

А.М. Гинзбург

Симметрия на шаре. Часть 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
А11

А11 **А.М. Гинзбург**
Симметрия на шаре. Часть 2 / А.М. Гинзбург – М.: Книга по Требованию, 2021. – 168 с.

ISBN 978-5-458-56860-9

ISBN 978-5-458-56860-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2021
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2021

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{n} + \frac{1}{p} = 1 + \frac{1}{r}$$

— основное уравнение симметрии на сфере. Все целые решения этого уравнения дают случаи $\frac{1}{1}$ целой симметрии на шаре в виде сети из больших кругов. m, n, p и r — целые числа. Так как на одном полушарии должно быть не меньше четырех треугольников, то наименьшее значение для m, n, p и r есть 2. Основное уравнение имеет следующие четыре решения в целых числах:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{K} = 1 + \frac{1}{K} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1 + \frac{1}{6} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{12} \quad (3)$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} = 1 + \frac{1}{30} \quad (4)$$

Подстановка значений m, n, p и r в полученные решения дает все случаи деления сферы кругами на треугольники. Они описаны в следующей таблице:

№ уравнения	m	Угол $\frac{\pi}{m}$	n	Угол $\frac{\pi}{n}$	p	Угол $\frac{\pi}{p}$	r	Число $4r$ треуголь- ников	№ ри- сунка
(1)	2	90°	2	90°	K	$\frac{\pi}{K}$	K	4 K	117
(2)	2	90°	3	60°	3	60°	6	24	118
(3)	2	90°	3	60°	4	45°	12	48	119
(4)	2	90°	3	60°	5	36°	30	120	120

Итак, на сфере могут быть такие случаи $\frac{1}{1}$ целой симметрии:

№ схемы	Описание схемы	№ рисунка
1	один шар	—
2	два полушара	114
3	2 K или 2K + 1 двуугольник . .	115
4	4 K или 4K + 2 треугольника . .	117
5	24 треугольника	118
6	48 треугольников	119
7	120 треугольников	120

2. СХЕМЫ ДРОБНОЙ СИМЕТРИИ

В части I было показано, что из трех элементов — A , B и C — возможны всего четыре группы:

1. $A \not\parallel B \not\parallel C$ 2. $AB \not\parallel C$ 3. $AB \not\parallel AC$ 4. ABC

Из четырех треугольных линейных схем на шаре две — 4-я и 5-я — состоят из равнобедренных треугольников, а две — 6-я и 7-я — состоят из разносторонних треугольников. В равнобедренных треугольниках, в которых: A — отличная сторона, а B_1 и B_2 — одинаковые стороны — возможны такие варианты групп:

1. $A \not\parallel B_1 \not\parallel B_2$ 3. $AB_1 \not\parallel AB_2$
 2-а. $AB_1 \not\parallel B_2$ 4. $AB_1 B_2$
 2-б. $B_1 B_2 \not\parallel A$

В разносторонних треугольниках возможны следующие варианты групп:

1. $A \not\parallel B \not\parallel C$ 2-с. $BC \not\parallel A$
 2-а. $AB \not\parallel C$ 3. $AB \not\parallel AC$
 2-б. $AC \not\parallel B$ 4. ABC .

Группа вида ABC не всегда возможна. Операция ABC складывается из таких построений: правое изображение поворачивается на угол $2a$ вокруг точки BC и, отражаясь в A , дает левое изображение. Повторение той же операции соответствует повороту первоначального изображения вокруг точки BC на $4a$. Следовательно, все углы a , b и c должны быть целыми долями прямого угла, в противном случае группа ABC совпадет с одной из предыдущих групп. Но в схеме 4-й угол $\frac{\pi}{2k+1}$ не есть доля прямого; в схеме 5-й угол 60° не есть доля прямого; в схеме 6-й угол 60° не есть доля прямого; в схеме 7-й углы 60° и 36° не суть доли прямого. Поэтому группа ABC в схемах 5-й, 6-й и 7-й невозможна вообще, а в схеме 4-й невозможна, если число кругов — меридианов нечетное.

Группа вида $A \not\parallel BC$ также не всегда возможна. Угол между двумя линиями A , пересекающимися в вершинах AB , равен двойному углу AB . Фигура 1 правая, отражаясь в линии A_1 , дает фигуру 2 левую. Пара фигур 1—2, отражаясь в линии A_2 , дает пару фигур 3—4, сопряженную с линией A_3 . Пара 3—4 повернута вокруг AB по отношению к паре 1—2 на учетверенный угол AB . Точно также другая пара фигур 5—6 образуется поворотом пары 1—2 на учетверенный угол AC вокруг вершины AC . Пара фигур 7—8 образуется поворотом пары 1—2 вокруг центра BC на удвоенный угол BC . Итак, углы AB и AC долж-

ны быть целой долей прямого угла, а угол BC может быть целой долей π . Следовательно, группа $A \not\parallel BC$ невозможна только в схеме 7-й, так как во всех остальных треугольных схемах два угла в треугольнике суть доли прямого угла.

Итак, могут существовать такие дробные схемы симметрии: Схемы 1 и 2 — дробной симметрии не дают.

Схема 3 из двуугольников (рис. 115) A, B дает схему $1/2$ симметрии AB (рис. 121).

В схеме 4-й — из треугольников с углами $\frac{\pi}{k}$ 90° и 90° возможны, кроме основной схемы $1/1$ целой симметрии $A \not\parallel B_1 \not\parallel B_2$ (рис. 117), еще такие варианты:

2-а. $AB_1 \not\parallel B_2$. Схема $1/2$ половинной симметрии (рис. 122) (но только для случая угла $\frac{\pi}{k}$).

2-б. $B_1 B_2 \not\parallel A$. Схема $1/2$ половинной симметрии.

3. $AB_1 \not\parallel AB_2$. Схема $1/2$ половинной симметрии (рис. 124).

4. $AB_1 B_2$. Схема $1/4$ четвертной симметрии (рис. 125) только в случае угла $\frac{\pi}{k}$.

В схеме 5-й — из треугольников с углами 90° , 60° , 60° невозможны варианты:

2-а. $AB_1 \not\parallel B_2$.

2-б. $B_1 B_2 \not\parallel A$.

4. $AB_1 B_2$, так как прямой угол не делится целое число раз на угол в 60° .

Кроме основной схемы — $A \not\parallel B_1 \not\parallel B_2$ — $1/1$ целой симметрии (рис. 118) возможен еще вариант.

3. $AB_1 \not\parallel AB_2$ — схема $1/2$ половинной симметрии (рис. 126).

В схеме 6-й — из треугольников с углами 90° , 60° , 45° — невозможны варианты:

2-а. $AB \not\parallel C$, 2-с. $BC \not\parallel A$, 4. ABC , так как угол $B = 60^\circ$ не равняется целой доле прямого угла. Кроме основной схемы — $A \not\parallel B \not\parallel C$ — $1/1$ целой симметрии (рис. 119) возможны еще такие две схемы $1/2$ половинной симметрии:

2-б. $AC \not\parallel B$ (рис. 127).

3. $AB \not\parallel AC$ (рис. 128).

В схеме 7-й из треугольников с углами в 90° , 60° , 36° невозможны варианты:

2-а. $AB \not\parallel C$, 2-б. $AC \not\parallel B$, 2-с. $BC \not\parallel A$.

4. ABC , так как прямой угол не делится ни на угол $B = 60^\circ$, ни на угол $C = 36^\circ$.

Кроме основной схемы $A \not\parallel B \not\parallel C$ — $1/1$ целой симметрии возможен еще вариант.

3. $AB \nparallel AC$ — схема $\frac{1}{2}$ половинной симметрии (рис. 129).

Итак, на шаре возможны всего 16 схем симметрии, как показано в следующей таблице. В ней круги отражения обозначены буквой L , оси вращения буквой A , отсутствие операции буквой — O . В клетках таблицы помещены номера рисунков, соответствующих схемам. Единственная схема, не имеющая никакой операции, за отсутствием рисунка обозначена *).

Таблица шаровых схем

Основная фигура	Углы фигур	Род отражения и порядок симметрии					Итого
		$O - 0$	$L - \frac{1}{1}$	L и $A - \frac{1}{2}$	$A - \frac{1}{2}$	$LA - \frac{1}{4}$	
Нет . . .	—	*	—	—	—	—	1
Полушар .	π	—	114	—	—	—	1
Двуугольник	$\frac{\pi}{m}$	—	115	—	121	—	2
Треугольник	$\frac{\pi}{n}, 90^\circ$	—	117	122 123	124	125	5
	$\frac{\pi}{n}, 90^\circ$	—	117	123	124	125	5
	$90^\circ, 60^\circ$ 60°	—	118	—	126	—	2
	$90^\circ, 60^\circ$ 45°	—	119	127	128	—	3
	$90^\circ, 60^\circ$ 36°	—	120	—	129	—	2
Итого . .		1	6	3	5	1	16

3. ОСИ СИМЕТРИИ

Все большие круги на шаре пересекаются по диаметрам, которые суть оси отражения или оси вращения для фигур схемы. В схемах встречаются такие оси (см. табл. на стр. 9).

Оси симметрии в треугольных схемах представляют комплексы, в которых сгруппированы оси двух или трех видов. В дальнейшем комплексы осей будут называться так:

№ рисунка	Название комплекса
117	пирамида́льный или призматический
118	тетраэдрический
119	кубический или октаэдрический
120	додекаэдрический или икосаэдрический

Таблица осей симметрии

№ ри- сунка	О с и				Примечание. Оси взаимно перпендикулярные образуют одну группу		
	отражения		вращения		порядок осей	число в группе	число групп
	порядок	число	порядок	число			
115	m	1	—	—	—	—	—
117	$2m+1$	1	—	—	—	—	—
	2	$2m+1$	—	—	—	—	—
117	$2m$	1	—	—	—	—	—
	2	m	—	—	—	—	—
	2	m	—	—	2	2	m
118	3	2	—	—	2	3	1
	3	2	—	—			
	2	3	—	—			
119	4	3	—	—	4	3	1
	3	4					
	2	6					
120	5	6	—	—	2	3	5
	3	10					
	2	15					
121	—	—	$2m$	1	m	Четное	
122	m	1	2	$m:2$			
			2	$m:2$			
123	—	—	m	1	—	—	
124	—	—	m	1			
			2	m			
			2	m			
125	—	—	$2m$	1	2	3	1
126	—	—	3	4			
			2	3			
127	2	3	3	4	2	3	1
128	—	—	4	3	4	3	1
			3	4			
			2	6			
129	—	—	5	6	2	3	5
			3	10			
			2	15			

Произведение из числа осей одного вида на их порядок постоянно и составляет:

в пирамидальном комплексе	$m \times 1 = m \times 1 = 2 \times \frac{m}{2} = m,$
в тетраэдрическом „	$3 \times 2 = 3 \times 2 = 2 \times 3 = 6$
в кубическом „	$3 \times 4 = 2 \times 6 = 4 \times 3 = 12$
в додекаэдрическом „	$5 \times 6 = 3 \times 10 = 2 \times 15 = 30$

Это очевидно, так как произведение из числа вершин осей на их порядок равно числу углов каждого вида в сети, а указанные числа для всех углов основного треугольника сети равны.

4. КОМПЛЕКСНЫЙ ОПЕРАТОР

В дальнейшем придется часто пользоваться теоремой Эйлера о повороте комплекса осей симметрии. Пусть оси комплекса суть M , N и P . Можно вокруг любой оси повернуть комплекс на такой угол, что комплекс совпадет сам с собою. Повороты осуществляются в следующем порядке:

Номер операции вращения	Центр вращения — вершина	Вершина переходит в вершину	
1	M_1	N_1 P_1	N_2 P_2
2	N_2	P_2 M_1	P_3 M_2
3	O	P_1 M_1	P_3 M_2

Первый поворот: вокруг оси M_1 ,
при этом оси N_1 и P_1
переходят на место осей . . . N_2 и P_2 .

Второй поворот: вокруг оси N_2 ,
при этом оси P_2 и M_1
переходят на место осей . . . P_3 и M_2 .

Если соединить большими дугами вершины M_1 и P_3 , M_2 и P_2 , то вращением вокруг O — точки пересечения дуг $M_1 P_3$ и $M_2 P_2$ — можно перевести P_1 в P_3 и M_1 в M_2 . Следовательно, одно вращение O дает тот же результат, как последовательность двух вращений M_1 и N_2 . Но в таком случае O есть также одна из осей комплекса.

Итак, последовательное вращение комплекса вокруг двух его осей эквивалентно вращению вокруг третьей оси того же комплекса.

Отсюда следует, что какую бы то ни было совокупность вращений вокруг осей данного комплекса всегда можно свести к одному единственному вращению вокруг одной оси того же комплекса, постепенно снижая число вращений на единицу. Следовательно, комплекс осей симметрии является геометрическим оператором, дающим совпадающее само с собою расположение фигур на шаре. При этом одна заданная фигура превращается в $2Mt$ фигур, так как это есть число треугольников на шаре, а каждый треугольник дает одну фигуру. В частных случаях дробной симметрии число фигур может уменьшиться. Понятно, что все фигуры, полученные при помощи данного оператора, эквивалентны и неразличимы между собою никакими геометрическими признаками.

5. СИСТЕМЫ БОЛЬШИХ КРУГОВ

Если взять на шаре произвольный круг, то, отражаясь в комплексе осей симметрии, он образует сеть из кругов. Число этих кругов равняется произведению из числа осей на их порядок, т. е.:

в призматическом комплексе	— $2m$,
в тетраэдрическом	— 6
в кубическом	— 12
в додекаэдрическом	— 30.

Но если круги проходят через вершины осей симметрии, то число кругов может снизиться.

Комбинация тех вершин, через которые должны проходить искомые круги, задается. Число вершин одного рода в заданной комбинации обозначается через a . Число вершин того же рода на всем шаре обозначается через m . Число искомых кругов, проходящих через две противоположные вершины данного рода, обозначается через b . Тогда полное число искомых кругов равно

$$\frac{b \cdot m}{a}.$$

В схемах тетраэдрической, кубической и додекаэдрической возможны такие двуугольники, состоящие из основных треугольников сети (см. табл. на стр. 12).

В тетраэдрической схеме вершины C лежат на трех взаимно перпендикулярных кругах (рис. 130—132). На каждом круге расположены $a=4$ вершины. Всего вершин $m=6$, и через каждую вершину проходят $b=2$ круга. Число кругов $3 = \frac{2 \cdot 6}{4}$.

Прочие круги, кроме упомянутых, дают сеть из $6 \cdot 2 = 12$ кругов.

Название схемы	Угол двууголь- ника	Число тре- угольников сети в дву- угольнике	№ рисунка
Тетраэдриче- ская	90°	6	130 — 132
	60°	4	
Кубическая . .	90°	12	133 — 135
	60°	8	
	45°	6	
Додекаэдриче- ская	90°	30	136 — 138
	60°	20	
	36°	12	

Таким образом в тетраэдрической схеме возможны только такие системы кругов:

- 6 кругов основной сетки схемы ABC ,
- 3 круга дополнительной сетки CC ,
- 12 кругов произвольной сетки.

В кубической схеме основная сеть проходит через вершины BC и через вершины AB (рис. 133 — 135). Круги BC пересекаются по 3 в вершинах C , на каждом круге 4 вершины C , а всего вершин C — 8. Кругов $BC = \frac{8 \cdot 3}{4} = 6$.

Круги AB пересекаются по 2 в точках B , на каждом круге 4 точки B , а всего точек B — 6. Число кругов $AB = \frac{6 \cdot 2}{4} = 3$.

Это те же самые круги, как в предыдущей схеме круги CC . Круги AA пересекаются по 2 в точках A , на каждом круге 6 точек A , а всего точек A — 12. Число кругов $AA = \frac{12 \cdot 2}{6} = 4$.

Через точку C проходят 3 круга, точек C — 8, на круге лежат по 2 точки C , кругов всего $\frac{8 \cdot 3}{2} = 12$, т. е. столько, сколько их

будет в общем случае. В кубической схеме возможны только такие системы кругов:

- 3 круга основной сетки AB ,
- 6 кругов основной сетки BC ,
- 4 круга производной сетки AA ,
- 12 кругов производной сетки.

В додекаэдрической схеме основная сеть проходит через вершины пятерных осей A , тройных осей B и двойных осей C (рис. 136 — 138). Она состоит из 15 кругов. На одном круге 4 вершины пятого порядка, всего вершин 12, через каждую проходят 5 кругов. Следовательно кругов в сети $\frac{5 \cdot 12}{4} = 15$.

Число кругов, проходящих через точку C , равно двум. На каждом из них расположены две вершины C , а всех вершин $C—30$. Следовательно, число кругов AC равно $\frac{30 \cdot 2}{2} = 30$, т. е.

такое же, как в произвольной сети.

Круг $C—C$ проходит через 10 точек C , и через каждую точку C проходят два круга $C—C$, точек $C—30$, всего кругов

$C—C \frac{30 \cdot 2}{10} = 6$. Круг $C—C$ проходит через 6 точек C , через каждую точку C проходят два круга $C—C$, всего кругов $C—C \frac{30 \cdot 2}{6} = 10$.

Всего в додекаэдрической схеме возможны такие случаи сетей:

- 15 кругов ABC —основная сеть,
- 6 кругов CC —производная сеть— CC ,
- 10 кругов CC —производная сеть— CC ,
- 30 кругов произвольной сети.

Итак, на шаре могут быть такие системы кругов:

- В призматической схеме—экватор и меридианы.
- В тетраэдрической схеме—3, 4, 6 и 12 кругов.
- В кубической схеме—3, 4, 6 и 12 кругов.
- В додекаэдрической схеме—6, 10, 15 и 30 кругов.

Если считать круги призматической схемы одной системой, то всего систем может быть:

- 1 призматическая,
 - 4 тетраэдрических и кубических,
 - 4 додекаэдрических.
- Всего 9 систем кругов на шаре.

6. ЭКВАТОРЫ ОСЕЙ СИМЕТРИИ

В параграфе 3-м этой главы перечислены те одноименные оси, которые взаимно перпендикулярны. В группе таких осей их экваторы могут либо совпадать с кругами основной сети из треугольников схемы, либо проходить через вершины одноименных осей. Но экваторы тех осей, которые не образуют взаимно перпендикулярных групп, пересекают основной треугольник схемы в точках, лежащих на его сторонах. Пользуясь рисунками схем, можно найти все экваторы осей симметрии.

Из рис. 130—132 тетраэдрической схемы видно, что экваторы вершин C , обозначенные пунктиром, проходят через две другие вершины C и делят пополам стороны AB в точке D . Экваторы вершин A и B проходят через ту же точку D на сторонах AB смежных треугольников. Эти же экваторы образуют со стороною AB в точке пересечения с нею углы по 45° .

Из рис. 133—135 кубической схемы видно, что экватором C является круг AA , экватором B —круг AB и экватором A —

круг ABC . Но эти экваторы совпадают с экваторами тетра-эдрической системы.

Из рис. 136—138 додекаэдрической схемы видно, что экватором точки C является основной круг ABC . Экватором точки B (лежащей на экваторе CBA) является круг $C—C$ квадранта $C—C$ того же рисунка. Экватором точки A (лежащей на том же экваторе CBA) является круг $C—C$ квадранта $C—C$. Сеть рис. 139 дает расположение экваторов A , B и C . Расположение экваторов в основном треугольнике сети видно на чертеже. Экваторы обозначены буквами DE , FG , CC .

7. ТОПОЛОГИЯ ШАРОВЫХ СХЕМ

Если отвлечься от метрических свойств шаровых схем, то останутся их топологические свойства. В топологическом треугольнике сторона есть граница между двумя треугольниками, а вершина — точка схождения границ. Но и сфера топологически аналогична всякой замкнутой конечной поверхности. Поэтому расположению на сфере симметрических схем соответствует расположение на замкнутой поверхности топологических схем. В силе остаются выводы относительно числа треугольников, покрывающих поверхность, и относительно числа вершин, сходящихся в одной точке, а также относительно осей топологического расположения и образуемых ими схем. Понятно, что топологические оси лишены всех метрических свойств.