И.Б. Абельсон

Максимум и минимум

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
И11

И.Б. Абельсон

И11 Максимум и минимум / И.Б. Абельсон – М.: Книга по Требованию, 2021. – 108 с.

ISBN 978-5-458-35728-9

Настоящая книга предназначена для любителей математики, имеющих знания приблизительно в объеме 9 классов средней школы. Она является одной из тех книг, которые должны заполнить существующий у нас разрыв между литературой по элементарной математика и так называемой высшей математике. На конкретном и доступном материале она подводит читателя вплотную к идеям математического анализа. Это соответствует и историческому ходу, так как задачи на максимум-минимум были одними из тех, которые привели к созданию дифференциального исчисления. Книга может быть использована для работы в школьных математических кружках. Выражаем убеждение, что предлагаемая книга принесет пользу молодежи, интересующейся математикой.

ISBN 978-5-458-35728-9

ГЛАВА I

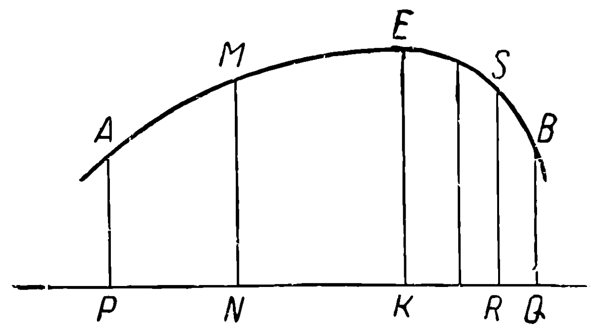
ПРИМЕРЫ МАКСИМУМА И МИНИМУМА

Введение

Максимум и минимум — слова латинские и в переводе означают: наибольшее и наименьшее (maximum и minimum).

В математике эти слова весьма употребительны, но смысл, который им придается, несколько отличается от обычного. Легче всего уяснить этот смысл на примерах.

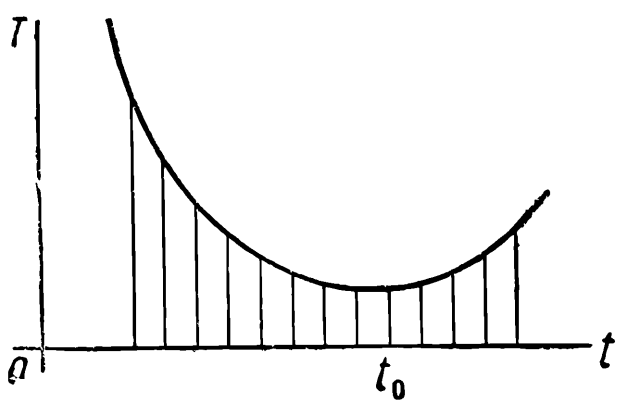
Пример. Представим себе, что путешественник, переходя через гору, прошел путь, который мы условно изобразим на чертеже линией AB (черт. 1). Будем измерять высоту подъема так, как ее обычно измеряют — от уровня моря. На чертеже уровень моря изображен прямой PQ, и если путешественник находится в точке M, то высота подъема будет представлена отрезком NM.



Черт. 1.

По мере продвижения путешественника его высота над уровнем моря изменяется (т. е. является переменной величиной); пока он поднимается, эта высота увеличивается; когда он достигнет вершины — точки E — высота сделается наибольшей, а затем, при дальнейшем продвижении путешественника вниз по склону горы, высота путешественника над уровнем моря будет уменьшаться. Из чертежа видно, что вертикальный отрезок KE, измеряющий эту высоту в точке E, будет больше, чем любой вертикальный отрезок NM, лежащий левее KE. Когда же путешественник перейдет вершину и будет находиться правее точки E, то соответствующие вертикальные отрезки (например RS) также будут меньше, чем KE. Отсюда видно, что из всех вертикальных отрезков, измеряющих высоту путешественника в различные моменты его пути, отрезок KE является наибольшим. Такое наибольшее значение переменной величины (в данном случае высоты над уровнем моря) называется максимальным.

Дадим теперь пример, в котором переменная величина принимает наименьшее или, как говорят, минимальное значение.



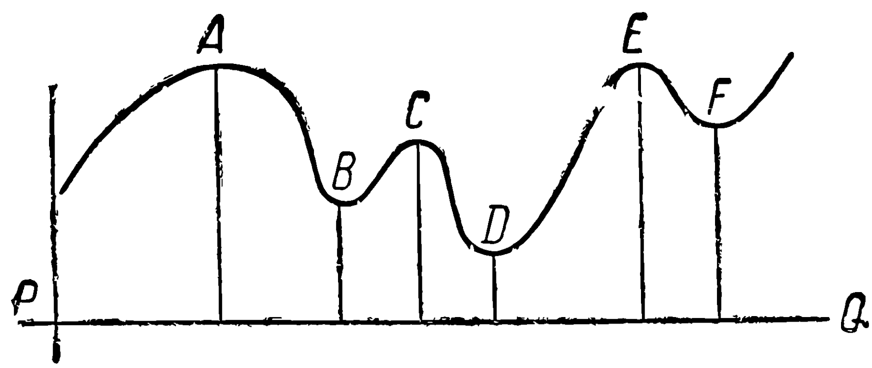
Черт. 2.

Пример. В течение летней ночи каждые 10 мин. измеряют температуру воздуха и результаты отмечают на графике. Если по горизонтальной оси (черт. 2) откладывать время, а по вертикальной — температуру, то получим ряд вертикальных отрезков (их называют ординатами). Отыскав на графике наименьшую из ординат и соответствующую ей точку t_0 на горизонтальной оси Ot, тем самым определяем момент наиболее низкой температуры. Такое значение величины (температуры) называют минимальным; слева и справа от точки t_0 ординаты больше, чем ордината для этой точки.

Общее для обоих примеров заключается в том, что переменная величина (высота, температура) в своем изменении доходит до крайнего значения — в сторону возрастания или убывания, — чтобы затем начать изменение в обратном направлении. Поэтому вопросы максимума и минимума изучают параллельно. Оба эти понятия объединяют в одно понятие — крайнего или экстремального значения (от латинского слова extremum — крайнее). Мы увидим, что задачи на максимум и задачи на минимум решаются совершенно одинаковым образом.

Иногда переменная величина может поочередно возрастать и убывать, принимая при этом ряд наибольших и наименьших значений. Так, например, рассматривая изменение синуса, мы видим, что при возрастании угла x $\sin x$ растет от 0 до 1 (своего максимума), затем начинает убывать и для $x = {}^3/_2\,\pi$ (270°) достигает наименьшего из возможных значений (—1); при дальнейшем увеличении x синус x опять возрастает и т. д.

Вообще при попеременном возрастании и убывании может оказаться даже, что какой-нибудь из минимумов больше какого-нибудь максимума. Это можно видеть из прилагаемого чертежа (черт. 3), где изображен



Черт. 3.

путь $ABCDEF$ через несколько горных перевалов. Высота путешественника над уровнем моря будет иметь максимум в точках A, C, E и минимум в точках B, D, F. В точке C имеем максимум, так как ордината этой точки больше соседних слева и справа; в точке F имеем минимум, так как ординаты слева и справа больше ординаты точки F. Вместе с тем „минимальная“ ордината в точке F оказалась больше „максимальной“ в точке C.

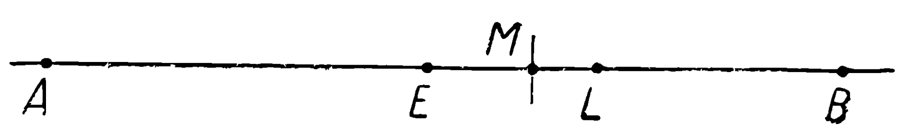
Пример: в январский день максимальная температура (в течение дня) меньше, чем минимальная температура в июльский день.

Таким образом, с понятием максимума (или минимума) мы будем связывать не наибольшее (или наименьшее) из *всех вообще* значений, принимаемых изменяющейся величиной, а такие значения, которые больше (или меньше) соседних *близлежащих* как слева, так и справа[1].

Настоящая книга имеет целью показать читателю, как решаются задачи, связанные с нахождением максимума или минимума какой-нибудь переменной величины. Однако прежде всего надо показать, как ставятся подобные задачи; для этого мы приведем здесь два образца (решение этих задач будет дано позднее).

Задача. Площадка (черт. 4) освещена двумя сильными источниками света (в точке A источник силой в 8 000 свечей, в точке B — 1 000 свечей.) Расстояние между точками A и B равно l. Найти место, где сила освещения от обоих источников вместе была бы наименьшей.

Надо принять во внимание, что интенсивность осве-



Черт. 4.

щения обратно пропорциональна квадрату расстояния, и прямо пропорциональна силе источника.

Очевидно, искомое место не лежит точно посредине между A и B, так как слева освещение будет гораздо больше, чем справа (в 8 раз), поэтому естественно передвинуться от середины E вправо. Такое перемещение от точки E вправо сначала, безусловно, имеет смысл, так как ослабление освещения от левого источника будет больше, чем усиление от правого. Но постепенно, по мере перемещения вправо, воздействие левого источника ослабевает, а правого возрастает. Поэтому перемещение целесообразно только до определенной точки. Найти эту точку, это и значит решить задачу.

Решение этой задачи читатель найдет в последней главе (глава IV, задача 1). Оказывается, что искомая точка L должна быть выбрана так, чтобы $AL:BL=2:1$.

[1] В настоящей книге будут рассматриваться задачи, в которых встречается или только один максимум или только один минимум.

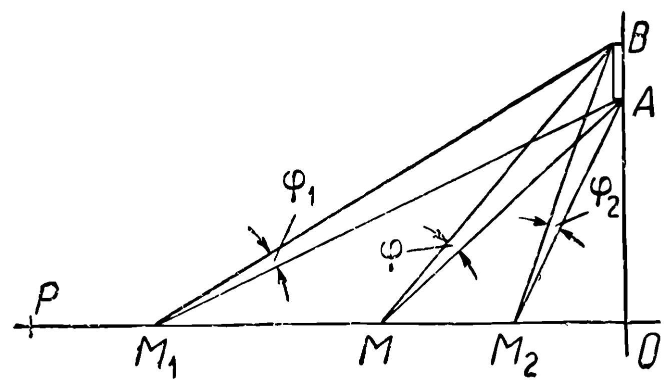
Задача. На высокой стене висит плакат (черт. 5). Известно расстояние от точки O до нижнего и до верхнего краев плаката:

$$OA = a \text{ метров } (40 \text{ м}),$$

$$OB = b \text{ метров } (48 \text{ м}).$$

Аппарат фотографа должен находиться на горизонтальной линии OP. Спрашивается, на каком расстоянии $OM = x$ поместить аппарат, чтобы плакат был виден из аппарата под наибольшим углом, т. е. чтобы угол $AMB = \varphi$ был наибольшим? (В этом случае плакат будет снят наиболее отчетливо).

Отодвигая или придвигая аппарат по линии OP, мы этим самым изменяем углы AMO и BMO; при этом будет изменяться и их разность, т. е. рассматриваемый угол φ. Таким образом, угол φ зависит от расстояния x, или, как говорят, является ф у н к ц и е й от а р г у м е н т а x. Очевидно, если фотограф станет на весьма большом расстоянии от стены (напр. $x = 300$ *м*), то угол φ будет очень малым. По мере приближения к стене (например, беря $x = 280$ *м*, $x = 260$ *м*, $x = 240$ *м* и т. д.) угол φ будет возрастать. Стремясь увеличить угол φ, фотограф будет подходить к стене все ближе и ближе. Но такое приближение к стене (т. е. уменьшение x) ему выгодно только до известного предела. Потому что, если он встанет очень близко к стене, то угол φ опять станет малым (он будет „скошенным“.) Задача заключается в том, чтобы найти то расстояние x, на котором фотограф должен остановиться, т. е. найти ту точку на прямой OP, для которой угол φ будет наибольшим (перемещение от этой точки ближе к стене и отступление назад одинаково нецелесообразно). Решение этой задачи читатель найдет ниже в этой главе (см. задачу 6), она же будет решена в главе II (задача 15),



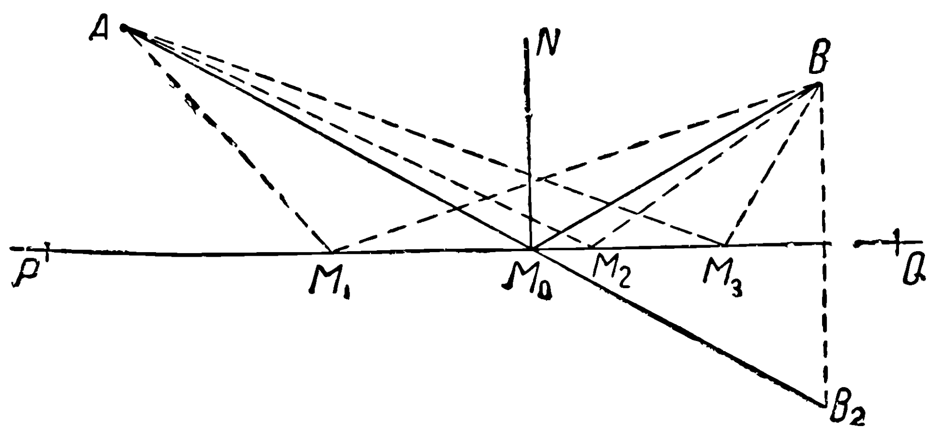
Черт. 5.

в главе III (задача 7) и в главе IV (задача 9) и притом каждый раз новым способом.[1]

Из приведенных задач видно, что мы будем иметь дело с непрерывно изменяющимися переменными величинами (угол зрения φ в этой задаче и освещенность в предыдущей), зависящими от других переменных (например, от расстояния x). И во всем процессе изменения переменных требуется отметить тот момент, когда значение этих зависимых переменных становится наибольшим или наименьшим.

2. ЗАДАЧИ, РЕШАЕМЫЕ ЭЛЕМЕНТАРНО

Перейдем теперь к решению некоторых простейших задач, не требующих особых теоретических приемов.



Черт. 6.

Задача 1. На плоскости дана прямая PQ и две точки A и B, не лежащие на ней и расположенные по одну сторону от этой прямой (черт. 6). Требуется найти на прямой PQ такую точку M, чтобы длина ломаной AMB была возможно меньшей (минимальной).

Решение. Допустим, что задача решена, т. е. найдена на прямой PQ такая точка (обозначим ее через M_0), что ломаная AM_0B короче всякой другой ломаной AM_1B, AM_2B, AM_3B и т. д. Построим точку B_2, симметричную точке B относительно прямой PQ, т. е. расположенную

[1] Это делается с той целью, чтобы читатель мог проследить, как можно различными приемами, различными методами, резрешить одну и ту же задачу, и чтобы он мог видеть своеобразие каждого метода.

по другую сторону от прямой PQ на расстоянии, равном расстоянию точки B от прямой PQ. Тогда $M_0B_2 = M_0B$, $M_1B_2 = M_1B$ и т. д. Поэтому также

$$AM_0 + M_0B = AM_0 + M_0B_2,$$
$$AM_1 + M_1B = AM_1 + M_1B_2$$

и т. д.

Но если ломаная AM_0B есть кратчайшая из всех этих ломаных, то линия AM_0B_2 должна обладать тем же свойством, т. е. быть короче всех этих линий: AM_1B_2, AM_2B_2 и т. д. С другой стороны, кратчайшее расстояние между точками A и B_2 дается прямой линией AB_2, их соединяющей. Поэтому линия AM_0B_2 должна совпасть с прямой AB_2.

Отсюда мы получаем способ решения задачи: точку M_0 находят как пересечение прямой AB_2 с прямой PQ.

Покажем применение этой задачи в физике.

Пусть плоскость PQ представляет собой зеркало. Луч света, исходящий из точки A, должен попасть в точку B (послать „зайчик“ в точку B), предварительно отразившись от плоскости зеркала PQ. Если потребовать, чтобы на этот переход из точки A в точку B ушло минимум времени, то и путь должен быть кратчайшим. Имеем из чертежа

$$\angle AM_0P = \angle B_2M_0Q = \angle BM_0Q,$$

т. е. углы, образованные прямыми AM_0 и BM_0 с прямой PQ, равны. Нетрудно видеть, что и дополнительные углы AM_0N и NM_0B также равны. Мы видим, что наше требование влечет за собой равенство углов:

$$\angle AM_0N = \angle NM_0B,$$

т. е. угол падения должен быть равен углу отражения. Таким образом закон отражения в физике дает наиболее экономный (в смысле времени) путь пробега луча света.

Задача 2. Число a надо разбить на два слагаемых так, чтобы произведение их было наибольшим (из возможных).

Решение. Пусть, например, $a = 40$. Обозначим одно из слагаемых через x, другое через y; тогда $x + y = 40$. Можно взять, например, следующие пары чисел:

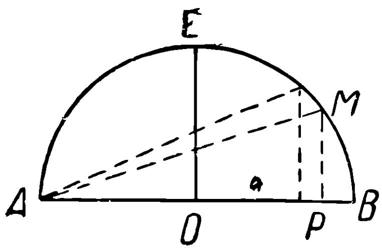
$$x = 10, \quad y = 30, \qquad x = 11, \quad y = 29, \qquad x = 12, \quad y = 28$$

и т. д.

Соответствующие произведения будут: 300; 319; 336 и т. д. Каким образом из всех подобных пар (можно брать и дробные значения x и y) выбрать такую, для которой произведение будет наибольшим?

Решение. Мы дадим здесь следующее наглядное (геометрическое) решение (черт. 7). Строим полукруг с диаметром $AB = a$. Пусть M—произвольная точка полуокружности, и MP — перпендикуляр из нее на диаметр. Обозначим AP через x; PB — через y; тогда $x + y = a$.

На основании известной теоремы о квадрате высоты, опущенной из вершины прямого угла в прямоугольном треугольнике, имеем: $PM^2 = AP \cdot BP$; или $x \cdot y = h^2$ (если обозначить MP через h), Изменяя значение x, мы перемещаем точку P, но указанное равенство остается неизменным. Произведение $x \cdot y$ будет наибольшим, если правая часть (h^2) примет наибольшее значение; а это будет тогда, когда MP совпадет с EO; но тогда $AO = OB$; $x = y$. Максимум произведения получается при равенстве обоих слагаемых. В численном примере $a = 40$ надо взять $x = y = 20$. Читатель может легко проверить, что эта пара чисел: $x = 20$, $y = 20$ дает в произведении больше, чем всякая другая пара.



Черт. 7.

К этой задаче мы еще в дальнейшем вернемся.

Задача 3. Дан трехчлен второй степени вида: $x^2 + px + q$ (например, $x^2 - 6x + 21$). Найти наименьшее значение трехчлена.

Решение. Поясним сперва смысл вопроса. Обозначим трехчлен $x^2 - 6x + 21$ через y, т. е. $x^2 - 6x + 21 = y$. Если переменному x будем давать ряд значений, например $x = 4$, $x = 5$, $x = 6$... то каждому такому значению x соответствует некоторое значение y; в данном случае $y = 13$, $y = 16$, $y = 21$... и т. д. Можно было бы построить большую таблицу соответствующих значений x и y и из рассмотрения ее выяснить приблизительно[1], при каком значении x трехчлен $y = x^2 - 6x + 21$ получает наименьшее

[1] Приблизительно, так как между двумя соседними значениями x можно вставить сколь угодно большое число промежуточных его значений.

значение. Но этот путь непосредственных испытаний весьма длинный. Желательно найти способ, прямо ведущий к цели.

Мы поступим следующим образом. Выражение x^2-6x дополним до квадрата двучлена:

$$x^2-6x=(x^2-6x+9)-9=(x-3)^2-9.$$

Тогда заданный трехчлен можно преобразовать так:

$$y=x^2-6x+21=(x-3)^2-9+21=(x-3)^2+12.$$

В полученном выражении $y=(x-3)^2+12$ первое слагаемое переменное (зависит от значения x), второе — постоянное. Чтобы значение y было минимальным, надо сделать первое слагаемое возможно меньшим. Теперь нетрудно видеть, что из всевозможных значений x особую роль играет значение $x=3$; оно обращает первое слагаемое $(x-3)^2$ в нуль. Всякое другое значение $x\neq3$, будет ли оно больше 3 или меньше 3, сделает слагаемое $(x-3)^2$ числом положительным, и тогда y будет больше 12. Поэтому минимальное значение трехчлена будет:

$$y_{\min}=12,$$

и достигается оно при значении $x=3$.

Читатель по этому образцу без труда решит всякую подобную задачу. Например:
$y=x^2-8x-10$; минимум получается при $x=4$; $y_{\min}=-26$.
$y=x^2+6x-10$; минимум получается при $x=-3$; $y_{\min}=-19$.

Рассмотрим еще случай, когда коэфициент при x^2 равен -1. т. е. трехчлен вида $-x^2+6x+19=y$. Пусть для него требуется найти наибольшее значение. Решение такое же. Имеем:

$$y=-(x^2-6x)+19.$$

Преобразуем двучлен x^2-6x:

$$x^2-6x=(x^2-6x+9)-9=(x-3)^2-9.$$

Теперь заданный трехчлен можно представить так:

$$y=-(x-3)^2+9+19=-(x-3)^2+28.$$

Второе слагаемое постоянно, первое зависит от значения x. Если x не равно 3, то $(x-3)^2$ равно положительному числу, а тогда y будет меньше, чем 28. Если же $x=3$, то y равно 28. Поэтому наибольшее из возможных значений трехчлена будет:

$$y_{\max}=28$$

и достигается оно при значении $x=3$.

Многие задачи приводятся к нахождению максимума или минимума трехчлена:

$$y=\pm x^2+px+q.$$

Теперь мы получили прием, позволяющий их решать. Применим этот прием к решению двух задач, из которых одна уже решена нами другим путем.

Задача 4 (совпадает с задачей 2; сравните решения).

Число a надо разбить на два слагаемых так, чтобы произведение их было возможно большим.

Решение. Обозначим первое слагаемое через x; тогда второе равно $a-x$. Произведение их будет $x(a-x)$. Требуется найти максимум для $x(a-x)=ax-x^2$. Поступаем согласно указаниям предыдущей задачи. Имеем:

$$y=-x^2+ax=-(x^2-ax).$$

Выражение x^2-ax дополняем до квадрата двучлена:

$$x^2-ax=x^2-ax+\left(\frac{a}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4},$$

Заданный трехчлен можно будет представить так:

$$y=-\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+\frac{a^2}{4}.$$

Максимум для y найдем, если принять $x=\frac{a}{2}$. Тогда:

$$y_{\max}=\frac{a^2}{4}.$$

Но в этом случае оба слагаемые равны: $x=a-x=\frac{a}{2}$.

Задача 5. У каменной стены надо пристроить ограду в форме прямоугольника (черт. 8). Длина ограды $MABN$