выражению типа (0.14), но при известной привычке к символическому выражению в этом может и не встретиться надобности, так как результаты зачастую могут быть непосредственно поняты из символического выражения в форме мнимой степени или в форме комплексного числа.

Так как

$$\dot{A} = A_m e^{j\theta} \tag{0.16}$$

соответствует, как уже сказано, вектору **A**, имеющему амплитуду A_m и составляющему с осью абсцисс угол θ, то при

$$A_m = 1$$

и

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

выражение, полученное после подстановки этих величин в ур-ние (0.16), т. е.

$$\dot{A} = e^{j\frac{\pi}{2}}$$

соответствует вектору единичной длины, повернутому на угол 90°.

Поэтому

$$e^{j\frac{\pi}{2}} = j.$$

Также легко сообразить, что

$$e^{j\pi} = -1,$$

$$e^{j2\pi} = 1.$$

---

[1]) Синус и косинус могут быть выражены рядами:

$$\sin\theta = \frac{\theta}{1!} - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \frac{\theta^7}{7!} + \dots \tag{0.11}$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \dots \tag{0.12}$$

Также e^x может быть выражено рядом

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \tag{0.13}$$

Если положить

$$x = j\theta$$

и подставить это в ряд, выражающий значение e^x, то из ур-ний (0.11), (0.12) и (0.13) получим тождество

$$\cos\theta + j\sin\theta = e^{j\theta}.$$

§ 6. Экспоненциальные функции.

Выражение

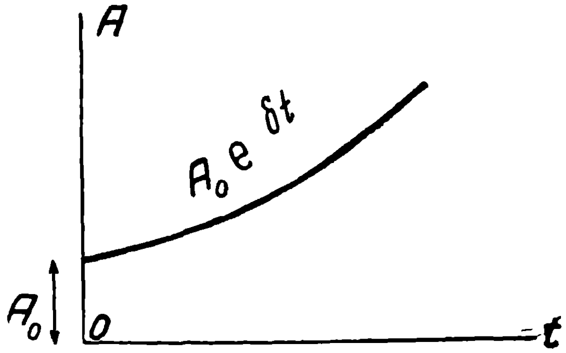
$$A = A_0 e^{\delta t} \tag{0.17}$$

показывает, что величина A непрерывно возрастает от некоторого начального значения A_0, которое получается при $t = 0$ (так как $e^0 = 1$). Кривая, соответствующая ур-нию (0.17), показана на фиг. 0.7 и носит название „возрастающей экспоненты“.

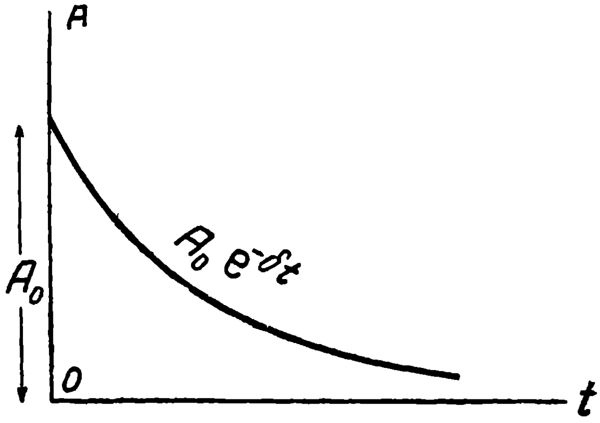
Если A задано в виде функции

$$A = \frac{A_0}{e^{\delta t}} \equiv A_0 e^{-\delta t}, \tag{0.18}$$

то кривая получает вид, показанный на фиг. 0.8, и носит название „падающей“ или „убывающей экспоненты“.



Фиг. 0.7.



Фиг. 0.8.

В обоих случаях закон изменения величины A называется „экспоненциальным законом“.

Прологарифмировав ур-ние (0.17) или (0.18), получим

$$\ln A = \ln A_0 \pm \delta t, \tag{0.19}$$

что можно представить в виде

$$\ln \frac{A}{A_0} = \pm \delta t. \tag{0.20}$$

Ур-ние (0.20) показывает, что экспоненциальный закон отличается тем свойством, что логарифм отношения величины A в момент времени t к ее начальному значению пропорционален промежутку времени t.

Коэфициент δ носит название „коэфициента возрастания“ или „коэфициента затухания“ (в зависимости от того, стоит ли перед произведением δt знак плюс или знак минус).

Экспоненциальный закон соответствует убыванию амплитуды при свободных колебаниях линейных систем. Например, амплитуда колебаний свободного маятника, которые постепенно затухают вследствие трения, убывает по экспоненциальному закону.

По этому же закону затухают и электрические колебания в линейных цепях.

Ток (или напряжение) в этом случае выражается следующим образом

$$i = I_m \sin(\omega t + \varphi)\, e^{-\delta t} \tag{0.21}$$

или символически

$$\dot{I} = I_m e^{j(\omega t + \varphi)} \cdot e^{-\delta t} \equiv I_m e^{j(\omega t + \varphi) - \delta t}. \tag{0.22}$$