А. И. Фетисов

О доказательстве в геометрии

Выпуск 14

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А. И. Фетисов

А11 О доказательстве в геометрии: Выпуск 14 / А. И. Фетисов – М.: Книга по Требованию, 2013. – 59 с.

ISBN 978-5-458-34202-5

Однажды, в самом начале учебного года, мне пришлось услышать разговор двух девочек. Старшая из них перешла в шестой класс, младшая — в пятый. Девочки делились своими впечатлениями об уроках, учителях, подругах, о новых предметах. Шестиклассницу очень удивили уроки геометрии: «Вот чудеса, — говорила она, — пришла учительница в класс, нарисовала на доске два равных треугольника, а потом целый урок доказывала нам, что они— равные. Никак не пойму: зачем это нужно?». — «А как же ты урок будешь отвечать?»— спросила младшая девочка. —«Выучу по учебнику... вот только очень трудно запомнить, где какую букву нужно ставить.,.».В тот же день вечером я слышал, как эта девочка, сидя у окна, усердно учила геометрию: « Для доказательства наложим треугольник A'B'C' на треугольник ABC... наложим треугольник A'B'C' на треугольник ABC..» — неоднократно повторяла она. К сожалению, мне не удалось узнать, насколько успешно училась эта девочка по геометрии, но думается, что учиться ей по этому предмету было довольно трудно.Несколько дней спустя пришел ко мне мой сосед по квартире Толя, тоже шестиклассник» и также с претензиями к геометрии. Им рассказали на уроке и задали на дом выучить теорему о том, что в треугольнике внешний угол больше всякого внутреннего, не смежного с ним. Толя показал мне чертеж из учебника Киселева (черт. 1) и спросил: «Зачем нужно приводить длинное и сложное доказательство, когда на этом чертеже совершенно ясно видно, что внешний угол треугольника — тупой, а не смежные с ним внутренние углы — острые? Но ведь тупой угол всегда больше острого,—убеждал меня Толя,—это же ясно без всякого доказательства». И мне пришлось разъяснить Толе, что предложение это совсем не очевидно и что если полное основание требовать доказательства предложения о внешнем угле треугольника.

ISBN 978-5-458-34202-5

излишне сложными и громоздкими. А бывают и такие случаи, когда, казалось бы, ясное и убедительное доказательство при ближайшем рассмотрении оказывается неверным.

Эта маленькая книжка написана для того, чтобы помочь учащимся разобраться в следующих вопросах:

1) Что такое доказательство?
2) Зачем нужно доказательство?
3) Каким должно быть доказательство?
4) Что можно в геометрии принимать без доказательства?

§ 1. ЧТО ТАКОЕ ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

1. Итак, спросим себя, что же такое доказательство? Представьте себе, что вы пытаетесь убедить своего собеседника в том, что Земля имеет форму шара. Вы говорите ему о расширении горизонта по мере подъема наблюдателя над земной поверхностью, о кругосветных путешествиях, о круглой тени, которую отбрасывает Земля на Луну во время лунного затмения, и т. д.

Каждое из этих высказываний, с помощью которых вы желаете убедить вашего собеседника, называется *аргументом* доказательства, а вся совокупность аргументов называется *аргументацией*. На чем основывается сила или убедительность аргумента? Рассмотрим, например, последний из вышеприведенных аргументов. Мы утверждаем, что Земля должна быть круглой, так как тень ее круглая. Это утверждение мы основываем на том, что люди из личного опыта знают, что все тела, имеющие форму шара, отбрасывают от себя круглую тень, и обратно, круглая форма тени при различных положениях тела получается от тел, имеющих шарообразную форму. Итак, в данном случае мы прежде всего опираемся на факты, на наш непосредственный жизненный опыт, свидетельствующий о свойствах тел окружающего нас материального мира. Дальше же мы прибегаем к умозаключению, которое в данном случае строится примерно в следующем порядке.

«Все тела, отбрасывающие от себя в различных положениях круглую тень, имеют форму шара». «Земля во время лунных затмений, занимая различные положения по отношению к Луне, всегда отбрасывает на нее круглую тень». Вывод: «Следовательно, Земля имеет форму шара».

Приведем пример из физики. В шестидесятых годах прошлого столетия английский физик Максвелл установил, что электромагнитные колебания распространяются в пространстве с такой же скоростью, с какой распространяется свет. Это обстоятельство заставило его сделать предположение (гипотезу), что свет тоже представляет собой электромагнитные колебания. Для того чтобы доказать правильность этого предположения, нужно было установить, что сходство между световыми и электромагнитными волнами не ограничивается только одинаковой скоростью их распространения, нужно было привести достаточно веские аргументы, доказывающие одинаковую природу обоих явлений. Такими аргументами явились результаты опытов, в которых обнаружилось несомненное влияние магнитного и электрического полей на характер лучеиспускания света различными источниками. Был обнаружен и ряд других фактов, которые со всей убедительностью показали, что световые и электромагнитные колебания имеют одну и ту же природу.

Дадим еще арифметический пример. Возьмем какие-нибудь нечетные числа, возведем каждое из них в квадрат и каждый из полученных квадратов уменьшим на единицу. Например:

$$7^2-1=48;\quad 11^2-1=120;\quad 5^2-1=24;$$
$$9^2-1=80;\quad 15^2-1=224$$

и т. д. Рассматривая полученные числа, мы замечаем в них одно общее свойство: оказывается, что каждое из них делится без остатка на 8. Произведя еще несколько проб с другими нечетными числами и придя к такому же результату, мы выскажем гипотезу: «Квадрат всякого нечетного числа, уменьшенный на единицу, дает число, кратное 8».

Так как теперь у нас речь идет о всяком нечетном числе, то для доказательства нам нужно привести аргументы, которые годились бы для любого нечетного числа. Имея это в виду, вспомним, что любое нечетное число имеет вид $2n-1$, где n — какое угодно натуральное число. Квадрат нечетного числа, уменьшенный на единицу, можно записать в виде выражения $(2n-1)^2-1$. Раскрывая скобки, получим: $(2n-1)^2-1=4n^2-4n+1-1=4n^2-4n=$ $=4n(n-1)$.

Полученное выражение при любом натуральном n кратно 8. Действительно, множитель четыре указывает на то, что число $4n(n-1)$ кратно 4. Кроме того, $n-1$ и n — два последовательных натуральных числа, одно из которых обязательно четное; следовательно, наше выражение обязательно содержит еще и множитель 2.

Итак, число $4n(n-1)$ всегда кратно 8, что и требовалось доказать.

На этих примерах мы можем уяснить себе те основные пути, по которым идет познание нами окружающего нас мира, его предметов, явлений и закономерностей. Первый путь заключается в том, что мы на основании большого числа наблюдений и опытов над предметами и явлениями открываем в них общие закономерности. В приведенных нами примерах мы могли видеть, что на основании наблюдений люди установили зависимость между формой тела и его тенью; многочисленные наблюдения и опыты подтвердили электромагнитную природу света; наконец, испытания, которые мы произвели над квадратами нечетных чисел, помогли установить свойство таких квадратов, уменьшенных на единицу. Этот путь — получение общих выводов из рассмотрения многочисленных частных случаев — называется *индукцией* (от латинского слова inductio — «наведение», — частные случаи наводят нас на мысль о существовании общих закономерностей.

Другим путем мы идем, когда, уже зная некоторые общие законы, прилагаем эти знания к частным случаям. Этот путь называется *дедукцией* (от латинского слова deductio — «выведение»). Так, в последнем примере мы применили общие законы арифметики к частному случаю — к доказательству существования некоторого свойства всякого нечетного числа.

Этот пример показывает нам, что индукцию и дедукцию нельзя отрывать друг от друга. Единство индукции и дедукции — характерная черта научного мышления.

Нетрудно заметить, что в процессе всякого доказательства мы пользуемся этими двумя путями. Когда мы ищем аргументы для доказательства того или иного предложения, мы обращаемся к опыту, наблюдениям, фактам или к уже доказанным, достоверным предложениям. На основе полученных данных мы умозаключаем об истинности или ложности доказываемого предложения.

2. Вернемся, однако, к геометрии. В геометрии изучаются пространственные свойства материального мира. «Пространственными» мы называем такие свойства, которыми определяются форма, величина и взаимное положение предметов. Понятно, что необходимость знания таких свойств связана с практическими потребностями людей: людям нужно измерять длины, площади и объемы, для того чтобы конструировать машины, строить здания, проводить дороги, каналы и т. д. Естественно, что первоначальные геометрические знания были получены индуктивным путем из очень большого числа наблюдений и опытов. Однако по мере накопления геометрических истин обнаружилось, что многие из них могут быть получены из других истин при помощи умозаключений, т. е. дедукции, не прибегая к специальному опыту.

Так, например, многократные наблюдения и опыт убеждают нас в том, что «через две точки можно провести одну и только одну прямую линию». А на основании этой истины мы можем уже без всякого опыта утверждать, что «две различные прямые могут иметь не более одной общей точки». Эта новая истина получается путем весьма простого рассуждения. Действительно, если мы допустим, что две различные прямые могут иметь две общие точки, то отсюда мы должны будем сделать вывод, что через две точки могут проходить две различные прямые, что противоречит ранее установленной истине.

Практическая деятельность людей привела к открытию очень большого числа геометрических истин, отражающих наши знания о пространственных формах материального мира. Внимательное изучение этих истин показало, что одни из них можно получить путем логических выводов из других. Это привело к мысли выделить из всех геометрических истин часть наиболее простых и общих, которые можно принять без доказательства, а остальные геометрические свойства и зависимости выводить дедуктивным путем из этих основных истин.

Такая мысль возникла еще у геометров древней Греции, которые стали приводить в систему известные им геометрические истины, выводя их из сравнительно небольшого числа основных предложений. За 300 лет до нашей эры греческий геометр Евклид Александрийский дал наиболее совершенное для своего времени изложение системы геометрии. В этом изложении были выделены предложения, принимаемые без доказательства, — так называемые *аксиомы* (греческое слово ἄξιος означает «достойный», заслуживающий доверия). Остальные предложения, истинность которых обнаруживается при помощи доказательства, стали называть *теоремами* (от греческого слова θεορεο — обдумываю, размышляю).

Система геометрии Евклида просуществовала в течение многих столетий, и даже в наше время в современной школе изложение геометрии во многих разделах отражает на себе влияние Евклида. Таким образом, в системе геометрии мы имеем сравнительно небольшое число основных истин — аксиом, полученных путем индукции и принимаемых без доказательства, остальные же истины геометрии выводятся из аксиом при помощи дедуктивных умозаключений. Поэтому геометрия является в основном дедуктивной наукой.

В настоящее время работа многих геометров направлена к тому, чтобы выявить все аксиомы, необходимые для построения системы геометрии, и по возможности сократить их число. Работа в этом направлении была начата еще в прошлом столетии, и хотя уже очень много сделано, но все же эту работу нельзя считать вполне законченной и в настоящее время.

Итак, подводя итог всему изложению этого раздела, мы можем теперь ответить на вопрос: что же такое доказательство в геометрии? Как мы видели, доказательство представляет собой систему умозаключений, при помощи которых истинность доказываемого предложения выводится из аксиом и ранее доказанных истин.

Остается ответить еще на один вопрос: чем гарантируется истинность предложений, полученных при помощи дедуктивного умозаключения? Истинность дедуктивного вывода обусловлена тем, что в нем мы прилагаем некоторые общие законы к частным случаям, так как совершенно очевидно, что все то, что справедливо вообще и всегда, будет справедливо и для каждого отдельного случая.

Если я, например, говорю, что сумма углов всякого треугольника равна 180°, что фигура ABC — треугольная, то не может быть никакого сомнения в том, что $\angle A + \angle B + \angle C = 180°$. При внимательном изучении геометрии нетрудно убедиться в том, что именно так мы и рассуждаем при каждом умозаключении.

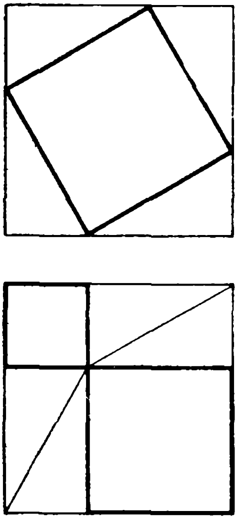
§ 2. ЗАЧЕМ НУЖНО ДОКАЗАТЕЛЬСТВО?

1. Постараемся теперь ответить на второй вопрос: «Зачем нужно доказательство?».

Необходимость доказательства есть следствие одного из основных законов логики (логика — наука о законах правильного мышления) — *закона достаточного основания.* Этот закон заключает в себе требование, чтобы всякое высказываемое нами утверждение было обосновано, т. е. чтобы оно сопровождалось достаточно сильными аргументами, подтверждающими истинность нашего утверждения, согласованность его с фактами, с действительностью. Такими аргументами могут быть как указание на возможность проверки путем наблюдения и опыта, так и правильно построенное рассуждение, содержащее систему умозаключений.

В математике мы имеем дело главным образом с аргументацией последнего вида.

Доказательство геометрического предложения имеет своей целью установление его достоверности при помощи логического вывода из уже доказанных или известных истин.



Черт. 2.

Однако при этом все же возникает вопрос: стоит ли иметь дело с доказательством, когда доказываемое предложение и без того достаточно ясно и очевидно?

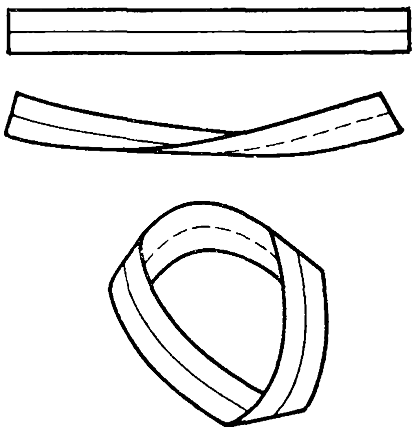
Примерно на такой точке зрения стояли индийские математики в эпоху средневековья. Многие геометрические предложения они не доказывали, а делали к ним достаточно выразительный чертеж и писали над ним одно слово «смотри!». Так, например, в книге «Лилавати» индийского математика Бхаскара Ачарья теорема Пифагора выглядит так (черт. 2). Из этих двух чертежей читатель должен «усмотреть», что сумма площадей квадратов, построенных на катетах прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, построенного на гипотенузе.

Можно ли сказать, что в данном случае отсутствует доказательство? Конечно, нет! Если бы читатель стал просто смотреть на чертеж, не рассуждая, то едва ли он мог прийти к какому-нибудь выводу. На самом же деле автор предполагает, что читатель не только смотрит, но и думает. Читатель должен понять, что перед ним начерчены равные квадраты, которые имеют и равные площади. Первый квадрат состоит из четырех равных прямоугольных треугольников и квадрата, построенного на гипотенузе, а второй квадрат состоит из четырех таких же прямоугольных треугольников и двух квадратов, построенных на катетах. Остается только сообразить, что если от равных величин (площади двух больших равных квадратов) отнять поровну (площади четырех прямоугольных треугольников), то у нас останутся равные площади: в первом случае — квадрат, построенный на гипотенузе, во втором случае — два квадрата, построенных на катетах. Как видим, здесь совершенно недостаточно опираться только на очевидность, а нужно думать и рассуждать.

Но, может быть, все же существуют такие теоремы в геометрии, которые действительно настолько очевидны, что можно обойтись без всяких рассуждений?

Здесь нужно прежде всего указать на то, что систематически опираться на очевидность в точной науке нельзя, так как понятие «очевидно» — крайне расплывчатое и неустойчивое: то, что одному кажется совершенно очевидным, другому может показаться весьма сомнительным. Стоит только вспомнить, как различно описывают какое-нибудь событие свидетели его и как иногда бывает трудно установить истину по так называемым «показаниям очевидцев».

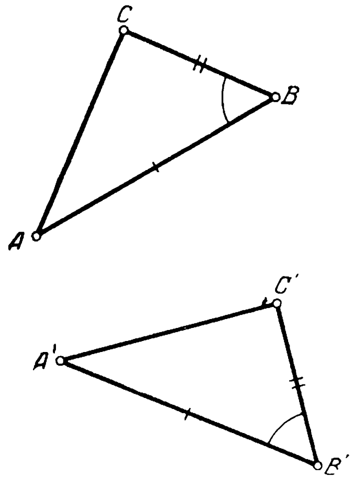
Можно привести интересный геометрический пример того, как нас может обмануть кажущаяся очевидность. Пример этот заключается в следующем: я беру лист бумаги и рисую на нем непрерывную замкнутую линию; потом я беру ножницы и произвожу разрез по этой линии. Спрашивается: что будет с листом бумаги после того, как концы разреза сомкнутся? Наверное большинство из вас, не задумываясь, ответит: лист бумаги распадется на два отдельных куска. Однако этот ответ *может оказаться неверным*. Проделаем такой опыт: возьмем бумажную ленту и склеим из нее кольцо, перевернув предварительно один из концов ленты. В результате мы получим так называемый *«лист Мёбиуса»* (черт. 3). (Мёбиус — немецкий математик, изучавший поверхности такого вида.) Если теперь разрезать этот лист по замкнутой линии вдоль ленты, проводя разрез приблизительно на равных расстояниях от ее краев, то лист *не распадется* на две отдельные части — в наших руках останется попрежнему *один* лист. Факты, подобные только что описанному, заставляют призадуматься



Черт. 3.

над тем, насколько мы можем доверяться соображениям, основанным на «очевидности».

2. Разберемся повнимательнее в этом вопросе. Возьмем в качестве первого примера рассказанный выше случай с шестиклассницей. Девочке показалось странным, что учительница нарисовала два равных треугольника и потом доказывала как будто очевидный факт, что они равны. Дело тут, конечно, обстояло совсем иначе: у ч и т е л ь н и ц а в о в с е н е ч е р т и л а р а в н ы х т р е у г о л ь н и к о в, а начертив треугольник ABC (черт. 4), она сказала, что другой треугольник $A'B'C'$ построен так, что $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle B = \angle B'$, и что мы не знаем, будут ли равны $\angle A'$ и $\angle A$, $\angle C'$ и $\angle C$ и стороны $A'C'$ и AC (ведь углов A' и C' она не строила по углам A и C и сторону $A'C'$ она не делала равной стороне AC).

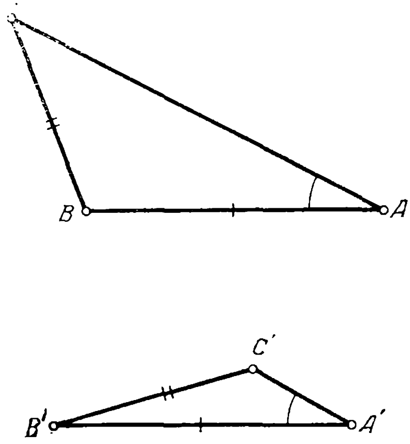


Черт. 4.

Таким образом, в этом случае мы должны из условий $A'B' = AB$; $B'C' = BC$ и $\angle B' = \angle B$ в ы в е с т и равенство треугольников, т. е. равенство всех остальных их элементов, что, конечно, требует некоторых рассуждений, т. е. доказательства. Легко также показать, что равенство треугольников, получаемое на основании равенства трех пар их соответствующих элементов, далеко не так «очевидно», как это может показаться с первого взгляда. Изменим несколько условие первой теоремы о равенстве треугольников: пусть две стороны одного треугольника соответственно равны двум сторонам другого, а также равны и углы, но не заключенные между этими сторонами, а лежащие против одной из равных сторон, например BC и $B'C'$. Запишем это условие в $\triangle ABC$ и $\triangle A'B'C'$ $A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle A' = \angle A$. Что мы можем сказать про такие треугольники? По аналогии с первым случаем равенства треугольников мы могли бы ожидать, что и теперь треугольники будут равны, но черт. 5 с полной очевидностью убеждает нас, что начерченные здесь треугольники ABC и $A'B'C'$ хотя и удовлетворяют условиям

$A'B' = AB$, $B'C' = BC$ и $\angle A' = \angle A$, но совсем не являются равными.

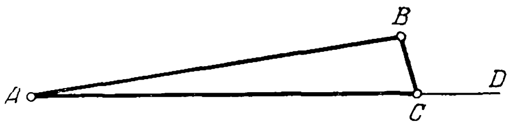
Примеры подобного рода заставляют нас быть очень осторожными в наших суждениях и достаточно ясно показывают, что только правильно построенное доказательство может нам гарантировать истинность устанавливаемых предложений.



Черт. 5.

3. Рассмотрим теперь вторую теорему — о внешнем угле треугольника, вызвавшую недоумение у моего соседа Толи. Действительно, на том чертеже, который дан в стабильном учебнике, внешний угол тупой, а несмежные с ним внутренние углы острые, что легко оценить без всякого измерения, на глаз. Но следует ли отсюда, что теорема не нуждается в доказательстве? Безусловно, нет. Ведь в теореме речь идет не только о том треугольнике, что начерчен в книге, или на бумаге, или на доске, а о в с я к о м треугольнике, вид которого может быть очень непохожим на треугольник, данный в учебнике.

Представим, например, себе, что точка A удаляется по прямой от точки C. Мы тогда получим треугольник ABC



Черт. 6.

такого вида (черт. 6), что угол при точке B будет тоже тупой. Если же точка A удалится от точки C примерно метров на 10, то в таком длинном треугольнике наш школьный транспортир уже не сможет обнаружить разницы между внутренним углом B и внешним. Ну, а если точка A удалится от точки C на расстояние, равное расстоянию от Земли до Солнца, то можно с полной уверенностью сказать, что никакой из самых точных современных угломерных инструментов не сумеет обнаружить разницы между этими углами. Отсюда становится ясным, что и для этой теоремы говорить об «очевидности» не приходится. Строгое же доказательство, даваемое этой теореме, не зависит от случайного вида треугольника, данного на чертеже, и показывает, что теорема о внешнем угле справедлива для каких угодно треугольников и никак не связана с относительной длиной их сторон. Поэтому даже в тех случаях, когда разница между внутренним и внешним углом настолько мала, что ускользает от наших измерительных инструментов, мы все же сохраняем уверенность в том, что эта разница есть. Ведь мы доказали, что всегда, во всех случаях, внешний угол треугольника больше каждого внутреннего, несмежного с ним.

В связи с этим примером нужно обратить внимание на роль чертежа при доказательстве геометрической теоремы. Нужно хорошо помнить, что чертеж есть только вспомогательное средство при доказательстве теоремы, что он есть только пример, только частный случай целого класса геометрических фигур, по отношению к которому доказывается данная теорема. Поэтому очень важно уметь отделить на данном чертеже общие и постоянные свойства фигуры от частных и случайных. Например, на чертеже к теореме о внешнем угле треугольника, приведенном в стабильном учебнике, оказывается случайным тот факт, что внешний угол является тупым, а внутренние — острыми. Очевидно, что опираться на такие случайные факты при доказательстве свойства, общего для всех треугольников, нельзя.

Существенной особенностью геометрического доказательства, в значительной степени определяющей его необходимость, является то, что при помощи доказательства устанавливаются общие свойства пространственных фигур. Если доказательство проведено правильно и опиралось на правильные исходные положения, то это дает нам безусловную уверенность в истинности доказываемого положения. Именно поэтому мы убеждены, что любая геометрическая теорема, например теорема Пифагора, справедлива для треугольников любых размеров с длиной сторон и в несколько миллиметров и в миллионы километров.

4. Наконец, есть еще одна, чрезвычайно важная причина, обусловливающая необходимость доказательства. Дело в том, что геометрия представляет собой не случайный набор истин,