

С. Бернштейн

**О наилучшем приближении
непрерывных функций
посредством многочленов
данной степени**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
С11

С11 **С. Бернштейн**
О наилучшем приближении непрерывных функций посредством многочленов
данной степени / С. Бернштейн – М.: Книга по Требованию, 2023. – 152 с.

ISBN 978-5-458-56993-4

ISBN 978-5-458-56993-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

переменной $f(x)$ была аналитической на некотором отрезке AB , необходимо и достаточно, чтобы наименьшее уклонение $E_n[f(x)]$ на отрезке AB убывало с возрастанием n быстрее, чем члены некоторой убывающей геометрической прогрессии; для того, чтобы функция $f(x)$ имела производные всех порядков, необходимо и достаточно, чтобы, при всяком p , пред. $E_n[f(x)] \cdot n^p = 0$. Вообще, чем проще дифференциальная природа функции, тем быстрее убывает E_n , и наоборот.

Таким образом рассмотрение наименьшей возможной погрешности, при приближении функции посредством многочленов возрастающих степеней, дает совершенно общее основание для последовательной классификации и исследования всех непрерывных функций вещественной переменной.

Считаю своим долгом выразить свою признательность Физико-Математическому Факультету Харьковского Университета за средства, доставленные им для напечатания этого сочинения.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ.

О нѣкоторыхъ общихъ свойствахъ рядовъ многочленовъ.

ГЛАВА I.

Предварительныя теоремы о многочленахъ.

1. Многочлены наименѣе уклоняющіеся отъ нуля. Въ своихъ знаменитыхъ изслѣдованіяхъ о приближенныхъ многочленахъ Чебышевъ построилъ многочлены наименѣе уклоняющіеся отъ нуля въ данномъ промежуткѣ; а именно, онъ доказалъ, что изъ всѣхъ многочленовъ вида

$$Ax^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n,$$

гдѣ A данная величина, а остальные коэффициенты произвольны, наименѣе уклоняется отъ нуля въ промежуткѣ $(-h, +h)$ многочленъ

$$\frac{Ah^n}{2^{n-1}} \cdot T_n\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{Ah^n \cos n \arccos \frac{x}{h}}{2^{n-1}} = \frac{A}{2^n} \cdot [(x + \sqrt{x^2 - h^2})^n + (x - \sqrt{x^2 - h^2})^n]. \quad (1)$$

Для краткости мы будемъ въ дальнѣйшемъ называть $s \cdot T_n(x)$, гдѣ s постоянная величина, *тригонометрическими многочленами*, и выведемъ нѣкоторые ихъ свойства, аналогичныя свойству, открытому Чебышевымъ.

2. Теорема. Если многочленъ $P_n(x) = p_0x^n + p_1x^{n-1} + \dots + p_n$ обладаетъ свойствомъ, что $|P'_n(x) \cdot \sqrt{1-x^2}|$ достигаетъ въ промежуткѣ $-1, +1$ значенія M , то $|P_n(x)|$ не можетъ въ этомъ промежуткѣ оставаться меньше $\frac{M}{n}$; эта послѣдняя величина не будетъ превзойдена лишь въ случаѣ, когда $P_n(x)$ тригонометрическій многочленъ.

Чебышевъ допускалъ безъ доказательства существованіе многочленовъ данной степени, наименѣе уклоняющихся отъ данной функціи. Но современный анализъ требуетъ этого доказательства, такъ какъ немало есть задачъ о минимумахъ, напримѣръ, въ варіаціонномъ исчисленіи, которыя не имѣютъ рѣшеній. Въ виду этого намъ необходимо сдѣлать нѣсколько предварительныхъ замѣчаній, для того, чтобъ показать, что среди разсматриваемыхъ многочленовъ существуетъ, дѣйствительно, одинъ или нѣсколько такихъ многочленовъ, для которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ достигаетъ наименьшаго возможнаго значенія. Разсмотримъ: вообще, произведеніе $|P'_n(x) \cdot \varphi(x)|$, гдѣ $\varphi(x)$ какая нибудь непрерывная функція (голоморфная при всѣхъ значеніяхъ x даннаго промежутка, кромѣ тѣхъ, можетъ быть, гдѣ $\varphi(x) = 0$). Максимумъ этого произведенія $m(p_0, p_1, \dots, p_{n-1})$ есть непрерывная однородная функція первой степени коэффиціентовъ $p_0, p_1, \dots, p_{n-1}$, т. е., при умноженіи ихъ на одно и то же число k , m будетъ умножено на то же число k . Значенія коэффиціентовъ, удовлетворяющія уравненію $m = M$, гдѣ M , данная величина, можно раздѣлить на n группъ: въ первой $|p_0| \geq |p_i|$, во второй $|p_1| \geq |p_i|$ и т. д. ($i = 0, 1, \dots, n-1$).

Разсмотримъ, напримѣръ, значенія первой группы; въ данномъ случаѣ уравненіе $m = M$ можемъ написать такъ:

$$p_0 \cdot m\left(1, \frac{p_1}{p_0}, \frac{p_2}{p_0}, \dots, \frac{p_{n-1}}{p_0}\right) = M,$$

или, полагая

$$\frac{p_1}{p_0} = \lambda_1, \quad \frac{p_2}{p_0} = \lambda_2 \text{ и т. д.,}$$

$$p_0 = \frac{M}{m(1, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1})}.$$

Такимъ образомъ, p_0 есть конечная и непрерывная функція переменныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}$, которыя по абсолютному значенію не превышаютъ единицу; поэтому максимумъ $|p_0(x^n + \lambda_1 x^{n-1} + \dots + \lambda_{n-1}x) + p_n| = |P_n(x)|$ есть непрерывная функція $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, p_n$; при этомъ, очевидно, можно ограничиться разсмотрѣніемъ значеній $|p_n|$, не превышающихъ нѣкотораго числа H . Но непрерывная функція n переменныхъ $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, p_n$, принимающихъ всевозможныя значенія нѣкоторой замкнутой области, достигаетъ своего минимума для опредѣленныхъ значеній переменныхъ въ этой области. Аналогичнымъ образомъ можно доказать существованіе многочленовъ, наименѣе уклоняющихся отъ нуля, соответствующихъ каждой изъ n группъ коэффиціентовъ. Выбирая ту изъ группъ, которая

даетъ наименьшее значеніе для максимума $|P_n(x)|$, мы убѣждаемся наконецъ, что среди многочленовъ, для которыхъ $n = M$, дѣйствительно, есть одинъ или нѣсколько такихъ, которыхъ максимумъ $|P_n(x)|$ равенъ наименьшему возможному значенію.

Итакъ пусть $P(x)$ будетъ тотъ изъ подлежащихъ сравненію многочленовъ степени n , который наименѣе уклоняется отъ нуля. Обозначимъ черезъ $x_1, x_2, \dots, x_k$ точки, въ которыхъ модуль $P(x)$ получаетъ наибольшее значеніе L , и черезъ ζ —ту точку, гдѣ $P'(x) \cdot \varphi(x)$ достигаетъ максимума M .

Я говорю, что нельзя найти такого многочлена $F_n(x)$ степени n , который бы удовлетворялъ уравненіямъ

$$F_n(x_1) = P(x_1), \quad F_n(x_2) = P(x_2), \dots, F_n(x_k) = P(x_k), \quad F'_n(\zeta) \cdot \varphi(\zeta) = 0 \quad (2)$$

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ равенства (2) были осуществлены, то можно было бы построить многочленъ $P - \lambda F_n$ степени не выше n , выбравши положительное число λ слѣдующимъ образомъ: окружимъ точки $x_1, x_2, \dots, x_k$ промежутками достаточно малыми, чтобы $P(x)$ и $F_n(x)$ сохраняли въ каждомъ изъ нихъ тотъ же самый знакъ, и отнимемъ эти промежутки изъ отрѣзка $(-1, +1)$; тогда въ оставшейся части отрѣзка $|P(x)| < L - \delta$, гдѣ δ нѣкоторое опредѣленное положительное число (меньшее, если хотимъ, чѣмъ $\frac{L}{2}$); послѣ этого мы выберемъ положительное количество λ настолько малымъ, чтобы $\lambda |F_n(x)| < \delta$. Въ такомъ случаѣ оказалось бы, что многочленъ $P - \lambda F_n$ по абсолютному значенію всегда менѣе (и никогда не равенъ) L , такъ какъ въ отнятыхъ промежуткахъ $|P - \lambda F_n| < |P| \leq L$, и въ оставшейся части отрѣзка $|P - \lambda F_n| < (L - \delta) + \delta = L$, при чемъ $[P'(\zeta) - \lambda F'_n(\zeta)] \cdot \varphi(\zeta) = M$. Поэтому обозначая черезъ $M_1 (M_1 \geq M)$ максимумъ $|[P(x) - \lambda F'_n(x)] \cdot \varphi(x)|$, убѣждаемся, что многочленъ $[P(x) - \lambda F'_n(x)] \cdot \frac{M}{M_1}$ подлежалъ бы сравненію, уклоняясь отъ нуля менѣе чѣмъ $P(x)$, что противорѣчило бы нашему допущенію, что среди подлежащихъ сравненію многочленовъ нѣтъ такого, который уклоняется отъ нуля менѣе, чѣмъ $P(x)$.

Слѣдовательно, система уравненій (2) не имѣетъ рѣшенія, а потому, либо число уравненій $(k+1)$ больше числа неизвѣстныхъ коэффициентовъ $(n+1)$, т. е. $k > n$, либо $k \leq n$ и всѣ опредѣлители $(k+1)$ -го порядка матрицы

$$\begin{vmatrix} x_1^n & x_1^{n-1} & \dots & x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_k^n & x_k^{n-1} & \dots & x_k & 1 \\ n\zeta^{n-1} & \dots & \dots & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

равны нулю (такъ какъ, очевидно, $\varphi(\zeta) \geq 0$).

Въ первомъ случаѣ $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ. Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ степень многочлена $P(x)$ равна n , то во всякомъ случаѣ $k \leq n+1$; поэтому при допущеніи, что $k > n$, находимъ $k=n+1$. Такимъ образомъ, изъ значеній $x_1, x_2, \dots, x_k$, два равны $+1$ и -1 , а остальные суть $(n-1)$ корень уравненія $P'(x)=0$. Такъ какъ съ другой стороны всѣ эти значенія обращаютъ въ нуль $P^2(x)-L^2$, то всѣ корни $P'(x)=0$ суть двойные корни уравненія $P^2(x)-L^2=0$, имѣющаго еще всего два простыхъ корня $+1$ и -1 . Отсюда выводимъ дифференціальное уравненіе Чебышева

$$P^2(x) - L^2 = \frac{(x^2-1) \cdot [(P'(x))]^2}{n^2}, \quad (3)$$

единственнымъ раціональнымъ рѣшеніемъ котораго служить $L \cos n \arccos x$. Слѣдовательно, $P(x) = L \cos n \arccos x$.

Во второмъ случаѣ, $k=n$. Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $k < n$, то $P(x) + (ax+b)R(x)$, гдѣ $R(x) = (x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_k)$, былъ бы многочленомъ степени не выше n . Но полагая $F_n(x) = P(x) + (ax+b) \cdot R(x)$, мы можемъ, очевидно выбрать коэффиціенты (a, b) такъ, чтобы всѣ уравненія (2) были удовлетворены; для этого достаточно удовлетворить уравненію

$$P(\zeta) + aR(\zeta) + (a\zeta + b) \cdot R'(\zeta) = 0, \quad (2^{bis})$$

къ которому приводится послѣднее изъ уравненій (2), между тѣмъ какъ первыя k уравненій удовлетворены тождественно. Уравненіе же (2^{bis}) всегда разрѣσιμο, ибо не можетъ быть одновременно $R'(\zeta)=0$ и $R(\zeta)=0$. Но такъ какъ по доказанному уравненія (2) несовмѣстимы, слѣдовательно $k=n$.

Однако, какъ мы увидимъ, для функцій $\varphi(x)$, разсматриваемыхъ нами, второй случай вообще не можетъ представиться. Для этого перейдемъ къ слѣдствіямъ, вытекающимъ изъ предположенія, что $k=n$.

Прежде всего мы замѣчаемъ, полагая $F_n(x) = P(x) + bR(x)$, что уравненія (2) приводятся къ единственному уравненію $P(\zeta) + bR'(\zeta) = 0$,

которое будет неразрѣшимо лишь въ случаѣ, когда $R'(\zeta) = 0$. Такимъ образомъ ζ есть корень уравненія

$$R'(x) = 0.$$

Но

$$R(x) = C \frac{(x^2 - 1) \cdot P'(x)}{x - \beta},$$

гдѣ C —постоянный множитель, β —тотъ изъ корней уравненія

$$(x^2 - 1) P'(x) = 0,$$

котораго не хватаетъ уравненію $R(x) = (x - x_1) \dots (x - x_k) = 0$. Поэтому ζ удовлетворяетъ одновременно уравненіямъ

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{(x^2 - 1) \cdot P'(x)}{x - \beta} \right] = 0 \quad \text{и} \quad (x^2 - 1) \cdot \frac{d}{dx} [P'(x) \cdot \varphi(x)] = 0 \quad (4)$$

Легко обнаруживается несовмѣстимость этихъ уравненій, если $\varphi(x) = 1 - x^2$. Тогда, очевидно, $\zeta^2 - 1 < 0$, такъ что второе уравненіе обращается въ

$$\frac{d}{dx} [P'(x) \cdot (1 - x^2)] = 0,$$

вслѣдствіе чего первое уравненіе приводится къ $P'(x) = 0$, что невозможно, такъ какъ $|P'(x) \cdot (1 - x^2)|$ при $x = \zeta$, по предположенію, достигаетъ своего наибольшаго значенія M .

Докажемъ, что случай $k = n$ также не представляется, если $\varphi(x) = \sqrt{1 - x^2}$, какъ это имѣть мѣсто въ условіи теоремы. Если мы положимъ $P'(x) \cdot \sqrt{1 - x^2} = P_1(x)$, то уравненія (4) примутъ форму

$$\frac{d}{dx} \left[P_1 \cdot \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x - \beta} \right] = 0, \quad \frac{dP_1}{dx} = 0,$$

или

$$\frac{dP_1}{dx} \cdot (1 - x^2)(x - \beta) + P_1 \cdot (\beta x - 1) = 0, \quad \frac{dP_1}{dx} = 0,$$

откуда

$$\beta x - 1 = 0;$$

поэтому $\zeta = \frac{1}{\beta}$. И такъ какъ $|\zeta| < 1$, слѣдовательно,

$$|\beta| > 1.$$

Съ другой стороны, легко убѣдиться, что $P(x)$ удовлетворяетъ дифференціальному уравненію вида

$$P^2 - L^2 = \frac{(P')^2 \cdot (x^2 - 1) \cdot (x^2 + bx + c)}{n^2 (x - \beta)^2}. \quad (5)$$

Дѣйствительно, многочленъ $P^2 - L^2$ степени $2n$ имѣетъ двойными корнями тѣ изъ значеній $x_1, x_2, \dots, x_n$, которые отличны отъ ± 1 (такъ какъ онѣ обращаютъ въ нуль P'), и простыми корнями тѣ изъ значеній, которые равны ± 1 . $P^2 - L^2$ дѣлится поэтому на многочленъ $(2n-2)$ -ой степени $\frac{P'^2 \cdot (x^2 - 1)}{(x - \beta)^2}$, и такъ какъ коэффициентъ перваго члена дѣлимаго въ n^2 разъ меньше коэффициента перваго члена дѣлителя, то частное имѣетъ форму $\frac{x^2 + bx + c}{n^2}$; откуда вытекаетъ уравненіе (5).

Я говорю, что корни уравненія

$$x^2 + bx + c = 0,$$

вещественны, имѣютъ тотъ же знакъ, что β , и больше его по абсолютному значенію. Въ самомъ дѣлѣ, допустимъ для опредѣленности, что $\beta > 0$; въ такомъ случаѣ $\beta > 1$. Если x возрастая отъ единицы достигаетъ значенія β , гдѣ P' обращается въ нуль, P^2 возрастаетъ отъ L^2 до нѣкотораго числа L_1^2 , затѣмъ P^2 убываетъ; но, такъ какъ P' болѣе не мѣняетъ знака, то P^2 , пройдя, при $x = \gamma > \beta$, черезъ значеніе L^2 , обращается въ нуль, и послѣ этого возрастаетъ до безконечности, проходя снова черезъ значеніе L^2 , при $x = \delta > \gamma > \beta$. Очевидно, что γ и δ суть корни уравненія $x^2 + bx + c = 0$. Итакъ уравненіе (5) можемъ написать въ видѣ

$$P^2 - L^2 = \frac{(x^2 - 1)(x - \gamma)(x - \delta)}{n^2 \cdot (x - \beta)^2} \cdot (P')^2, \quad (6)$$

при чемъ $\gamma > \beta > 0$ и $\delta > \beta > 0$. (То же самое рассужденіе привело бы, при $\beta < 0$, къ $\gamma < \beta < 0$ и $\delta < \beta < 0$).

Слѣдовательно, для $|x| < 1$, имѣемъ

$$\Theta^2 \cdot (L^2 - P^2) = \frac{(1 - x^2) \cdot (P')^2}{n^2}, \quad (6bis)$$

гдѣ $\Theta < 1$; поэтому

$$|P' \cdot \sqrt{1 - x^2}| \leq n \Theta L.$$

Такимъ образомъ, если бы $k=n$, то, несомнѣнно, наибольшее значеніе L модуля $P(x)$, удовлетворяло бы неравенству $L \geq \frac{M}{n\theta} > \frac{M}{n}$. Напротивъ, при $k=n+1$, мы нашли, что $P(x) = L \cos n\alpha \cos x$, откуда $|P' \cdot \sqrt{1-x^2}| = Ln |\sin n\alpha \cos x|$; такъ что въ этомъ случаѣ $L = \frac{M}{n}$. Слѣдовательно, только случай, когда $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ, приводитъ къ наименьшему значенію для L , при чемъ $L = \frac{M}{n}$, ч. и. т. д.

3. Слѣдствія. а) Если на отрезкѣ $(-h, +h)$ произведение $|P'_n(x) \cdot \sqrt{h^2-x^2}|$ достигаетъ значенія M , то, при предположеніи, что $P_n(x)$ есть многочленъ степени n , $|P_n(x)|$ не можетъ на разсматриваемомъ отрезкѣ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

Въ самомъ дѣлѣ, положимъ $x = hx_1$. Въ такомъ случаѣ, $P_n(x) = P_n(hx_1) = Q_n(x_1)$, и $P'_n(x) \cdot \sqrt{h^2-x^2} = Q'_n(x_1) \sqrt{1-x_1^2}$. Примѣняя къ $Q_n(x_1)$ только что доказанную теорему, заключаемъ, что, такъ какъ на отрезкѣ $(-1, +1)$, $|Q'_n(x_1) \cdot \sqrt{1-x_1^2}|$ достигаетъ значенія M , слѣдовательно $|Q_n(x_1)|$ на томъ же отрезкѣ $(-1, +1)$, а $|P_n(x)|$ на отрезкѣ $(-h, +h)$, не можетъ оставаться меньше $\frac{M}{n}$.

б) Если на отрезкѣ (a, b) произведение $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}|$ достигаетъ значенія M , то $|P_n(x)|$ на этомъ отрезкѣ не остается меньше $\frac{M}{n}$.

Это вытекаетъ изъ доказаннаго слѣдствія, если положимъ $x_1 = x - \frac{a+b}{2}$.

с) Если на отрезкѣ (a, b) $|P_n(x)| \leq L$, то на томъ же отрезкѣ $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}| \leq nL$.

Въ самомъ дѣлѣ, еслибъ $|P'_n(x) \cdot \sqrt{(a-x)(x-b)}|$ достигалъ бы значенія $M = nL + \varepsilon$, то $|P_n(x)|$ въ силу предыдущаго слѣдствія получалъ бы значеніе $\frac{M}{n} = L + \frac{\varepsilon}{n}$, что противорѣчитъ условію.

4. Теорема А. А. Маркова ¹⁾. Многочленъ n -ой степени $P_n(x)$ на отрезкѣ $(-1, +1)$ не остается меньше $\frac{M}{n^2}$ по абсолютному значенію, если на томъ же отрезкѣ $|P'_n(x)|$ достигаетъ M .

¹⁾ А. Марковъ. Объ одномъ вопросѣ Д. И. Менделѣева. 1889. Изъ доказательства А. А. Маркова вытекаетъ въ сущности также и теорема (2), хотя она и не формулирована въ упомянутой статьѣ.

Очевидно, что вся первая часть доказательства теоремы (2) (до специализации функции $\varphi(x)$) остается в силѣ. Въ данномъ случаѣ мы должны положить въ уравненіяхъ (4) $\varphi(x) = 1$; такимъ образомъ, если многочленъ $P(x)$, дающій наименьшее отклоненіе L , не тригонометрическій многочленъ и достигаетъ максимальнаго отклоненія только въ n точкахъ, то значеніе ζ , при которомъ $|P'(x)|$ достигаетъ максимума M , удовлетворяетъ уравненіямъ

$$\frac{dP'}{dx} \cdot (x^2 - 1)(x - \beta) + P' \cdot [2x(x - \beta) - (x^2 - 1)] = 0, \quad (x^2 - 1) \frac{dP'}{dx} = 0. \quad (4^{bis})$$

Слѣдовательно, либо $\zeta = \pm 1$; тогда $\beta = \zeta$. Либо $|\zeta| < 1$; тогда

$$\zeta^2 - 2\beta\zeta + 1 = 0,$$

такъ что $|\beta| > 1$.

Въ первомъ случаѣ, полагая для опредѣленности $\beta = \zeta = 1$, наибольшее значеніе $|P(x)|$ достигается въ $(n - 1)$ внутреннихъ точкахъ, гдѣ $P'(x) = 0$, и въ точкѣ $x = -1$. Поэтому $P(x)$ будетъ удовлетворять дифференціальному уравненію

$$P^2 - L^2 = \frac{(1+x)(x-\alpha)}{n^2} \cdot (P')^2, \quad (7)$$

причемъ $\alpha > 1$, такъ какъ, при $x = 1$, $P^2 < L^2$. Слѣдовательно,

$$P = L \cos \arccos \frac{2x + \alpha - 1}{\alpha + 1}.$$

Во второмъ случаѣ, P опять долженъ удовлетворять уравненію (6) съ соблюденіемъ тѣхъ же неравенствъ относительно β, γ, δ . Поэтому, по прежнему,

$$\Theta^2(L^2 - P^2) = \frac{(1-x^2)(P')^2}{n^2}, \quad (6^{bis})$$

гдѣ $\Theta < 1$.

Наконецъ, въ случаѣ когда $k = n + 1$, $P(x)$ есть тригонометрическій многочленъ, удовлетворяющій, какъ мы видѣли, уравненію (3), которое можно получить изъ уравненія (6^{bis}), полагая въ послѣднемъ $\Theta = 1$.

Введемъ новыя переменныя, опредѣляемыя уравненіями

$$P = \pm L \cos z, \quad x = \cos t;$$

(знакъ $\pm$ возьмемъ, если при $x = 1$, $P = L$, въ противномъ случаѣ возьмемъ $-$); тогда уравненіе (6^{bis}) преобразуется въ

$$\Theta^2 L^2 \sin^2 z = \frac{L^2 \sin^2 z}{n^2} \cdot \left(\frac{dz}{dt} \right)^2,$$