

М.Я. Выгодский

Справочник по элементарной математике

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М11

М.Я. Выгодский
М11 Справочник по элементарной математике / М.Я. Выгодский – М.: Книга по Требованию, 2023. – 510 с.

ISBN 978-5-458-25578-3

Этот справочник имеет двоякое назначение. Во-первых, здесь можно привести «моментальную» справку: что такое общий наибольший делитель, что такое тангенс и т. п., как вычислить процент, как построить правильный пятиугольник и т. п.; каковы формулы для корней квадратного уравнения, для объема усеченного конуса и т. п. Все определения, правила, формулы и теоремы сопровождаются примерами; при этом особое внимание уделяется примерам практического характера. Всюду, где это требуется, указывается, в каких случаях и как надо применять то или иное правило, каких ошибок надо избегать и т. п. Во-вторых, этот справочник, по замыслу автора, мог бы служить общедоступным пособием для повторения курса элементарной математики и даже для первого ознакомления с ее практическими применениями.

ISBN 978-5-458-25578-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

§ 6. Действия с одночленами; сложение и вычитание многочленов	160
§ 7. Умножение сумм и многочленов	162
§ 8. Формулы сокращенного умножения многочленов	163
§ 9. Деление сумм и многочленов	165
§ 10. Деление многочлена на двучлен первой степени . .	168
§ 11. Делимость двучлена $x^m \mp a^m$ на $x + a$	169
§ 12. Разложение многочленов на множители	171
§ 13. Алгебраические дроби	172
§ 14. Пропорции	174
§ 15. Зачем нужны уравнения	176
§ 16. Как составлять уравнения	177
§ 17. Общие сведения об уравнениях	179
§ 18. Равносильные уравнения. Основные приемы решения уравнений	182
§ 19. Классификация уравнений	183
§ 20. Уравнение первой степени с одним неизвестным . .	184
§ 21. Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	186
§ 22. Решение системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	188
§ 23. Общие формулы и особые случаи решения системы двух уравнений первой степени с двумя неизвестными	192
§ 24. Система трех уравнений первой степени с тремя неизвестными	195
§ 25. Правила действий со степенями	201
§ 26. Действия с корнями	203
§ 27. Иррациональные числа	206
§ 28. Квадратное уравнение; мнимые и комплексные числа	209
§ 29. Решение квадратного уравнения	212
§ 30. Свойства корней квадратного уравнения	215
§ 31. Разложение квадратного трехчлена на множители	216
§ 32. Уравнения высших степеней, разрешаемые с помощью квадратного уравнения	217
§ 33. Система уравнений второй степени с двумя неизвестными	218
§ 34. О комплексных числах	221
§ 35. Основные соглашения о комплексных числах	222
§ 36. Сложение комплексных чисел	223
§ 37. Вычитание комплексных чисел	224
§ 38. Умножение комплексных чисел	224
§ 39. Деление комплексных чисел	225

§ 40. Геометрическое изображение комплексных чисел	227
§ 41. Модуль и аргумент комплексного числа	229
§ 42. Тригонометрическая форма комплексного числа	231
§ 43. Геометрический смысл сложения и вычитания комплексных чисел	233
§ 44. Геометрический смысл умножения комплексных чисел	236
§ 45. Геометрический смысл деления комплексных чисел	238
§ 46. Возведение комплексного числа в целую степень	240
§ 47. Извлечение корня из комплексного числа	241
§ 48. Возведение комплексного числа в любую действительную степень	245
§ 49. Некоторые сведения об алгебраических уравнениях высших степеней	247
§ 50. Общие сведения о неравенствах	250
§ 51. Основные свойства неравенств	251
§ 52. Некоторые важные неравенства	253
§ 53. равносильные неравенства. Основные приемы решения неравенств	258
§ 54. Классификация неравенств	259
§ 55. Неравенство первой степени с одним неизвестным	260
§ 56. Системы неравенств первой степени	261
§ 57. Простейшие неравенства второй степени с одним неизвестным	262
§ 58. Неравенства второй степени с одним неизвестным (общий случай)	262
§ 59. Арифметическая прогрессия	264
§ 60. Геометрическая прогрессия	265
§ 61. Отрицательные, нулевой и дробные показатели степени	267
§ 62. Сущность логарифмического метода; составление таблицы логарифмов	271
§ 63. Основные свойства логарифмов	274
§ 64. Натуральные логарифмы; число e	276
§ 65. Десятичные логарифмы	280
§ 66. Действия с искусственными выражениями отрицательных логарифмов	282
§ 67. Нахождение логарифма по числу	285
§ 68. Нахождение числа по логарифму	288
§ 69. Таблица антилогарифмов	290
§ 70. Примеры логарифмических вычислений	291
§ 71. Соединения	293
§ 72. Бином Ньютона	297

IV. Геометрия**A. Геометрические построения**

1. Через данную точку провести прямую,
параллельную данной прямой 303
2. Разделить данный отрезок пополам 303
3. Разделить данный отрезок на данное число равных
частей. 303
4. Разделить данный отрезок на части,
пропорциональные данным величинам 304
5. Восставить перпендикуляр к прямой в данной ее точке 304
6. Опустить перпендикуляр из данной точки на прямую 304
7. При данной вершине и луче построить угол,
равный данному углу 305
8. Построить углы 60° и 30° 305
9. Построить угол 45° 305
10. Разделить данный угол пополам 306
11. Разделить данный угол на три равные части 306
12. Через две данные точки провести окружность
данного радиуса 306
13. Через три данные точки провести окружность 306
14. Найти центр данной дуги окружности 307
15. Разделить пополам данную дугу окружности 307
16. Найти геометрическое место точек, из которых
данный отрезок виден под данным углом 307
17. Провести через данную точку касательную к данной
окружности 307
18. Провести к данным двум окружностям общую
внешнюю касательную 308
19. Провести к двум данным окружностям общую
внутреннюю касательную 309
20. Описать окружность около данного треугольника . . 309
21. Вписать окружность в данный треугольник 309
22. Описать окружность около данного прямоугольника 310
23. Вписать окружность в ромб 310
24. Описать окружность около данного правильного
многоугольника 310
25. Вписать окружность в данный правильный
многоугольник 310
26. Построить треугольник по трем сторонам 311
27. Построить параллелограмм по данным сторонам
и одному из углов 311
28. Построить прямоугольник по данным основанию
и высоте 311

29. Построить квадрат по данной стороне	311
30. Построить квадрат по данной его диагонали	311
31. Вписать квадрат в данный круг	312
32. Описать квадрат около данного круга	312
33. Вписать правильный пятиугольник в данный круг .	312
34. Вписать в данный круг правильный шестиугольник и треугольник	312
35. Вписать правильный восьмиугольник в данный круг	313
36. Вписать правильный десятиугольник в данный круг	313
37. Около данного круга описать правильный треугольник, пятиугольник, шестиугольник, восьмиугольник, десятиугольник	313
38. Построить правильный n -угольник по данной его стороне	314

Б. Планиметрия

§ 1. Предмет геометрии	314
§ 2. Исторические сведения о развитии геометрии	315
§ 3. Теоремы, аксиомы, определения	318
§ 4. Прямая линия, луч, отрезок	320
§ 5. Углы	320
§ 6. Многоугольник	322
§ 7. Треугольник	323
§ 8. Признаки равенства треугольников	325
§ 9. Замечательные линии и точки в треугольнике	326
§ 10. Прямоугольные проекции; соотношения между сторонами треугольника	329
§ 11. Параллельные прямые	330
§ 12. Параллелограмм и трапеция	332
§ 13. Подобие плоских фигур, признаки подобия треугольников	335
§ 14. Геометрическое место. Круг и окружность	337
§ 15. Углы в круге; длина окружности и дуги	339
§ 15а. Формула Гюйгенса для длины дуги	342
§ 16. Измерение углов в круге	343
§ 17. Степень точки	345
§ 18. Радиальная ось; радикальный центр	347
§ 19. Вписанные и описанные многоугольники	349
§ 20. Правильные многоугольники	350
§ 21. Площади плоских фигур	352
§ 21а. Приближенная формула площади сегмента	355

В. Стереометрия

§ 1. Общие замечания	356
§ 2. Основные понятия	356
§ 3. Углы	358
§ 4. Проекции	360
§ 5. Многогранный угол	362
§ 6. Многогранники; призма, параллелепипед, пирамида	363
§ 7. Цилиндр	368
§ 8. Конус	369
§ 9. Конические сечения	371
§ 10. Шар	372
§ 11. Сферические многоугольники	374
§ 12. Части шара	376
§ 13. Касательная плоскость шара, цилиндра и конуса .	378
§ 14. Телесные углы	381
§ 15. Правильные многогранники	383
§ 16. Симметрия	384
§ 17. Симметрия плоских фигур	388
§ 18. Подобие тел	389
§ 19. Объемы и поверхности тел	392

V. Тригонометрия

§ 1. Предмет тригонометрии	395
§ 2. Исторические сведения о развитии тригонометрии	396
§ 3. Радианное измерение углов	399
§ 4. Перевод градусной меры в радианную и обратно . .	401
§ 5. Тригонометрические функции острого угла	403
§ 6. Нахождение тригонометрической функции по углу	405
§ 7. Нахождение угла по его тригонометрической функции	408
§ 8. Решение прямоугольных треугольников	409
§ 9. Таблицы логарифмов тригонометрических функций	411
§ 10. Нахождение логарифма тригонометрической функции по углу	413
§ 11. Нахождение угла по логарифму тригонометрической функции	415
§ 12. Решение прямоугольных треугольников с помощью логарифмирования	417
§ 13. Практические применения решения прямоугольных треугольников	419
§ 14. Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же угла	421

§ 15. Тригонометрические функции любого угла	421
§ 16. Формулы приведения	425
§ 17. Формулы сложения и вычитания	427
§ 18. Формулы двойных, тройных и половинных углов	428
§ 19. Преобразование тригонометрических выражений к виду, удобному для логарифмирования	428
§ 20. Преобразование к логарифмическому виду выражений, в которые входят углы треугольника	429
§ 21. Некоторые важные соотношения	430
§ 22. Основные соотношения между элементами треугольника	431
§ 23. Решение косоугольных треугольников	433
§ 24. Обратные тригонометрические (круговые) функции	439
§ 25. Основные соотношения для обратных тригонометрических функций	442
§ 26. О составлении таблиц тригонометрических функций	443
§ 27. Тригонометрические уравнения	445
§ 28. Приемы решения тригонометрических уравнений	448

VI. Функции, графики

§ 1. Постоянные и переменные величины	455
§ 2. Функциональная зависимость между двумя переменными	455
§ 3. Обратная функция	457
§ 4. Задание функции формулой и таблицей	458
§ 5. Обозначение функции	459
§ 6. Координаты	460
§ 7. Графическое изображение функций	461
§ 8. Простейшие функции и их графики	462
§ 9. Графическое решение уравнений	476
§ 10. Графическое решение неравенств	480
§ 11. Понятие о предмете аналитической геометрии	484
§ 12. Предел	486
§ 13. Бесконечно малая и бесконечно большая величины	488

Предметно-именной указатель	491
---------------------------------------	-----

Предисловие

Широко известный справочник М. Я. Выгодского содержит основные разделы элементарной математики — арифметику, алгебру, геометрию, тригонометрию, функции и графики, а также математические таблицы.

Книга дает фактическую справку: что такое наибольший общий делитель, как построить правильный пятиугольник, по какой формуле можно решить квадратное уравнение и т. п. Такая справка находится моментально благодаря предметному указателю и подробному содержанию.

Все определения, правила, формулы и теоремы сопровождаются разнообразными примерами и пояснениями; указывается, в каких случаях и как нужно применять правило, каких ошибок надо избегать и т. д.

Пособие может быть использовано для повторения курса элементарной математики, а также для первого ознакомления с предметом.

В справочнике разъясняются основные понятия и важнейшие методы элементарной математики. Зачем введены в математику отрицательные или мнимые числа? Почему, умножая отрицательное число на отрицательное, мы получаем положительное число? Как вычислены таблицы логарифмов? Вопросы такого рода в школьных учебниках, как правило, не затрагиваются; поэтому им уделено много внимания.

Книга содержит исторические сведения о развитии арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии, необходимые для понимания излагаемых в ней вопросов.

Изложение материала сжатое, но с такой степенью подробности, чтобы им мог пользоваться и тот, кто не знаком с тем или иным разделом. Но, как правило, здесь нет доказательств и выводов — этим справочник отличается от учебников.

Впрочем, иногда даются и выводы. Это сделано в тех случаях, когда в школьных учебниках соответствующие вопросы не рассмотрены.

Книга адресована учащимся и учителям общеобразовательных учреждений, колледжей и лицеев.

I. ТАБЛИЦЫ

§ 1. Некоторые часто встречающиеся постоянные

Величина	n	$\lg n$	Величина	n	$\lg n$
π	3,1416	0,4971	$\sqrt[3]{1:\pi}$	0,6828	$\bar{1},8343$
2π	6,2832	0,7982	$\sqrt[3]{\pi:6}$	0,8060	$\bar{1},9063$
3π	9,4248	0,9743	$\sqrt[3]{3:4\pi}$	0,6204	$\bar{1},7926$
4π	12,5664	1,0992	$\sqrt[3]{\pi^2}$	2,1450	0,3314
$4\pi:3$	4,1888	0,6221	e	2,7183	0,4343
$\pi:2$	1,5708	0,1961	e^2	7,3891	0,8686
$\pi:3$	1,0472	0,0200	\sqrt{e}	1,6487	0,2171
$\pi:4$	0,7854	$\bar{1},8951$	$\sqrt[3]{e}$	1,3956	0,1448
$\pi:6$	0,5236	$\bar{1},7190$	$1:e$	0,3679	$\bar{1},5657$
$\pi:180$	0,0175	$\bar{2},2419$	$1:e^2$	0,1353	$\bar{1},1314$
$2:\pi$	0,6366	$\bar{1},8039$	$\sqrt{1:e}$	0,6065	$\bar{1},7829$
$180:\pi$	57,2958	1,7581	$\sqrt[3]{1:e}$	0,7165	$\bar{1},8552$
$10\ 800:\pi$	3437,7467	3,5363	$M = \lg e$	0,4343	$\bar{1},6378$
$648\ 000:\pi$	206264,81	5,3144	$\frac{1}{M} = \ln 10$	2,3026	0,3622
$1:\pi$	0,3183	$\bar{1},5029$	$2!$	2	
$1:2\pi$	0,1592	$\bar{1},2018$	$3!$	6	
$1:3\pi$	0,1061	$\bar{1},0257$	$4!$	24	
$1:4\pi$	0,0796	$\bar{2},9008$	$5!$	120	
π^2	9,8696	0,9943	$6!$	720	
$2\pi^2$	19,7392	1,2953	$7!$	5040	
$\sqrt{\pi}$	1,7725	0,2486	$8!$	40 320	
$\sqrt{2\pi}$	2,5066	0,3991	$9!$	362 880	
$\sqrt{\pi:2}$	1,2533	0,0981	$10!$	3 628 800	
$\sqrt{1:\pi}$	0,5642	$\bar{1},7514$	$11!$	39 916 800	
$\sqrt{2:\pi}$	0,7979	$\bar{1},9019$	$12!$	479 001 600	
$\sqrt{3:\pi}$	0,9772	$\bar{1},9900$			
$\sqrt{4:\pi}$	1,1284	0,0525			
$\sqrt[3]{\pi}$	1,4646	0,1657			

§ 2. Степени, корни, обратные величины, длины окружностей, площади кругов, натуральные логарифмы

(Для трехзначных чисел можно применить интерполяцию¹⁾; при этом возможна небольшая ошибка в последнем знаке.)

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n^2$
1	1	1	1,000	3,162	1,000	2,154	4,642	1,000	3,14	0,785	0,00000
2	4	8	1,414	4,472	1,260	2,714	5,848	0,500	6,28	3,142	0,69315
3	9	27	1,732	5,477	1,442	3,107	6,694	0,333	9,42	7,069	1,09861
4	16	64	2,000	6,325	1,587	3,420	7,368	0,250	12,57	12,566	1,38629
5	25	125	2,236	7,071	1,710	3,684	7,937	0,200	15,71	19,635	1,60944
6	36	216	2,449	7,746	1,817	3,915	8,434	0,167	18,85	28,274	1,79176
7	49	343	2,646	8,367	1,913	4,121	8,879	0,143	21,99	38,484	1,94591
8	64	512	2,828	8,944	2,000	4,309	9,283	0,125	25,13	50,265	2,07944
9	81	729	3,000	9,487	2,080	4,481	9,655	0,111	28,27	63,617	2,19722
10	100	1000	3,162	10,000	2,154	4,642	10,000	0,100	31,42	78,540	2,30259
11	121	1331	3,317	10,488	2,224	4,791	10,323	0,091	34,56	95,033	2,39790
12	144	1728	3,464	10,954	2,289	4,932	10,627	0,083	37,70	113,097	2,48491
13	169	2197	3,606	11,402	2,351	5,066	10,914	0,077	40,84	132,73	2,56495
14	196	2744	3,742	11,832	2,410	5,192	11,187	0,071	43,98	153,94	2,63906
15	225	3375	3,873	12,247	2,466	5,313	11,447	0,067	47,12	176,72	2,70805

¹⁾ Об интерполяции см. II, § 50.

²⁾ \ln — натуральный логарифм (см. III, § 64).

Продолжение

n	n^2	n^3	\sqrt{n}	$\sqrt{10n}$	$\sqrt[3]{n}$	$\sqrt[3]{10n}$	$\sqrt[3]{100n}$	$\frac{1}{n}$	πn	$\frac{\pi n^2}{4}$	$\ln n$
16	256	4096	4,000	12,649	2,520	5,429	11,696	0,062	50,27	201,06	2,77259
17	289	4913	4,123	13,038	2,571	5,540	11,935	0,059	53,41	226,98	2,83321
18	324	5832	4,243	13,416	2,621	5,646	12,164	0,056	56,55	254,47	2,89037
19	361	6859	4,359	13,784	2,668	5,749	12,386	0,053	59,69	283,53	2,94444
20	400	8000	4,472	14,142	2,714	5,848	12,599	0,050	62,83	314,16	2,99573
21	441	9261	4,583	14,491	2,759	5,944	12,806	0,048	65,97	346,36	3,04452
22	484	10648	4,690	14,832	2,802	6,037	13,006	0,045	69,12	380,13	3,09104
23	529	12167	4,796	15,166	2,841	6,127	13,200	0,043	72,26	415,48	3,13549
24	576	13824	4,899	15,492	2,884	6,214	13,389	0,042	75,40	452,39	3,17805
25	625	15625	5,000	15,811	2,924	6,300	13,572	0,040	78,54	490,87	3,21888
26	676	17576	5,099	16,125	2,962	6,383	13,751	0,038	81,68	530,93	3,25810
27	729	19683	5,196	16,432	3,000	6,463	13,925	0,037	84,82	572,55	3,29584
28	784	21952	5,292	16,733	3,037	6,542	14,095	0,036	87,96	615,75	3,33220
29	841	24389	5,385	17,029	3,072	6,619	14,260	0,034	91,11	660,52	3,36730
30	900	27000	5,477	17,321	3,107	6,694	14,422	0,033	94,25	706,86	3,40120
31	961	29791	5,568	17,607	3,141	6,768	14,581	0,032	97,39	754,77	3,43399
32	1024	32768	5,657	17,889	3,175	6,840	14,736	0,031	100,53	804,25	3,46574
33	1089	35937	5,745	18,166	3,208	6,910	14,888	0,030	103,67	855,30	3,49651
34	1156	39304	5,831	18,439	3,240	6,980	15,037	0,029	106,81	907,92	3,52636
35	1225	42875	5,916	18,708	3,271	7,047	15,183	0,029	109,96	962,1	3,55535