

Э. Г. Удерман

**Метод корневого годографа в теории
автоматического управления**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 621.3
ББК 31.352
Э1

Э1 **Э. Г. Удерман**
Метод корневого годографа в теории автоматического управления / Э. Г. Удерман – М.: Книга по Требованию, 2012. – 112 с.

ISBN 978-5-458-28628-2

ISBN 978-5-458-28628-2

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ВВЕДЕНИЕ

1. Характеристика и область применения метода корневого годографа

Метод корневого годографа (Root Locus Method) является методом расчета линеаризованных замкнутых динамических систем, т. е. таких систем с обратной связью, поведение которых в переходных процессах с достаточной для практических целей точностью описывается линейными дифференциальными уравнениями.

К линеаризованным системам с обратной связью относятся многие системы автоматического регулирования и контроля, следящие системы¹, а также усилители с обратной связью.

Корневыми годографами называются траектории, описываемые корнями характеристического уравнения системы в комплексной плоскости корней при изменении одного из параметров, чаще всего общего коэффициента усиления, от 0 до ∞ .

Метод корневого годографа позволяет успешно решать задачи анализа и синтеза линеаризованных систем в свете требований к поведению системы в переходных процессах (к «качеству» системы), вызванных возмущениями, приложенными к системе, или управляющими воздействиями.

Возникший позже частотного метода расчета систем автоматического регулирования (САУ) метод корневого годографа в течение последних лет получил большое распространение в США благодаря своим несомненным достоинствам. Будучи в своей основе методом графоаналитическим, метод корневого годографа, так же как и частотный метод, обладает большой наглядностью.

Однако, в то время как прямая интерпретация частотных характеристик системы с точки зрения ее поведения в переходных процессах в общем довольно затруднительна, данные корневых годографов могут быть непосредственно использованы для вычисления переходного процесса по простым формулам, а чаще всего основные черты переходного процесса выявляются из рассмотрения корневых годографов без всяких дополнительных вычислений.

Конечно, при проектировании конкретных САУ каждый вариант рассчитывается не одним, а несколькими методами, после чего отбирается наилучший из вариантов. При этом частотный метод и метод корневых годографов хорошо дополняют друг друга, облег-

¹ Все эти системы мы будем далее называть системами автоматического управления (САУ).

чая проектировщику, который пользуется обоими методами, решение задач анализа и синтеза заданной САУ.

Первой из работ, в которых была высказана идея корневых годографов, насколько нам известно, является статья профессора К. Ф. Теодорчика [Л. 1], в которой аналитически исследовались траектории корней характеристического уравнения третьей степени при непрерывном изменении свободного члена.

Это аналитическое направление метода корневых годографов развито в последующих работах К. Ф. Теодорчика и Г. А. Бендрикова [Л. 2—6].

Графический метод построения корневых годографов был предложен в 1949 г. С. П. Стрелковым [Л. 9] и независимо в 1950 г. В. Р. Ивэнсом [Л. 7, 8] и с тех пор получил в США большое распространение; как Root Locus Method.

В работах автора [Л. 10] развит другой графоаналитический метод построения корневых годографов, тесно связанный с частотными идеями.

Настоящая книга в основном посвящена изложению сущности и применению метода корневого годографа Ивэнса, который позволяет решать следующие задачи:

1. Строить годографы полюсов передаточной функции замкнутой системы при изменении общего коэффициента усиления или другого параметра системы.
2. Оценивать качественно и количественно, как изменяется реакция системы на типовой сигнал при изменении значения параметра корневых годографов.
3. Учитывать влияние новых параметров системы, появляющихся при изменении или усложнении системы дополнительными элементами, или учитывать малые параметры.
4. Производить синтез корректирующих элементов системы.

Прежде чем перейти к обоснованию метода и свойств корневых годографов, напомним читателю основные сведения и понятия о линейных САУ.

2. Необходимые сведения о линейных системах автоматического управления

Любая САУ может быть представлена в виде функциональной схемы (рис. 1), в которой регулируемая величина $x_{вых}$ некоторого объекта O благодаря регулятору P поддерживается с необходимой

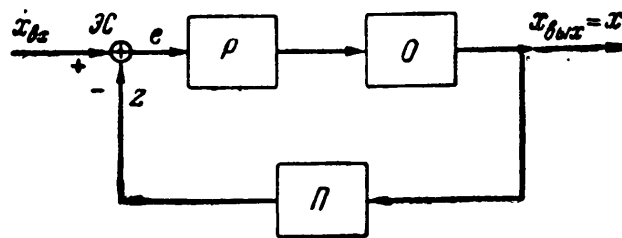


Рис. 1. Функциональная схема системы.

степенью точности, равной или пропорциональной (если в системе между ее выходом и элементом сравнения ЭС происходит при помощи элемента П преобразование сигнала) входной величине $x_{вх}$, которая является для САУ заданием.

Для САУ, называемых системами стабилизации, например регуляторов напряжения, регуляторов скорости и т. п., $x_{вх} = \text{const}$. Для следящих систем $x_{вх}$ является некоторой функцией времени и называется управляющим воздействием.

Далее мы будем считать параметры линеаризованных САУ сосредоточенными и не зависящими от времени, поэтому дифференциальные уравнения, описывающие САУ, будут уравнениями с постоянными коэффициентами вида¹.

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n x}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dx}{dt} + a_n x = \\ = b_0 \frac{d^m x_{вх}}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} x_{вх}}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dx_{вх}}{dt} + b_m x_{вх}. \end{aligned} \quad (1)$$

В уравнении (1) $m \leq n$, коэффициенты a_i ($i=0, 1, 2, \dots, n$) и b_j ($j=0, 1, 2, \dots, m$), постоянны, $x_{вх}$ для краткости обозначено через x . Составление уравнения вида (1) для каждой конкретной линеаризованной САУ во многих случаях значительно облегчается при использовании структурной схемы САУ, состоящей из соответствующих физическим элементам САУ (или их частям) динамических звеньев, показанных на рис. 2, а под номерами 1, 2, 3 и 4.

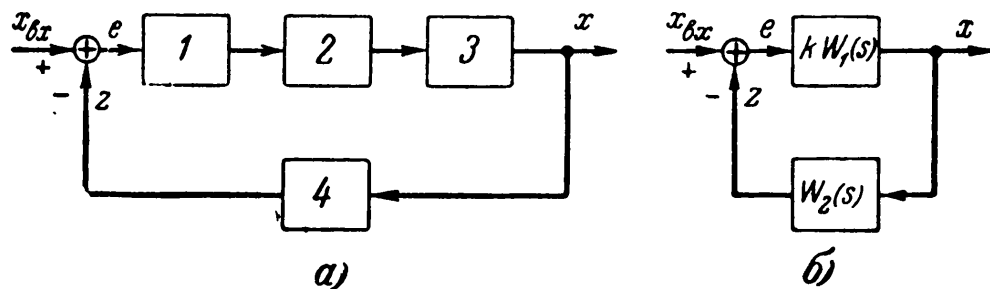


Рис. 2. Структурные схемы САУ.

Число элементарных динамических звеньев невелико; это — безынерционное (или усилительное) звено, аperiodическое (или инерционное) звено, интегрирующее, дифференцирующее, колебательное звено и звено чистого запаздывания. Кроме этих звеньев, в САУ часто применяются стабилизирующие и корректирующие звенья, например в виде пассивных четырехполюсников.

Процессы в каждом из перечисленных выше звеньев (кроме звена запаздывания) описываются уравнениями, представляющими частный случай уравнения (1) при $n \leq 2$. Весьма важным и полезным понятием, полностью отражающим динамические свойства звена (системы), является понятие передаточной функции звена (си-

¹ В уравнении (1) для простоты не учтены воздействия (возмущения), точки приложения которых не совпадают со входом системы. Для решения уравнения (1) должны быть известны начальные условия, которые могут быть, в частности, нулевыми.

стемы), которая определяется как отношение изображений по Лапласу выходной величины к входной при нулевых начальных условиях,

$$W(s) = \frac{x_{\text{вых}}(s)}{x_{\text{вх}}(s)}. \quad (2)$$

Так, если уравнение (1) написано для замкнутой системы, то ее передаточная функция (в замкнутом состоянии) в соответствии с выражением (2) равна

$$W_0(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m^*}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}. \quad (3)$$

Передаточная функция $kW(s)$ разомкнутой системы (рис. 2,б) определяется, как

$$kW(s) = kW_1(s) W_2(s) = \frac{z(s)}{e(s)},$$

где

$$e(s) = x_{\text{вх}}(s) - z(s).$$

При $W_2(s) = 1$ $z(s) = x(s)$ и $e(s)$ является изображением ошибки системы. Связь между передаточными функциями замкнутой $W_0(s) = x_{\text{вых}}(s)/x_{\text{вх}}(s)$ и разомкнутой систем $kW(s) = kW_1(s) W_2(s)$ дается выражением

$$W_0(s) = \frac{kW_1(s)}{1 + kW_1(s) W_2(s)}, \quad (4)$$

которое легко получить из рассмотрения схемы рис. 2,б. (На этом рисунке звенья 1, 2, 3 рис. 2,а имеют общую передаточную функцию $kW_1(s)$, а звено 4—передаточную функцию $W_2(s)$).

Передаточные функции $kW_1(s) W_2(s)$ и $W_0(s)$, как указывалось выше, вполне определяют динамические свойства системы (звена). Это объясняется тем, что они зависят от структуры и всех параметров системы. Следовательно, передаточная функция является характеристикой системы. Естественно, что система (звено) может быть описана также и другими характеристиками, а именно: переходной характеристикой, импульсной переходной характеристикой и частотной характеристикой.

Эти характеристики представляют собою соответствующие реакции (отклики) системы (звена) на так называемые типовые или стандартные входные воздействия, поданные на систему (звено), находившуюся до этого в покое; переходной характеристикой $h(t)$ называется реакция системы (звена) на входное воздействие в виде единичной ступенчатой функции

$$1(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 & t \geq 0 \end{cases}$$

* Здесь и далее обозначение передаточной функции замкнутой системы будет с индексом 0.

(единичного скачка); импульсной переходной характеристикой или функцией веса $g(t)$ называется реакция системы (звена) на входное воздействие в виде единичной импульсной функции $\delta(t)$ (дельта-функции или функции Дирака, определяемой условием $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1$);

наконец, частотной характеристикой $W(j\omega)$ является установившаяся реакция системы (звена) на входное гармоническое воздействие единичной амплитуды и частоты ω , которую мы предполагаем принимающей все значения от 0 до ∞ .

Значение этих характеристик обусловлено не только тем, что они представляют собою поведение системы (звена) при наиболее типичных, чаще всего встречающихся воздействиях, но и потому, что они, например скачок $1(t)$, во многих случаях являются наиболее тяжелыми¹ для системы воздействиями. Если поведение системы удовлетворяет предъявленным к ней требованиям при воздействии типа скачка, то полагают, что оно окажется более удовлетворительным при других видах воздействий.

Кроме того, на основании применимости к линейным системам принципа наложения всегда возможно, зная переходную характеристику $h(t)$ или импульсную переходную характеристику системы $g(t)$, вычислить ее поведение и при иных характерных воздействиях. Например, для следящих систем такими воздействиями часто являются линейно нарастающие во времени или нарастающие по параболическому закону (по закону равномерно-ускоренного движения) воздействия $x_{вх}(t)$.

Пользуясь интегралом свертки

$$x_{вых}(t) = \int_0^t x_{вх}(\tau) h'(t - \tau) d\tau = \int_0^t x_{вх}(\tau) g(t - \tau) d\tau$$

и зная характеристики $g(t)$ или $h(t)$ системы, можно определить ее поведение $x_{вых}(t)$ при любом заданном виде воздействия.

Между всеми упомянутыми выше характеристиками системы существует простая связь. Переходная характеристика системы является оригиналом по отношению к ее передаточной функции, почтенной на s , т. е.

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_0(s)}{s} \right],$$

так как

$$\frac{1}{s} \rightarrow x_{вх}(t) = 1(t).$$

Импульсная переходная характеристика равна оригиналу передаточной функции системы

$$g(t) = L^{-1} [W_0(s)],$$

¹ По вызванным ими переходным процессам.

так как

$$1 \rightarrow x_{\text{вх}}(t) = \delta(t).$$

Частотная характеристика, также называемая комплексным коэффициентом усиления (передачи),

$$W(j\omega) = W(s)_{s=j\omega}$$

получается из выражения для передаточной функции $W(s)$ при замене параметра преобразования Лапласа комплексной переменной s на мнимую переменную $j\omega$.

Зависимость модуля $|W(j\omega)| = A(\omega)$ от частоты ω называется амплитудно-частотной, а $\arg W(j\omega) = \varphi(\omega)$ — фазо-частотной характеристикой системы. Частотная характеристика системы $W(j\omega)$ лежит в основе частотного метода расчета САР и следящих систем, так как она также отражает динамические свойства системы.

Частотная характеристика $W(j\omega)$ также необходима при расчете систем при входных сигналах, заданных в виде случайных функций времени при наличии помех.

Приведем в качестве примера характеристики апериодического звена, дифференциальное уравнение которого имеет вид

$$T \frac{dx_{\text{вых}}(t)}{dt} + x_{\text{вых}}(t) = kx_{\text{вх}}(t)$$

$$W(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad h(t) = 1 - e^{-\frac{t}{T}}, \quad g(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}},$$

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Здесь принято $k=1$; T — постоянная времени апериодического звена, величина которой является мерой его инерционности. Зная передаточные функции звеньев, легко получить дифференциальное уравнение всей системы в целом, т. е. уравнение зависимости между выходной и входной величинами вида (1).

Обычно система состоит из звеньев направленного действия, т. е. таких, присоединение которых не оказывает влияния (не вызывает обратной реакции) на предшествующее звено. В этом случае справедливы простые правила для последовательного (каскадного) и параллельного соединения звеньев: передаточная функция последовательной цепочки звеньев равна произведению передаточных функций ее звеньев; при параллельном соединении звеньев их передаточные функции суммируются.

На рис. 3 показаны принципиальная и структурная схемы следящей системы, состоящей из корректирующего, усилительного, двух апериодических и одного интегрирующего звеньев. Передаточная функция разомкнутой системы $kW(s) = \frac{x(s)}{e(s)}$ равна

$$\begin{aligned} kW(s) &= \frac{\alpha\tau s + 1}{\beta\tau s + 1} k_0 \frac{k_1}{T_1 s + 1} \frac{k_2}{T_2 s + 1} \frac{k_3}{s} = \\ &= \frac{k(\alpha\tau s + 1)}{s(\beta\tau s + 1)(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}, \end{aligned} \quad (5)$$

где $(k = k_0 k_1 k_2 k_3)$.

Передаточная функция замкнутой системы $W_0(s) = \frac{x(s)}{x_{вх}(s)}$ согласно (4) при $W_2(s) = 1$ равна

$$W_0(s) = \frac{k(\alpha\tau s + 1)}{s(\beta\tau s + 1)(T_1s + 1)(T_2s + 1) + k(\alpha\tau s + 1)}. \quad (6)$$

Заменяя $W_0(s)$ на $x(s)/x_{вх}(s)$, освобождаясь от знаменателя и обозначив коэффициенты при соответствующих степенях s (а именно, при s^{n-i} и s^{m-i} , $i=0, 1, 2, \dots$) через $a_0, a_1, \dots, a_n, b_0, b_1, \dots, b_m$, получаем после формальной замены s на d/dt уравнение вида (1). В дальнейшем нам не понадобится переход от передаточной

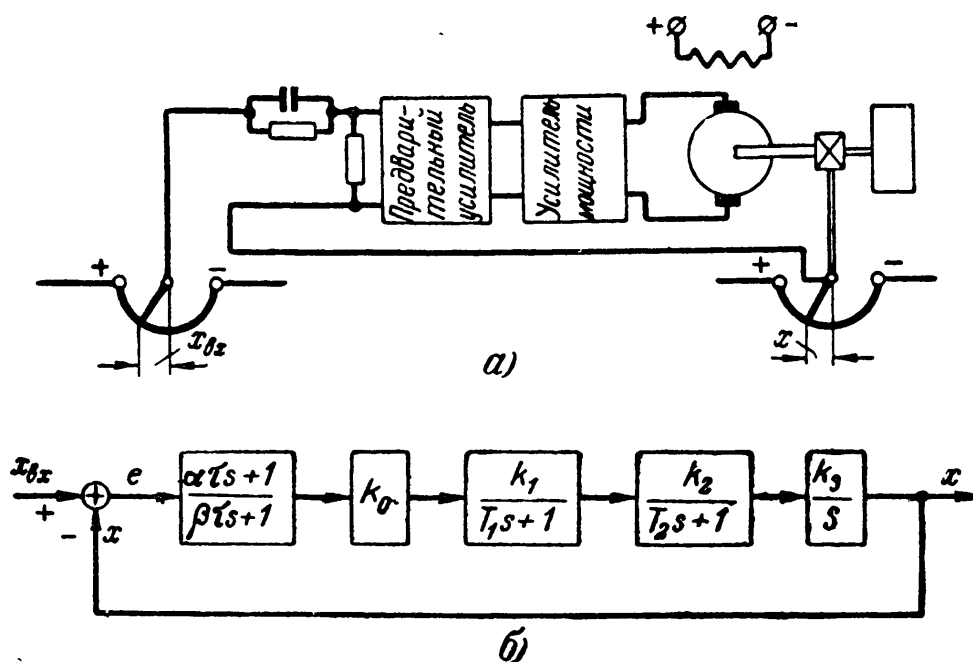


Рис. 3.
а) Принципиальная схема. б) Структурная схема.

функции замкнутой системы $W_0(s)$ к дифференциальному уравнению системы, так как, зная нули и полюсы $W_0(s)$ и начальные условия, можно сразу написать решение этого уравнения при типовом воздействии вида единичного скачка $1(t)$ или импульса $\delta(t)$, пользуясь приводимыми ниже формулами обратного преобразования Лапласа.

Как видно из выражений (3) и (4), передаточная функция $W_0(s)$ для рассматриваемого класса САУ является рациональной функцией комплексной переменной s вида

$$W_0(s) = \frac{G(s)}{H_0(s)},$$

где $G(s)$ и $H_0(s)$ — полиномы степени m и n соответственно, причем $m \leq n$; полином $H_0(s)$, приравненный нулю, является характеристическим уравнением замкнутой системы.

Переходная характеристика $h(t)$ системы вычисляется при по-

мощи обратного преобразования Лапласа (формулы разложения Хевисайда)

$$h(t) = L^{-1} \left[\frac{W_0(s)}{s} \right] = L^{-1} \left[\frac{G(s)}{sH_0(s)} \right],$$

имеющей при простых (не кратных) корнях $H_0(s)$ вид [Л. 12, 13]

$$h(t) = \frac{G(0)}{H_0(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{G(s_k)}{s_k H'_0(s_k)} e^{s_k t}, \quad (7)$$

а импульсная переходная характеристика

$$g(t) = \sum_{k=1}^n \frac{G(s_k)}{H'_0(s_k)} e^{s_k t}. \quad (8)$$

В выражениях (7) и (8) s_k ($k = 1, 2, \dots, n$) корни характеристического полинома $H_0(s)$ или, что то же, полюсы передаточной функции замкнутой системы $W_0(s)$. $H'_0(s_k)$ — первая производная $\frac{dH_0(s)}{ds_{(s=s_k)}}$ при $s = s_k$.

Таким образом, для нахождения переходных характеристик $h(t)$ и $g(t)$ по формулам (7) и (8) требуется знать корни характеристического уравнения замкнутой системы $H_0(s) = 0$.

Как известно, только при степени полинома $n \leq 2$ его корни находятся без труда, при $n = 3, 4$ и тем более $n > 4$ определение корней уравнения с известными численными значениями коэффициентов классическими методами становится тем сложнее, чем выше степень n (а при буквенных коэффициентах в общем случае при $n \geq 3$ принципиально невозможно).

Метод корневого годографа не только позволяет весьма просто графическим путем находить корни характеристического уравнения замкнутой системы независимо от его порядка n , но и определять, в каком направлении изменяются эти корни при варьировании какого-либо существенно важного параметра системы, например его общего коэффициента усиления. Тем самым метод корневого годографа позволяет решать ряд задач анализа и синтеза линеаризованных САУ.

В заключение данного раздела кратко остановимся на основных показателях, при помощи которых оценивается качество САУ и которыми пользуются при анализе и синтезе САУ.

Поскольку метод корневого годографа непосредственно позволяет судить о поведении линеаризованных САУ при переходных процессах, основными оценками качества САУ, которыми пользуются при этом методе, являются временные показатели качества: время регулирования t_0 , величина выброса или перерегулирование ξ и круговая частота затухающих колебаний ω_1 (или число колебаний N за время t_0) — рис. 4,а.

Временные показатели качества характеризуют процесс регулирования в системе при приложении к ее входу воздействия в виде единичного скачка, следовательно, t_0 , ξ и ω_1 — это оценки по переходной характеристике $h(t)$.

Так как основная задача САУ заключается в достаточно точном поддержании регулируемой величины вблизи заданного значения (например, с точностью до 3—5%), то, кроме указанных выше пока-

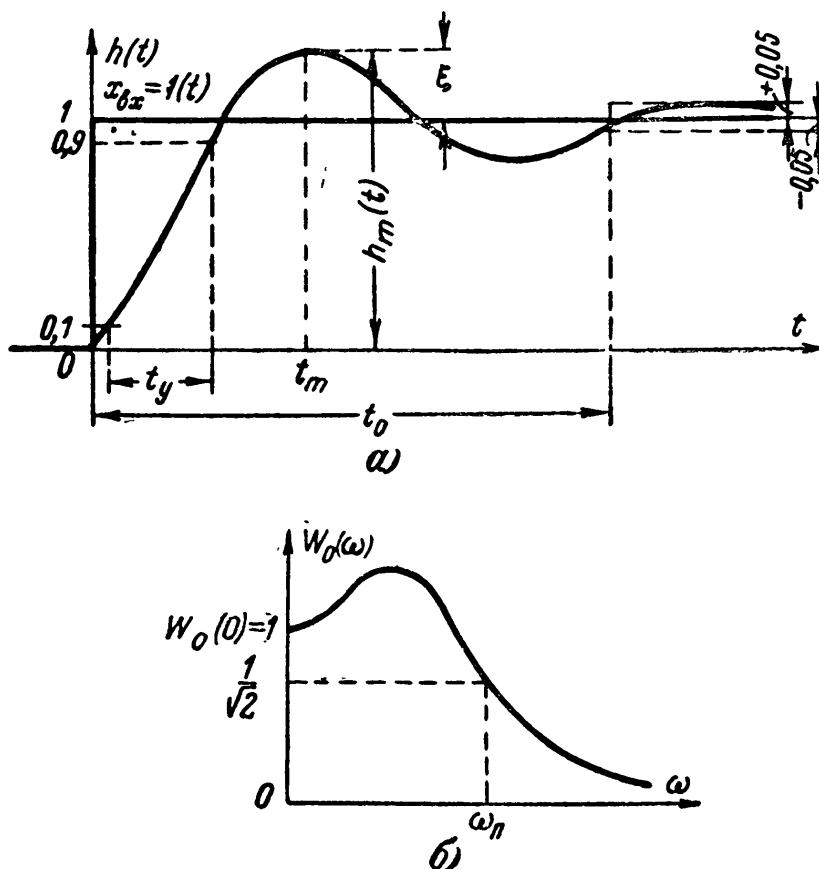


Рис. 4. Временные показатели качества регулирования.

зателей для системы, весьма важен показатель, характеризующий статическую точность регулирования, а именно — наибольшую установившуюся ошибку системы. Последняя ограничивает снизу допустимое значение общего коэффициента усиления системы.

При большей детализации требований к характеру переходного процесса иногда к указанным выше основным оценкам присоединяют оценки по времени достижения первого максимума t_m переходной характеристики $h(t)$ и по времени установления t_y ; t_y — это время, за которое переходная характеристика $h(t)$ изменится от 0,1 до 0,9.

Очень важным показателем САУ и следящих систем является величина полосы пропускания частот системы ω_n . Полосу пропускания ω_n определим в соответствии с заданным уровнем, который обычно принимают равным $\frac{1}{\sqrt{2}} = 0,707$ (рис. 4, б). Таким образом, ω_n определяет интервал частот, в пределах которого величина ор-

динат амплитудно-частотной характеристики замкнутой системы $W_0(\omega)$ оказывается не меньше 0,707 начального значения $W_0(\omega)_{\omega=0} = W_0(0) = 1$. Слишком малое значение ω_n свидетельствует о „вялости“ системы, чрезмерно большое значение ω_n показывает, что система излишне чувствительна к помехам.

При синтезе невозможно обеспечить наилучшие значения всех показателей качества, поэтому при выборе окончательного варианта приходится принимать те или иные компромиссные решения с тем, чтобы в зависимости от конкретных обстоятельств выполнить в первую очередь главные технические условия.

ГЛАВА ВТОРАЯ

МЕТОД КОРНЕВОГО ГОДОГРАФА

3. Плоскость нулей и полюсов

Как было показано в § 2 предыдущей главы, динамические свойства линеаризованной САУ полностью определяются ее передаточной функцией

$$W_0(s) = \frac{kW_1(s)}{1 + kW_1(s)W_2(s)} \quad (9)$$

[см. рис. 2,б и выражение (4)].

Часть системы и соответствующие этой части параметры обычно являются заданными (объект регулирования, силовая часть следящих систем, исполнительный орган регулятора и некоторые другие элементы) и не могут быть изменены.

Другие элементы, например корректирующие, выбираются так, чтобы их структура и параметры обеспечивали наилучшие или по крайней мере приемлемые показатели качества системы согласно заданным техническим условиям. Так же можно изменять в определенных пределах значение общего коэффициента усиления.

В примере схемы, приведенной на рис. 3, заданными параметрами можно считать коэффициенты k_1 , k_2 и k_3 и постоянные времени T_1 и T_2 . Остальные параметры α , β , τ и k_0 выбираются. Заметим, что при изменении k_0 измеряется также и общий коэффициент усиления k .

В настоящей главе мы будем рассматривать только одноконтурные системы, полагая, что структура системы и все параметры ее известны и что только общий коэффициент усиления системы можно изменять в широких пределах. Для самого общего вида одноконтурной системы, показанной на рис. 2,б, можно при этом считать известными все нули и полюсы ее передаточной функции разомкнутой системы $kW_1(s)W_2(s)$. Действительно, передаточная функция $kW_1(s)W_2(s)$ в этом случае, в соответствии с правилом для последовательной цепочки звеньев, равна произведению передаточных функций звеньев системы. Так как порядок числителя и знаменателя отдельных звеньев не выше чем 2, то при известных (заданных) параметрах звеньев можно считать известными также корни числителя и знаменателя каждого звена, а следовательно, и всей передаточной функции разомкнутой системы.