

М. Гарднер

Крестики-нолики

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 379.8
ББК 77.056я92
М11

М11 **М. Гарднер**
Крестики-нолики / М. Гарднер – М.: Книга по Требованию, 2013. – 352 с.

ISBN 978-5-458-24654-5

Новая книга хорошо известного советскому читателю американского популяризатора науки Мартина Гарднера, продолжающая серию книг по занимательной математике, содержит эссе, задачи и головоломки из различных областей математики. Рассчитана на любителей занимательной математики.

ISBN 978-5-458-24654-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОТ ПЕРЕВОДЧИКА

Перед вами новая книга Мартина Гарднера — патриарха современной занимательной математики, книгами которого зачитываются люди самого разного возраста и самых различных профессий во многих странах. Советский читатель хорошо знаком со многими произведениями М. Гарднера, выпущенными на русском языке*, и уже сумел в полной мере оценить его изящные рассуждения, неумную фантазию, прихотливые и парадоксальные повороты его мысли, глубокое эстетическое чутье и широчайшую эрудицию. Сейчас, когда время энциклопедистов-математиков уходит все дальше и дальше в прошлое, он остается, пожалуй, одним из немногих специалистов (не имея, кстати, никакой ученой степени), которые в равной мере свободно ориентируются и в математическом анализе, и в теории вероятностей, и в топологии, и в комбинаторике, и во множестве других разделов математики, о которых непосвященный человек знает лишь понаслышке. А если прибавить к этому удивительную способность заинтересовать и увлечь за собой читателя, в яркой и занимательной форме донося до него идеи, лежащие где-то совсем неподалеку от переднего края науки, а иногда и за ним, на совершенно неизведанных территориях, то становится понятным, почему книги, на обложке которых стоит имя М. Гарднера, не залеживаются на прилавках книжных магазинов.

По своей структуре данная книга занимает как бы промежуточное положение между тремя сборниками головоломок и математических игр, открывшими серию книг по занимательной математике, выпускаемую издательством «Мир», и двумя последними по времени книгами этой серии, посвященными геометрическим, логическим, физическим и другим парадоксам. Книга в полной мере позволяет оценить все разнообразие используемых Гарднером средств — от хитроумных головоломок, новых подходов к классическим задачам, изящных игрушек, теория которых тесно связана с важными проблемами современной математики, ошибочных рассуждений и парадоксов, задачек с «секретом» и математических игр до таких, казалось бы, далеких от математики вещей, как торговая реклама. Особый интерес представляют три последние главы книги, которые посвя-

* Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. — М.: Мир, 1971; Математические досуги. — М.: Мир, 1972; Математические новеллы. — М.: Мир, 1974; Есть идея! — М.: Мир, 1982; А ну-ка, догадайся! — М.: Мир, 1984 и др.

щены придуманной У. Конуэем увлекательной игре «Жизнь», послужившей началом практически нового раздела занимательной математики, интенсивно развивающегося в результате усилий многочисленных энтузиастов.

Хочется надеяться, что знакомство с новой книгой Мартина Гарднера позволит читателям еще полнее оценить удивительную широту и непредсказуемость этого замечательного популяризатора науки и доставит им немало приятных, а заодно и поучительных минут.

И. Зильо

ВВЕДЕНИЕ

— Тогда нам остается еще одна игра.

— Какая?

— Самая простая, — сказал я. — Она называется скука. Никаких тебе правил, игральных досок или фигур.

— А как в нее играют? — понинтересовалась Аманда.

— Скука — это отсутствие всяческих игр.

*Доналд Бартелли.
Запретные удовольствия*

Как показали недавние исследования постановки математического образования в США, одной из основных особенностей преподавания математики, особенно на начальных этапах обучения, к сожалению, является скука. Одни преподаватели, по-видимому, плохо знают математику, другие ее вообще не знают. А если математика наскучила самим учителям, то можем ли мы требовать от учеников, чтобы им не было скучно?

Подобно другим естественным наукам, математика представляет собой игру, в которую мы играем с окружающим миром, со Вселенной. Самые лучшие математики и самые хорошие преподаватели — это, очевидно, люди, которые прекрасно разбираются в ее правилах, а также получают удовольствие от самого процесса игры. Рэймонд Смаллиан, большой охотник до всяких философских и математических игр, в своей интереснейшей книге «5000 лет до нашей эры и другие философские фантазии» * рассказывает, как однажды, читая курс элементарной геометрии, он

* Smullyan R. 5000 B. C. and Other Philosophical Fantasies. — 1983.

попытался подвести слушателей к пониманию теоремы Пифагора следующим образом:

— Я начертил на доске прямоугольный треугольник с квадратами, построенными на его гипотенузе и катетах, и сказал: «Очевидно, что квадрат, построенный на гипотенузе, занимает большую площадь, чем любой из двух других квадратов. А теперь представьте себе, что эти квадраты сделаны из кованого золота и вам предлагают взять себе либо один большой квадрат, либо два маленьких. На каком квадрате вы остановите свой выбор?»

Интересно отметить, что мнения в классе разделились примерно пополам — одни ученики предпочли большой квадрат, другие — два маленьких. Возникла оживленная дискуссия. Обе группы учеников в равной степени были удивлены, когда я объяснил им, что никакой разницы в данном случае нет.

Именно это чувство радостного удивления и отличает всех великих математиков, точно так же как лучших преподавателей математики отличает способность передать его своим ученикам. И не знаю лучшего способа осуществить это, особенно среди людей, начинающих изучать математику, чем с помощью игр, загадок, парадоксов, фокусов и прочих веселых атрибутов так называемой «занимательной математики».

«Загадки и игры — богатейший источник стандартных примеров, которые можно использовать для иллюстрации и проверки эффективности тех или иных методов решения», — пишет Нильс Нильссон в своем широко известном учебнике «Методы решения задач в теории искусственного интеллекта»*. Там же он приводит следующие слова Марвина Мински: «Мы выбираем игры и математические задачи не потому, что они представляются нам очевидными и простыми; скорее всего, дело в том, что они обеспечивают нам максимальную сложность при минимальной исходной структуре, в результате чего после сравнительно небольшого экскурса в программирование становится возможным анализировать по-настоящему трудные ситуации».

* Nilsson N. Problem-Solving Methods in Artificial Intelligence. — New York: Wiley, 1978.

Нильссон и Мински имели в виду значение «занимательной математики» в случае обучения решению задач на вычислительных машинах, однако ценность ее оказывается ничуть не меньше и при обучении задач «вручную», без помощи ЭВМ. В этой книге, которая является десятым сборником материалов, написанных мною для раздела «Математические игры» в журнале *Scientific American*, вы найдете математические развлечения самого разного рода. Последние три главы (третья из них была написана специально для этой книги) посвящены изобретению Джона Конуэя — увлекательной игре «Жизнь», возможности которой еще не до конца исследованы сегодня.

Обе опубликованные ранее статьи об игре «Жизнь», в которых я удостоился описать эту игру впервые, вызвали среди любителей программирования во многих странах мира больше интереса, чем что-либо написанное мною до этого. Теперь, когда программы игры «Жизнь» потихоньку начинают проникать на дисплеи домашних компьютеров, интерес к этому необыкновенному развлечению возродился вновь. Хотя правила игры в «Жизнь» необычайно просты, сложность ее построений столь невообразима, что всякого, кто начинает экспериментировать с ее «формами существования», охватывает ощущение грандиозности, глубины и загадочности математических структур. Мало кому удавалось описать подобное чувство так ярко и образно, как это сделал английский математик Джемс Сильвестр в следующем отрывке:

«Математика — это не книга в толстенном переплете с медными застёжками, разобраться в содержании которой можно, лишь вооружившись огромным терпением; это не рудник, в котором ценные породы встречаются лишь в отдельных жилах и залежах и добываются невероятным трудом; это не почва, плодородие которой постоянно истощается из-за необходимости непрерывно собирать урожай; это не материк и не океан, чьи очертания можно определить с нужной вам точностью и нанести на карту; она так же безгранична, как пространство, которое все же оказывается слишком тесным для ее устремлений; возможности ее так же бесконечны, как миры, беспорядочно громоздящиеся друг на друга и множащиеся

перед взором астронома; ее так же нельзя вместить в определенные рамки или границы либо свести к определениям неизменной значимости, как нельзя сделать это с человеческим сознанием, с самой жизнью, которая, кажется, дремлет в любом простейшем организме, в каждом атоме материи, в каждом листике, каждой почке или клетке и в то же время всегда готова мгновенно преобразиться в новые формы растительного и животного существования».

Мартин Гарднер

ГЛАВА 1

КОЛЕСА

Осознание того удивительного обстоятельства, что гладкие круглые объекты могут покорять пространство путем простого перекатывания, вместо того чтобы с трудом продвигаться вперед, тяжело поднимая неуклюжие конечности, явилось, наверное, самым благотворным толчком в развитии молодого человечества.

Владимир Набоков. Говори, память

Без колеса в мире все оказалось бы совершенно по-иному. Не говоря уже о транспорте, даже если вспомнить лишь о применении колес в простых механизмах — блоках, передачах, гироскопах и т. д., то трудно представить себе сколько-нибудь развитое человеческое общество, которое смогло бы обходиться без них. Герберт Уэллс в романе «Война миров» описывает марсианскую цивилизацию, которая далеко обогнала земную, однако в своих хитроумных машинах никак не использует колесо. По-видимому, Уэллс намеренно описал совершенно невозможную ситуацию: так, легко можно представить себе, что колесо не сумели бы изобрести американские индейцы, но чтобы колеса не знала цивилизация, способная посылать космические корабли с Марса на Землю, — вряд ли.

До недавних пор считалось, что колесо впервые появилось в Месопотамии. Изображения колесниц, обнаруженные здесь археологами, относятся к 3000 г. до н. э., а найденные в раскопках остатки массивных дискообразных колес датируются 2700 г. до н. э. Однако вскоре после второй мировой войны советские археологи обнаружили на Северном Кавказе

глиняные модели колесных телег и отпечатки колес погребальных повозок, которые позволяют предположить, что колесо появилось в степях Юго-Восточной Европы, возможно, еще раньше, чем в Месопотамии. При этом оно могло быть изобретено независимо в двух или нескольких местах, не имеющих связи друг с другом, или же могло распространиться благодаря взаимному проникновению культур, как это хорошо описал Джон Апдайк в следующем четверостишии, взятом из его поэмы «Колесо»:

О центробежной силе вовсе
Не слыхивали эскимосы,
Пока со льдин не увидали,
Как катит Бэрд, крутя педали*.

Может показаться удивительным, что в процессе эволюции колесо не получило своего развития в качестве двигательного органа животных, однако, подумав, начинаешь понимать, как сложно было бы для биологических объектов осуществлять вращение своих круглых конечностей. Наверное, ближе всего природа подошла к колесному транспорту, создав кусты перекасти-поля. (Впрочем, голландский художник Мориц Эшер придумал существо, способное сворачиваться в колесо и с большой скоростью катиться вперед. Кто знает, быть может, на других планетах и есть такие существа?) Возможно, что и на Земле в клетках живых организмов имеются специальные субмикроскопические вращательные устройства, предназначенные для сворачивания и разворачивания двойных спиралей ДНК, хотя их существование до сих пор остается под вопросом.

Вращающееся колесо обладает множеством парадоксальных свойств. Так, например, легко заметить, что точки, оказавшиеся на самом верху колеса, движутся относительно Земли гораздо быстрее, чем точки, расположенные в нижней его части. Максимальной скорости точка, лежащая на ободу колеса, достигает тогда, когда она оказывается строго в вершине колеса, а минимальной (нулевой) скорости — когда она касается Земли. У железнодорожных колес с ребордами, края которых опускаются немного ниже уровня рельсов, имеются даже небольшие участки

* Перевод А. Глебовской,

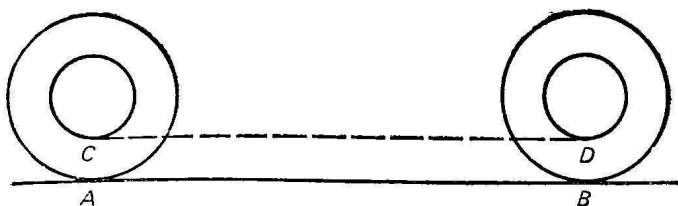


Рис. 1. Аристотелев парадокс с колесом.

вблизи обода, точки которых движутся в противоположном ходу поезда направлении. Г. К. Честертон в своей книге «Тревоги и размышления», в эссе, посвященном колесам, уподобляет колесо здравомыслящему обществу, «одна часть которого постоянно и без всяких усилий возносится к небу, в то время как другая его часть беспрестанно склоняет свою голову в пыль». Здесь же в своей характерной манере он напоминает читателям, что «не может быть никакого Переворота без вращения».

Самый хитроумный из всех связанных с колесом парадоксов сравнительно мало известен, хотя это и может показаться странным, если вспомнить, что впервые он был упомянут еще в написанной на греческом языке «Механике». Этот труд обычно приписывают Аристотелю, но скорее всего он был создан кем-то из его учеников, живших позднее. О «колесе Аристотеля», как обычно называют этот парадокс, написано множество работ, среди авторов которых фигурируют такие выдающиеся математики, как Галилей, Декарт, Ферма и др. Когда большое колесо, изображенное на рис. 1, катится от точки *A* к точке *B*, обод малого колеса будет катиться параллельно ему по прямой, соединяющей точки *C* и *D*. (Если бы эти прямые действительно представляли собой две колеи, то совершенно очевидно, что подобное двойное колесо не смогло бы гладко катиться по обеим колеям сразу. Оно либо катилось бы по верхней колее, но тогда большее колесо из-за скольжения постоянно отставало бы на нижней колее; либо оно катилось бы по нижней колее, но тогда меньшее колесо на верхней колее проскальзывало бы вперед. Суть парадокса заключается, однако, не в этом.) Предположим, что большее колесо катится без скольжения по прямой *AB*. В каждый момент времени, когда та

или иная точка на ободе большого колеса касается линии AB , некая вполне определенная точка на ободе меньшего колеса соприкасается с прямой CD . Другими словами, все точки меньшей окружности можно привести во взаимно однозначное соответствие с точками большей окружности. При этом ни на одной из окружностей не остается «свободных» точек. Это рассуждение, казалось бы, доказывает, что обе наши окружности имеют одинаковую длину.

Колесо Аристотеля тесно связано с известными парадоксами движения Зенона и нисколько не уступает им по глубине. Современных математиков, однако, этот парадокс никак не ставит в тупик, поскольку им известно, что множество точек на произвольном отрезке некой кривой — это множество, мощность которого Георг Кантор обозначает числом «алеф-один», вторым по порядку из введенных им трансфинитных чисел. Это число определяет собой так называемую «мощность континуума». Так, точки отрезка длиной в 1 см могут быть приведены во взаимно однозначное соответствие с точками прямой линии длиной в 1 млн. км или даже с точками линии бесконечной длины. Более того, не представляет труда доказать, что множество внутренних точек квадрата или куба любого размера или даже любого бесконечного евклидова пространства, обладающего конечным числом измерений, также обладает мощностью алеф-один. Конечно, до Кантора математики не были знакомы с необычными свойствами трансфинитных чисел, и потому так занятно читать теперь об их тщетных попытках разрешить парадокс колеса.

Галилео Галилей попытался выяснить, что получится, если оба колеса заменить правильными многоугольниками, например квадратами (рис. 2). После того как большой квадрат сделает полный оборот вдоль прямой AB , оказывается, что стороны малого квадрата будут совпадать с линией CD лишь на четырех интервалах, отделенных друг от друга тремя пропущенными участками. Если наши колеса представляют собой пятиугольники, то малый пятиугольник при каждом повороте будет перепрыгивать четыре свободных участка или больше в случае многоугольников с большим числом сторон. По мере увеличения числа сторон многоугольников количество