А.И. Маркушевич

Комплексные числа и конформные отображения

Популярные лекции по математике. Выпуск 13

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.И. Маркушевич
А11 Комплексные числа и конформные отображения: Популярные лекции по математике. Выпуск 13 / А.И. Маркушевич – М.: Книга по Требованию, 2023. – 52 с.

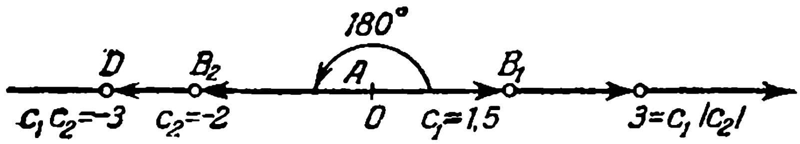
ISBN 978-5-458-29377-8

Эта книга знакомит читателя с комплексными числами и простейшими функциями от них (включая функцию Н.Е. Жуковского с применением к построению профиля крыла самолёта). Изложению придана геометрическая форма. Комплексные числа рассматриваются как направленные отрезки, а функции - как отображения. Чтобы привести читателя к такому пониманию комплексных чисел, мы начинаем с геометрического истолкования действительных чисел и действий над ними. В основу книжки положена лекция, читанная автором для школьников 9-го и 10-го классов. Предварительного знакомства с комплексными числами от читателя не требуется.

ISBN 978-5-458-29377-8

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

лютная величина *) произведения c_1c_2 будет равна $|c_1| \cdot |c_2|$, т. е. произведению абсолютных величин c_1 и c_2. Поэтому длина вектора AD, изображающего произведение, будет равна произведению длин векторов AB_1 и AB_2, изображающих сомножители. Знак произведения c_1c_2 будет совпадать со знаком c_1, когда $c_2 > 0$, и будет противоположен ему, когда $c_2 < 0$. Иными словами, направление AD совпадает с направлением AB_1, когда $\operatorname{Arg} c_2 = 0$ (это и значит, что $c_2 > 0$), и противоположно направлению AB_1, когда $\operatorname{Arg} c_2 = 180°$ (это и значит, что $c_2 < 0$). Теперь нам нетрудно ответить на вопрос: что нужно сделать с вектором AB, изображающим множимое c_1, чтобы получить из него вектор AD, изображающий произведение c_1c_2 ($c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$)? Для этого нужно умножить длину AB_1 на $|c_2|$ (не меняя направления вектора AB_1), а затем повернуть изменённый вектор на угол, равный аргументу c_2 (т. е. на 0°, если $c_2 > 0$, или на 180°, если $c_2 < 0$); полученный вектор и будет изо-



Черт. 3.

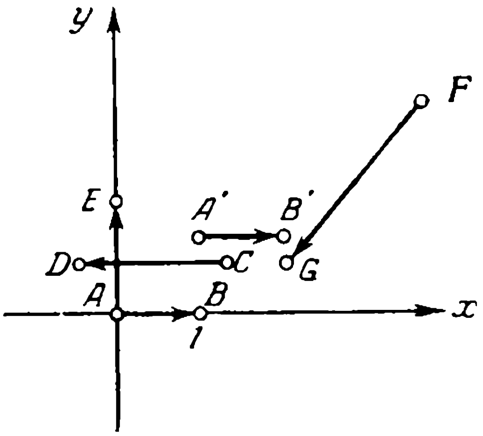
бражать произведение. На черт. 3 это правило пояснено на примере ($c_1 = 1{,}5$ и $c_2 = -2$).

6. С каждым вектором на прямой мы связали число, которое изображается этим вектором. Будем рассматривать теперь всевозможные векторы на плоскости и с каждым из них также свяжем число, изображаемое этим вектором. Числа, к которым мы придём таким путём — *комплексные числа*, — будут числами иного, более общего характера, чем действительные числа. Последние окажутся лишь частным случаем комплексных чисел, подобно тому как целые числа являются частным случаем рациональных чисел, а рациональные — частным случаем действительных чисел.

Начнём с того, что в плоскости, векторы которой мы будем рассматривать, проведём две взаимно перпендикулярные прямые — две числовые оси Ax и Ay с общим началом координат A, и пусть отрезок AB изображает единицу

*) Абсолютная величина некоторого числа c обозначается так: $|c|$. Например, $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$.

длины (черт. 4). Тогда любой вектор, лежащий на оси Ax или параллельный ей, можно попрежнему рассматривать как геометрический образ (изображение) действительного числа. Так, векторы AB и $A'B'$, длина каждого из которых равна единице, а направления совпадают с положительным направлением Ax, изображают число 1, а вектор CD длины 2 и прямо противоположного направления изображает число — 2. Векторы, не лежащие на Ax и не параллельные этой оси, такие, как AE и FG, не изображают никаких действительных чисел. Относительно этих векторов мы будем говорить, что они *изображают мнимые числа.* При этом векторы, равные по длине, параллельные между собой и направленные в одну и ту же сторону, изображают одно и то же число, а векторы, различающиеся либо длиной, либо направлением, — разные мнимые числа. Здесь мы забегаем несколько вперёд, так как, не зная, что такое мнимые числа, уже говорим об их образах; однако нередко и в жизни знакомство с портретом предшествует знакомству с оригиналом.



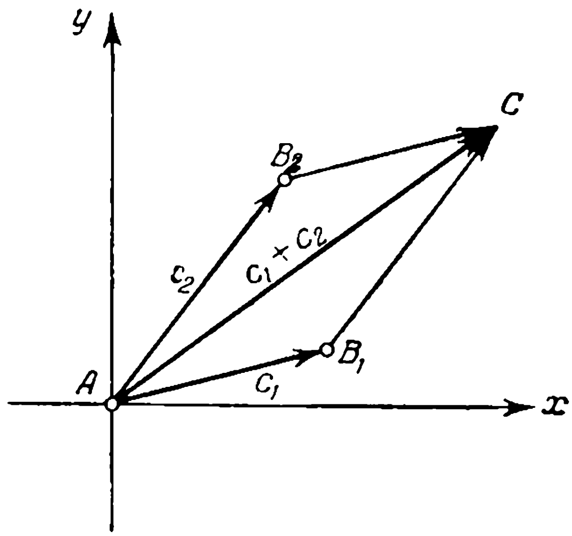
Черт. 4.

Выше мы показали, что действия над действительными числами можно заменить операциями над векторами, изображающими эти числа. Подобно этому мы и действия над мнимыми числами будем заменять действиями над изображающими их векторами. Правила действий мы не будем придумывать заново, а сохраним в геометрической форме правила, найденные для сложения и умножения действительных чисел. Разница будет лишь в том, что последние изображались векторами на прямой Ax (или векторами, параллельными этой прямой), тогда как мнимые числа изображаются векторами на плоскости, не лежащими на Ax и не параллельными Ax.

7. Прежде чем двинуться дальше, подчеркнём, что ***комплексными числами*** (слово «комплексный» означает составной) называются и действительные числа (уже известные нам) и мнимые (которые мы знаем пока только по «портретам»).

Для сравнения напомним, что для рациональных и иррациональных чисел, рассматриваемых вместе, также употребляется общее название: действительные (или вещественные) числа.

Займёмся сложением комплексных чисел. Мы условились оставить в силе правило, формулированное для сложения действительных чисел. Пусть AB_1 и AB_2 — два вектора, изображающие некоторые комплексные числа c_1 и c_2; чтобы построить вектор, изображающий их сумму $c_1 + c_2$, от конца вектора AB_1 откладываем вектор B_1C, одинаковый по длине и по направлению с вектором AB_2; вектор AC, соединяющий начало AB_1 с концом B_1C, и будет искомым (черт. 5).



Черт. 5.

Новое здесь заключается в том, что мы теперь применяем это правило к сложению комплексных чисел (изображаемых любыми векторами на плоскости), а ранее применяли только к действительным числам (изображаемым векторами на прямой).

Если применить то же правило для построения суммы $c_2 + c_1$ (слагаемые поменялись местами), то нужно будет от конца вектора AB_2, изображающего c_2, отложить вектор, одинаковый по длине и по направлению с вектором AB_1 (изображающим c_1). Очевидно, что мы придём в ту же самую точку C (на черт. 5 получается параллелограмм), и следовательно, сумма $c_2 + c_1$ изображается тем же вектором AC, что и сумма $c_1 + c_2$. Иными словами, из правила сложения вытекает справедливость переместительного закона:

$$c_2 + c_1 = c_1 + c_2.$$

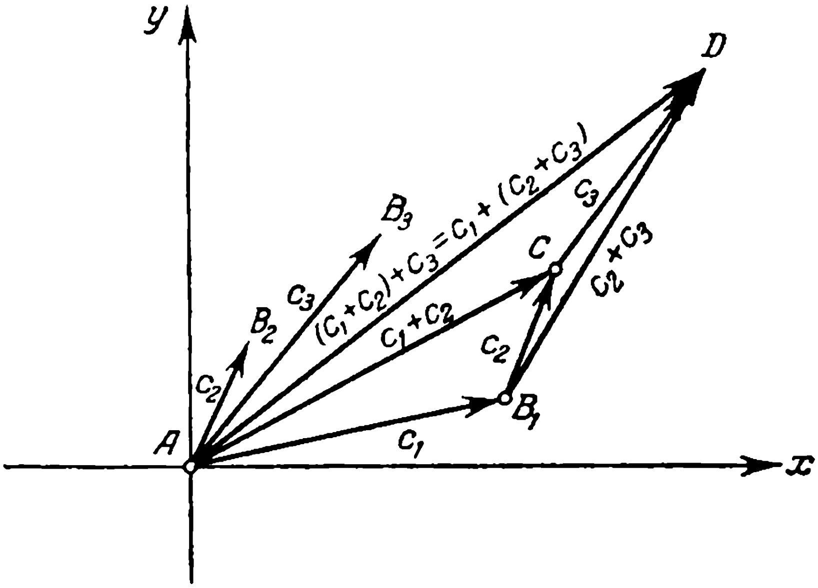
Легко доказать, что справедлив и сочетательный закон:

$$(c_1 + c_2) + c_3 = c_1 + (c_2 + c_3).$$

Все необходимые построения проведены на черт. 6. Очевидно, что, складывая $(c_1 + c_2)$ (AC) с c_3 (CD), мы получим тот же вектор AD, как и складывая c_1 (AB_1) с $(c_2 + c_3)$ (B_1D).

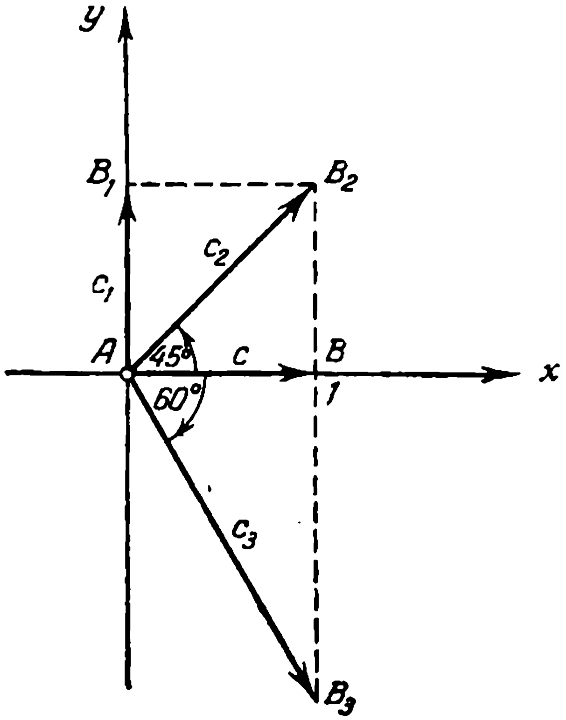
8. Прежде чем перейти к умножению, перенесём на комплексные числа понятия абсолютной величины и аргумента.

Пусть вектор AB изображает комплексное число c. Абсолютной величиной c называется длина вектора AB, а



Черт. 6.

аргументом c — угол между положительным направлением оси Ax и вектором AB. Этот угол можно отсчитывать против направления движения часовой стрелки, тогда он имеет положительное значение, или по часовой стрелке, тогда он имеет отрицательное значение; кроме того, к нему можно по произволу добавлять любое целое, кратное 360°.



Черт. 7.

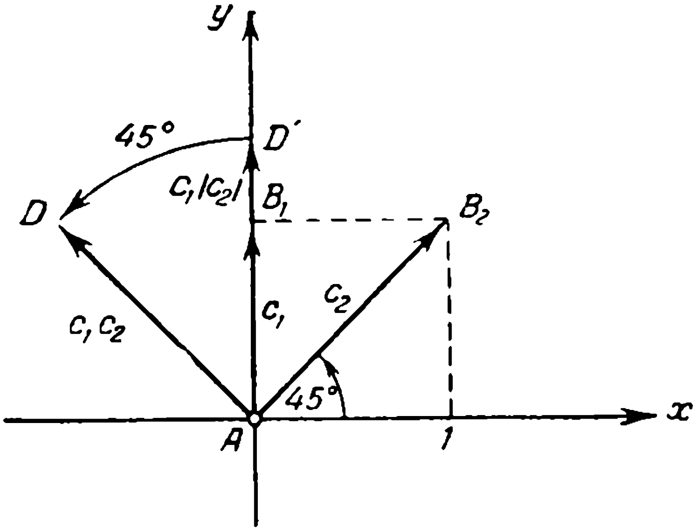
Абсолютная величина и аргумент числа c обозначаются так же, как для действительных чисел: $|c|$ и Arg c. Новое по сравнению со случаем действительных чисел в том, что аргумент мнимого числа отличен от 0° и от $\pm 180°$, тогда как для действительных чисел (не равных нулю) аргументом может быть либо 0° (если число положительное), либо $\pm 180°$ (если оно отрицательно).

На черт. 7 представлены векторы AB, AB_1, AB_2 и AB_3, изображающие комплексные числа: c, c_1, c_2 и c_3. Читатель легко проверит справедливость следующих утверждений:

$$|c| = |c_1| = 1, \quad |c_2| = \sqrt{2}, \quad |c_3| = 2;$$

$$\operatorname{Arg} c = 0°, \operatorname{Arg} c_1 = 90°, \operatorname{Arg} c_2 = 45°, \operatorname{Arg} c_3 = -60° \text{ (или } 300°).$$

9. После того как введены понятия абсолютной величины и аргумента комплексного числа, можно высказать и правило умножения комплексных чисел. Оно буквально совпадает с соответствующим правилом умножения для действительных чисел: чтобы умножить комплексное число c_1 на комплексное число c_2 ($c_1 \neq 0$ и $c_2 \neq 0$), нужно умножить на $|c_2|$ длину вектора, изображающего c_1 (не меняя направления этого вектора), а затем повернуть изменённый вектор около точки A на угол, равный аргументу c_2; полученный вектор изобразит произведение c_1c_2. Например, произведение c_1c_2 изображается



Черт. 8.

вектором AD (черт. 8), а произведение c_2c_3 — вектором AE (черт. 9).

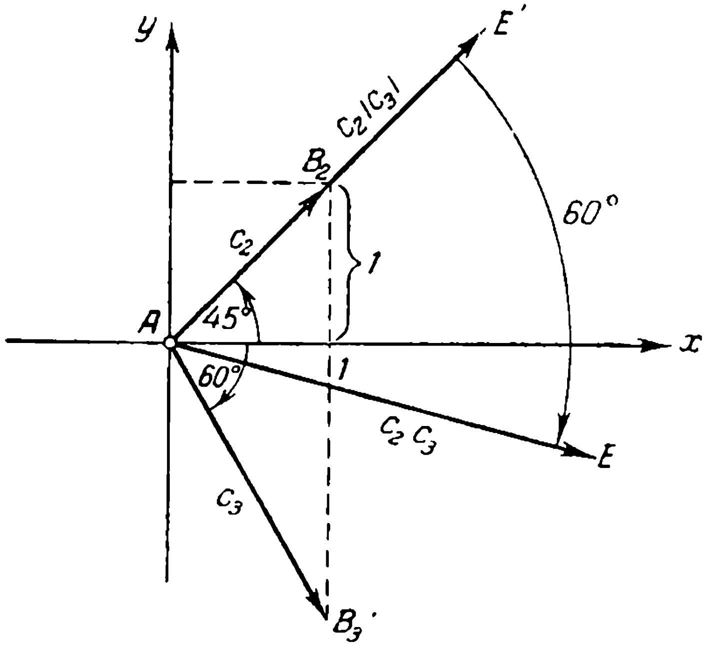
К правилу умножения нужно добавить ещё, что в случае, когда хотя бы один из сомножителей равен нулю, произведение также равно нулю.

Если применить правило умножения к произведению c_2c_1 (порядок сомножителей изменён), то нужно будет длину вектора, изображающего c_2, изменить в $|c_1|$ раз и изменённый вектор повернуть около точки A на угол, равный аргументу c_1. Очевидно, что результат получается тот же самый, как и при умножении c_1c_2: в обоих случаях длина полученного вектора есть $|c_1||c_2|$, а угол между Ax и этим вектором равен $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2$.

Итак,

$$c_1c_2 = c_2c_1,$$

т. е. переместительный закон справедлив для умножения комплексных чисел.



Черт. 9.

Точно так же справедлив и сочетательный закон:

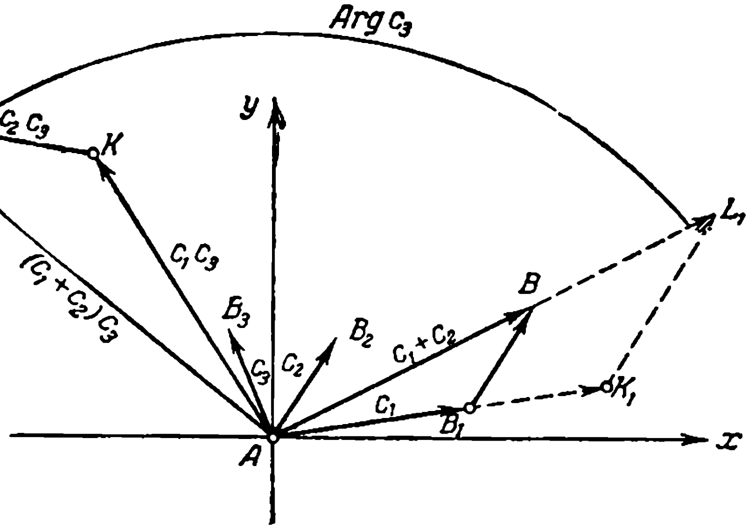
$$(c_1c_2)\,c_3 = c_1(c_2c_3).$$

В самом деле, каждое из рассматриваемых произведений изображается одним и тем же вектором; длина его есть $|c_1|\cdot|c_2|\cdot|c_3|$, а угол между осью Ax и этим вектором равен $\operatorname{Arg} c_1 + \operatorname{Arg} c_2 + \operatorname{Arg} c_3$.

Докажем, наконец, справедливость распределительного закона:

$$(c_1 + c_2)\,c_3 = c_1c_3 + c_2c_3.$$

На черт. 10 вектор AB изображает сумму $c_1 + c_2$; если, сохраняя направление AB_1 и AB_2, умножить все длины сторон треугольника AB_1B на $|c_3|$, то получится треугольник AK_1L_1, подобный треугольнику AB_1B. Он образован векторами AK_1, K_1L_1, AL_1, получающимися из векторов c_1, c_2 и $(c_1 + c_2)$ посредством изменения всех длин в $|c_3|$ раз (без изменения направлений). Повернём теперь треугольник AK_1L_1 около точки A на угол $\operatorname{Arg} c_3$; получится треугольник AKL. По правилу умножения вектор AK изображает в нём c_1c_3,



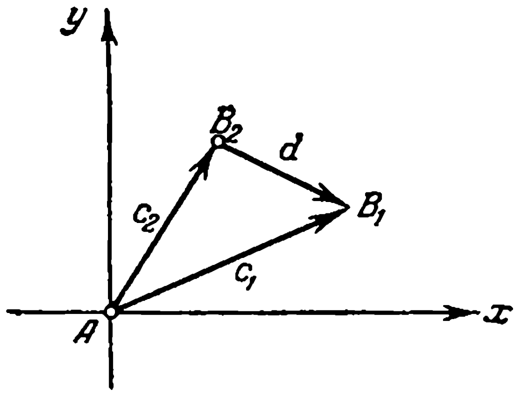
Черт. 10.

KL — c_2c_3 и AL — $(c_1+c_2)c_3$. По правилу сложения находим из этого же треугольника:

$$c_1c_3+c_2c_3=(c_1+c_2)\,c_3,$$

что и требовалось доказать.

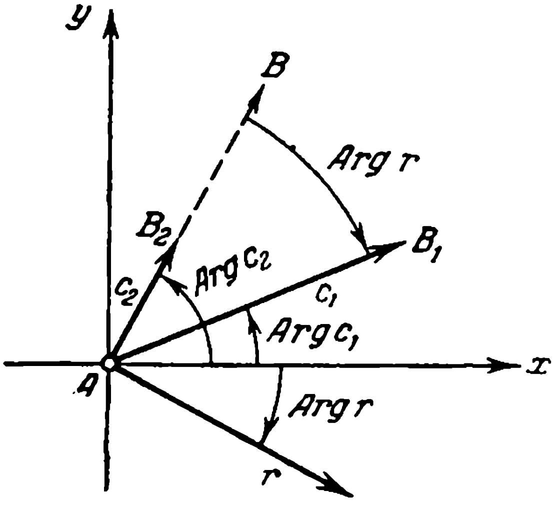
10. Действия вычитания и деления определяются как обратные по отношению к сложению и умножению. Именно, мы называем комплексное число d разностью чисел c_1 и c_2 и пишем $d=c_1-c_2$, если $c_1=c_2+d$, т. е. если c_1 есть сумма c_2 и d. Изображая это соотношение между c_2, d и c_1 на чертеже (черт. 11), видим, что вектор, изображающий разность c_1-c_2, получается, если точку B_2 (конец вектора, изображающего вычитаемое) соединить с точкой B_1 (конец вектора, изображающего уменьшаемое) и первую точку принять за начало вектора, а вторую — за конец этого вектора.



Черт. 11.

Аналогично комплексное число r называем частным чисел c_1 и c_2 $(c_2\neq 0)$ и пишем $r=c_1:c_2$ или $r=\frac{c_1}{c_2}$, если $c_1=c_2r$, т. е. если c_1 есть произведение c_2 на r (черт. 12).

Отсюда вытекает, что $|r|$ — длина вектора, изображающего r, — есть $\frac{|c_1|}{|c_2|}$, а $\operatorname{Arg} r$ равен углу B_2AB_1, отсчитываемому в направлении от AB_2 к AB_1 (на черт. 12 — это направление поворота по часовой стрелке, следовательно, угол должен рассматриваться как отрицательный).



Черт. 12.

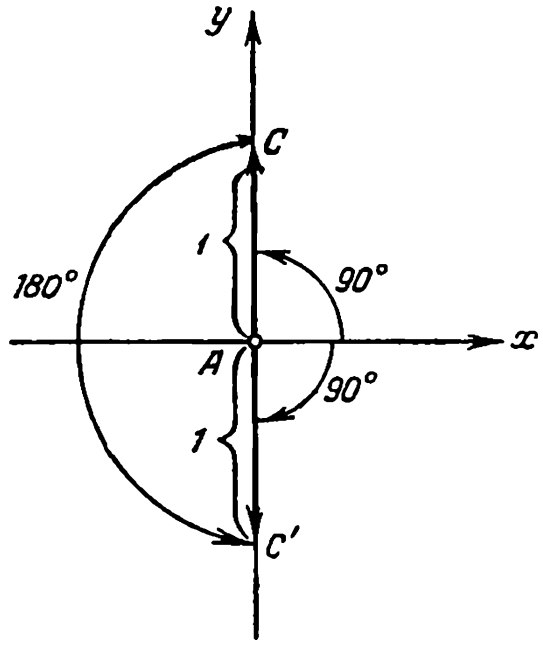
Отметим частные случаи. Если c_1 и c_2 изображаются параллельными и направленными в одну и ту же сторону векторами, то угол B_2AB_1 равен $0°$, следовательно, $\operatorname{Arg} r = 0°$, т. е. r — действительное положительное число. Если же c_1 и c_2 изображаются параллельными, но направленными в противоположные стороны векторами, то угол B_2AB_1 равен $180°$ и число r является действительным отрицательным.

Подводя итоги, можно сказать, что сложение и умножение комплексных чисел удовлетворяют тем же законам, переместительному, сочетательному и распределительному, как и в случае действительных чисел, а вычитание и деление, так же как и для действительных чисел, определяются как действия, обратные сложению и умножению. Поэтому все правила действий и формулы, выводимые в алгебре для действительных чисел, на основании определения действий и упомянутых законов должны остаться в силе и для комплексных чисел. Например,

$$(c_1 + c_2)(c_1 - c_2) = c_1^2 - c_2^2, \quad (c_1 + c_2)^2 = c_1^2 + 2c_1c_2 + c_2^2,$$

$$\frac{c_1}{c_2} + \frac{c_3}{c_4} = \frac{c_1c_4 + c_2c_3}{c_2c_4} \quad (c_2 \neq 0 \text{ и } c_4 \neq 0) \text{ и т. п.}$$

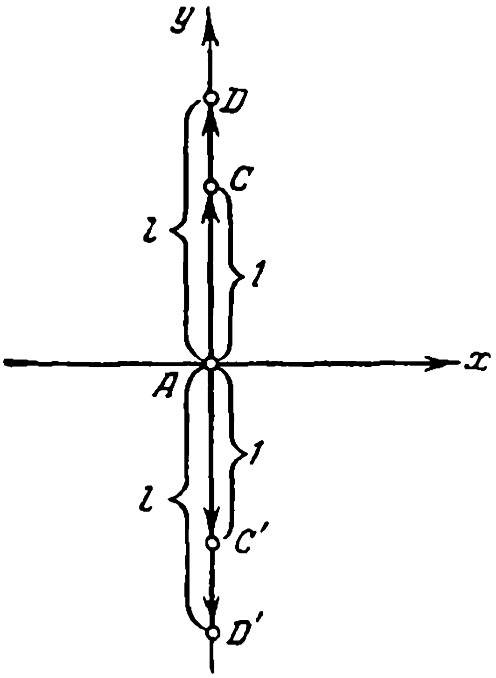
11. Читатель, изучая математику, неоднократно встречался с расширением (или обобщением) понятия числа. Это было и в арифметике при введении дробей, и в алгебре при введении отрицательных чисел, а позднее — чисел иррациональных. Каждое новое расширение понятия числа открывало возможности решения таких задач, которые до этого представлялись неразрешимыми или даже бессмысленными. Так, введение дробей позволило выполнять деление двух чисел во всех случаях, когда делитель отличен от нуля, например делить 4 на 3 или 2 на 5; введение отрицательных чисел позволило производить во всех случаях вычитание, например вычитать 5 из 2; введение иррациональных чисел позволило выразить числом длину любого отрезка, несоизмеримого с единицей, например длину диагонали квадрата, сторона которого равна единице. Однако, ограничиваясь одними только действительными числами, мы не могли извлекать квадратный корень из отрицательного числа. Убедимся в том, что введение комплексных чисел делает эту задачу разрешимой. Естественно, что квадратным корнем из комплексного числа c (обозначим корень знаком $\sqrt{c}$) мы назовём комплексное число a, квадрат которого (т. е. произведение a самого на себя) равен c. Иными словами, $a = \sqrt{c}$ означает, что $aa = c$. Пусть c — отрицательное число, например $c = -1$; желая найти $\sqrt{-1}$, мы должны решить уравнение $a^2 = -1$. Умножить a на a — это значит, во-первых, умножить длину вектора, изображающего a, на $|a|$, т. е. на эту же длину, не меняя направления a, и затем повернуть полученный вектор около точки A на угол, равный $\operatorname{Arg} a$. Очевидно, что длина найденного вектора будет равна тогда $|a|^2$. Но найденный вектор должен изображать число -1; поэтому его длина равна единице. Итак, $|a|^2 = 1$ и, следовательно, $|a| = 1$ (длина вектора всегда неотрицательна). Далее, угол между вектором, изображающим a^2, и осью Ax равен $\operatorname{Arg} a + \operatorname{Arg} a = 2 \operatorname{Arg} a$; с другой стороны, $a^2 = -1$, так что этот угол должен равняться $+180°$ или $-180°$. Поэтому $2 \operatorname{Arg} a = \pm 180°$, откуда либо $\operatorname{Arg} a = 90°$, либо $\operatorname{Arg} a = -90°$. Мы получили, следовательно, два различных вектора AC и AC', изображающих два различных значения $\sqrt{-1}$ (черт. 13). Мнимое число, изображаемое вектором AC, обозначается буквой i и называется ***мнимой единицей***; имеем: $|i| = 1$, $\operatorname{Arg} i = 90°$.



Черт. 13.

Легко понять, что мнимое число, изображаемое вектором AC', можно получить из i путём умножения i на -1. В самом деле, по правилу умножения для этого надо помножить длину AC на $|-1| = 1$ (от этого вектор AC не изменится) и затем повернуть около A на угол $\operatorname{Arg}(-1) = 180°$; получится вектор AC'. Соответствующее этому вектору мнимое число есть, следовательно, $i(-1)$ или $-1 \cdot i$, короче $-i$. Итак, $\sqrt{-1} = \pm i$.

12. Рассмотрим какой-либо вектор AD, лежащий на оси Ay (или параллельный ей) (черт. 14). Пусть длина его равна l. Если направление этого вектора совпадает с положительным направлением оси Ay (вверх от Ax), то мнимое число c, которое он изображает, можно получить из i путём умножения на положительное число l, следовательно, $c = l \cdot i$, или короче $c = li$.



Черт. 14.

Если направление AD противоположно положительному направлению Ay, то число c получится из i путём умножения на отрицательное число $-l$ (или из $-i$ путём умножения на l); следовательно, в этом случае $c = (-l) \cdot i$ или короче $c = -li$.

Итак, любой вектор (ненулевой длины), лежащий на оси Ay (или параллельный ей), изображает мнимое число вида $\pm li$, где берётся знак $+$ или $-$ в зависимости от того, совпадает ли направление вектора с положительным направлением Ay или противоположно ему. Вследствие этого ось Ay называется *мнимой осью*. Ось Ax, все векторы которой изображают действительные числа, называется *действительной осью*.

Рассмотрим какой-либо вектор $A'E'$, не лежащий ни на той, ни на другой оси и непараллельный осям. Посредством построения, указанного на черт. 15, можно представить число c, изображаемое этим вектором, в виде суммы двух других чисел: одного, изображаемого вектором $A'B'$, параллельным Ax (или лежащим на Ax), и другого, изображаемого вектором