Булдырев В.С., Павлов Б.С.

Линейная алгебра и функции многих переменных

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Б90

Булдырев В.С.
Б90 Линейная алгебра и функции многих переменных / Булдырев В.С., Павлов Б. С. – М.: Книга по Требованию, 2013. – 498 с.

ISBN 978-5-458-26666-6

В книге, состоящей из двух тесно связанных частей: "Линейная алгебра" и "Функции многих переменных", единым образом излагается теория конечномерных линейных пространств, интегральное и дифференциальное исчисление на областях и многообразиях, лежащих в этих пространствах. Для пособия характерен преимущественно бескоординатный - геометрический - способ изложения, наглядность и замкнутость, а также большая широта охвата материала. Так, с учётом современных потребностей физика-теоретика в книге изложены: внешняя алгебра, интеграл Лебега, дифференциальные формы, первоначальные понятия теории многообразий, диаграммная техника в теории возмущений для конечномерных операторов.Найденная авторами форма изложения позволяет читателю быстро ориентироваться по всему объему книги, выбирая индивидуальный тема продвижения. Авторы предусмотрели также возможность использования книги как сборника задач, последовательное решение которых существенно активизирует процесс обучения.

ISBN 978-5-458-26666-6

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ, ОБРАЩЕННОЕ К НЕИСКУШЕННОМУ ЧИТАТЕЛЮ

Среди разнообразных функциональных зависимостей, встречающихся в природе, линейная зависимость — самая простая и наиболее глубоко изученная. Идеи линейной алгебры — ветви математики, исследующей общие линейные функции конечного числа переменных, — пронизывают все другие разделы математики, начиная от теории чисел и кончая анализом и математической физикой. Пользуясь языком линейной алгебры, выводят изящные формулы, применяя ее методы, завершают трудоемкие расчеты. Непосредственным обобщением линейной алгебры на случай функций бесконечного числа переменных является функциональный анализ — раздел современной математики, обслуживающей все ее ветви. Казалось бы, курс линейной алгебры естественно предпослать изучению таких традиционных разделов высшей математики, как дифференцирование функций нескольких переменных, теория интегрирования, дифференциальные уравнения. Однако этот план построения курса высшей математики не является общепринятым. Он таит в себе опасность, заключающуюся в том, что линейная алгебра со своими специфическими идеями и техникой не имеет в настоящее время достаточно близкого аналога в школьной программе. Тем не менее преимущества этого плана настолько велики, что авторы рискнули построить, исходя из него, изложение значительной части курса высшей математики.

Мы сознаем, что первокурснику, только что окончившему школу, будет непросто, преодолев барьер аксиом, сжиться с линейной алгеброй и ощутить ее удобным инструментом в умелых руках. Легче будет тому читателю, который уже обладает достаточно высокой общей математической культурой, знакомому с началами векторной алгебры, аналитической геометрии и анализа функций одной вещественной переменной, например в объеме, обычном для физико-математических школ: множества, вещественные и комплексные числа, дифференцирование, интегрирование, ряды.

В то же время изложение линейной алгебры в первой части нашей книги и анализа функций многих переменных во второй строится последовательно с самого начала, не требуя от читателя каких-либо предварительных знаний, кроме перечисленных выше. Более того, можно сказать, что мы рассчитываем не столько на имеющуюся у читателя сумму знаний, сколько на его определенную зрелость и общий математический уровень, состоящий в привычке к аксиоматическим построениям. Испытав на первых порах известные (быть может, и немалые) трудности, читатель нашей книги, мы надеемся, выработает активное отношение к математике и приобретет опыт, который поможет ему успешно продвигаться в изучении дальнейших ее разделов.

Наша книга сложилась как учебный курс на физическом факультете Ленинградского университета, где мы читали его более десяти лет для студентов, которые в дальнейшем собираются стать физиками-теоретиками. Подчеркнем, что говоря о физике-теоретике, мы подразумеваем не только тех, кто занимается квантовой теорией поля и квантовой механикой. Физик-теоретик может быть и радиофизиком, и геофизиком, и оптиком. Поэтому и предлагаемая читателю книга предназначается для всех тех, кто, не будучи математиком-профессионалом, всю жизнь будет иметь дело с математикой как с рабочим инструментом.

Для того чтобы сделать наиболее отчетливой логическую сторону дела и в то же время упростить работу над книгой, весь материал в ней мы разбили на отдельные максимально простые предложения — «кирпичики», из которых складывается все здание линейной алгебры и функций многих переменных. Все определения и утверждения (только самые главные утверждения называются теоремами) в тексте книги пронумерованы. При ссылках внутри параграфа мы даем только номер пункта («кирпичика»), при ссылках на пункты другого параграфа впереди добавляется его номер, а при ссылках на пункты другой главы — и номер главы. Например, 5.1.3 — ссылка на пункт 3 первого параграфа пятой главы. Звездочка, стоящая при номере, отличает утверждение от определения. Таким образом, предложение со звездочкой нуждается в доказательстве, предложение без звездочки — лишь в запоминании. Подавляющее большинство утверждений снабжено доказательствами (начало отмечено знаком ⊙,а конец — ⟫), и читатель может их прочесть. Тем не менее более полезно, прочтя лишь утверждение, постараться доказать его самостоятельно или хотя бы обдумать возможный план доказательства, используя предыдущее изложение. Во всяком случае, читателю непременно следует попытаться это сделать; если все же не получится — читайте доказательство. Проверьте себя: доказательство не должно вызвать у Вас замешательства — правильная реакция, которой мы ждем, такая: «Ну, конечно, я так и думал» или наоборот: «Ах, вот в чем дело!» Плохо, если Ваша реакция безразлична — это означает, что Вы поторопились. Если утверждение со звездочкой не снабжено доказательством, у читателя, как правило, нет выхода — он должен придумать его. Большинство таких утверждений достаточно просты; тем не менее они должны быть доказаны. Исключение составляют несколько специально отмеченных фактов, доказательство которых по трудности далеко выходит за пределы нашего изложения (например, общая теорема де Рама). Таким образом, нашу книгу можно (и нужно!) использовать как задачник. Авторы убеждены, что это принесет несравненно большую пользу читателю, чем чтение подряд.

Между пронумерованными определениями и утверждениями в тексте книги Вы встретите абзацы, не имеющие номеров, и набранные светлым курсивом. В этих абзацах обсуждаются связи последующего с предыдущим, определяются цели дальнейшего изложения, ставятся задачи, к решению которых мы приступаем.

ПРЕДИСЛОВИЕ, ОБРАЩЕННОЕ К ИСКУШЕННОМУ ЧИТАТЕЛЮ

Опишем содержание и общее построение книги. В книге две части: линейная алгебра и функции многих переменных. Бóльшая половина второй части посвящена теории интегрирования и анализу на многообразиях, но в последней ее главе, снова обращаясь к линейной алгебре, мы излагаем элементарные факты теории возмущений линейных операторов. При изложении линейной алгебры мы отказались от обычной последовательности расположения материала: определители, системы, евклидово пространство, линейные операторы и их спектральный анализ. Мы начинаем курс линейной алгебры непосредственно с определения линейного пространства (предполагается, что читатель уже имеет представление об аналитической геометрии и векторной алгебре). Изложив основные факты теории линейных пространств, мы переходим к геометрическому исследованию систем линейных алгебраических уравнений. Тем самым достигаются две цели: демонстрируется применение методов линейной алгебры к такой важной в практическом отношении задаче как решение линейных алгебраических систем и, с другой стороны, обнажаются и делаются максимально наглядными факты, лежащие в основе теорем Крамера и Кронекера — Капелли. Для практического решения систем развивается метод последовательного исключения неизвестных (метод Гаусса). Далее вводятся линейные формы и линейные операторы, излагаются простейшие свойства сопряженного пространства и линейного пространства операторов. Много места отведено изучению полилинейных и особенно антисимметрических форм. Полилинейные формы позволяют наиболее естественным способом ввести понятие тензора и определить над тензорами основные действия: сложение, умножение, свертку. Теория антисимметрических полилинейных форм позволяет с минимальной затратой труда изложить свойства определителей и дать короткие и неформальные доказательства теоремы Лапласа и теоремы об умножении определителей — тех теорем, обычные доказательства которых весьма утомительны. Антисимметрические формы, будучи применены к линейным алгебраическим системам, дают немедленно формулы Крамера и формулы для общего решения произвольной системы. Вслед за полилинейными формами рассматривается алгебра линейных операторов и алгебра матриц, в инвариантной форме приводятся условия обратимости линейного оператора, изучается преобразование координат вектора и тензора при замене базиса. Здесь же дается определение тензора, независимое от полилинейной формы. Спектральному анализу операторов посвящены две главы книги (8, 9). В первой из них вводятся основные понятия спектральной теории линейных операторов и проводится спектральный анализ диагонализуемых («скалярных») операторов. Вторая из глав, посвященных спектральному анализу, носит более утонченный характер. В этой главе для произвольного линейного оператора строится базис Жордана из собственных и присоединенных векторов, в котором матрица имеет «жорданову нормальную форму». Центральной здесь является теорема о расщеплении оператора на сумму диагонализуемого и нильпотентного операторов. Ее доказательство опирается на теорию идеалов в алгебре операторных полиномов и свойства минимальных полиномов.

Первая часть книги завершается изложением теории евклидова пространства — главы 10 и 11. Первая из них посвящается введению метрической формы в линейном пространстве и связанными с этим новыми геометрическими понятиями — угла и расстояния. В определенном смысле эта глава служит кратким конспектом аналитической геометрии в n-мерном вещественном пространстве. Следующая глава посвящена изложению теории комплексного евклидова пространства. Бесконечномерный аналог этого пространства — гильбертово пространство — служит одной из основных структур современной математики и теоретической физики. Так, алгебра наблюдаемых величин в квантовой механике изоморфна алгебре операторов, действующих в гильбертовом пространстве состояний физической системы. Поэтому в центре нашего изложения теории комплексного евклидова пространства стоит теория операторов, в частности спектральная теория операторов в этом пространстве. Завершается глава 11 изложением теории квадратичных форм.

Вторая часть нашей книги посвящена теории функций многих переменных. Во всех ветвях этой теории ведущая роль принадлежит методам линейной алгебры, развитым в первой части.

Первая глава второй части открывается изложением основных фактов из теории линейных нормированных пространств с конечным числом измерений, в частности доказывается эквивалентность различных норм в таких пространствах. Далее обсуждаются свойства непрерывных функций, заданных на таких пространствах.

Начиная со второй главы методы и идеи линейной алгебры играют решающую роль. Значительное место во второй главе уделено изучению производных первого порядка числовых, векторных и операторнозначных функций. Вводятся дифференциал Фреше, дифференциал Гато (производная по направлению) и обсуждаются существующие между ними связи. В качестве примера вычисления производных выведены различные термодинамические тождества.

Далее мы определяем производные высших порядков, строим формулы Тейлора и решаем задачи об экстремуме функции многих переменных. Анализ задачи об условном экстремуме базируется на ее геометрической интерпретации.

В третьей главе излагается теория разрешимости «в малом» нелинейных уравнений в конечномерных пространствах. Эта глава могла быть помещена внутри второй главы, между параграфами 1 и 2, тем более, что ее результаты нужны в конце второй главы при обсуждении задачи об условном экстремуме. Тем не менее, желая подчеркнуть идейную важность теорем существования, мы посвятили им отдельную главу.

После этого мы переходим к теории интегрирования (гл. 4). Исходя из того, что самые различные разделы математики и математической физики (теория рядов Фурье, задача Штурма — Лиувилля, теория вероятностей) допускают значительно более прозрачное изложение на основе интеграла Лебега, мы выбираем именно эту концепцию интеграла. Затем на основании теоремы Фубини о сведении краткого интеграла к повторному мы выводим формулу замены переменных. Описанный нами вариант вывода формулы замены переменных можно было бы назвать алгебраическим — в отличие от обычного «метрического» варианта, когда в центре внимания оказывается преобразование элемента объема. При нашем подходе формула замены переменной «в малом» получается последовательным применением соответствующей одномерной формулы. Переход от замены переменных «в малом» к замене переменных «в целом» получается использованием леммы Бореля и разбиения единицы.

Пятой главой открывается часть, посвященная анализу функций многих переменных в инвариантной форме, т. е. теории дифференциальных форм в областях и на многообразиях, вложенных в евклидово пространство. Вначале излагаются элементарные сведения из теории дифференциальных форм в области (замена переменных в формах, внешнее дифференцирование) и описывается согласование этих операций. Затем вводится понятие о точных и замкнутых формах и об интегрировании форм по области. Центральными местами здесь являются лемма Пуанкаре и формула Стокса — Пуанкаре для куба. В качестве приложения теории дифференциальных форм мы рассматриваем инвариантные дифференциальные операции (градиент, дивергенцию, ротор), записываем в ковариантной форме уравнения Максвелла и доказываем с помощью выведенной ранее формулы Стокса закон сохранения заряда в простейшей форме.

Важный технический материал сосредоточен в § 1—3 шестой главы, где изучаются дифференциальные формы и структуры, заданные на элементарном гладком многообразии (клетке) — диффеоморфном образе куба. Здесь вводятся понятия римановой метрики и ориентации клетки, определяется ее граница и доказывается для клетки формула Стокса — Пуанкаре, служащая стержнем всей второй части нашего курса. В § 4 шестой главы возникает, наконец, главный топологический объект — многообразие с краем. К этому моменту все основные факты и технические детали уже известны читателю на примере клетки, и поэтому перенесение их на общий случай многообразия с краем осуществляется без труда с помощью разбиения единицы. Наконец, § 5 посвящен изложению теории полного дифференциала. Здесь мы знакомим читателя с некоторыми важными и теперь уже широко употребляемыми в физике понятиями: гомологией циклов и когомологией форм. Важный пример к этому материалу — интегрирование аналитических форм — описан в следующей главе. Одновременно она служит введением к последней главе нашего курса, посвященной изложению элементов теории возмущений в применении к конечномерным операторам. Здесь еще раз происходит объединение идей линейной алгебры и анализа на многообразиях. Для упорядочения членов рядов теории возмущений мы пользуемся диаграммной техникой, именно стационарным вариантом техники, предложенной В. Н. Поповым и А. А. Киселевым *.

Материал, включенный в книгу, по объему превосходит тот, что обычно излагается нами на лекциях. Все эти годы (1966—1982) параллельно лекциям на физическом факультете работал математический кружок. Его программа в разные годы по-разному дополняла и расширяла лекционный курс. Наша книга охватывает не только материал, который обычно включается в лекционный курс, но и этот дополнительный материал. Именно поэтому ее объем несколько превосходит объем стандартного учебника. Однако мы надеемся, что как раз это обстоятельство

* Попов В. Н., Киселев А. А. Диаграммная техника в общей теории возмущений. — Докл. АН СССР, 1973, т. 213, с. 70—74.

сделает нашу книгу полезной также и для внеаудиторной работы.

Искушенный читатель, просмотрев второе предисловие, по-видимому, отметит, что план нашей книги имеет мало общего со стандартным планом «атомистического» преподавания математики, когда разные преподаватели по отдельности учат студента разным дисциплинам: алгебре, аналитической геометрии, теории операторов в евклидовом пространстве, дифференциальному исчислению, интегральному исчислению, теории поля, теории дифференциальных уравнений и теории аналитических функций, пользуясь при этом зачастую разными математическими языками. Напротив, мы всюду стараемся подчеркнуть связи, существующие между различными (формально выделенными) разделами математики. Именно эти связи позволяют компактно уложить столь обширный материал в сравнительно небольшой курс.

Работая над ним, мы имели перед собой пример нашего учителя Владимира Ивановича Смирнова, для которого математика всегда была единой наукой, о чем свидетельствует, в частности, и его замечательный «Курс высшей математики» *. В нашей книге мы попытались подход Владимира Ивановича Смирнова применить к изложению более современного материала, который становится теперь нужным физику-теоретику. Об успехе этого предприятия судить читателю.

При конструировании курса мы испытывали влияние со стороны известных авторов. Иногда это влияние отражалось на нашем изложении положительным образом — это касается, в первую очередь, теории интегрирования, где мы в существенном следовали плану, предложенному А. Н. Колмогоровым и С. В. Фоминым в книге «Элементы теории функций и функционального анализа» **. В некоторых случаях влияние было отрицательным, заставляя нас выбирать иной путь изложения. Во всяком случае учет опыта предшественников был для нас очень поучительным и, мы надеемся, полезным.

Наш курс входит как составная часть в единый курс высшей математики, читаемый сотрудниками кафедры математической физики физического факультета Ленинградского университета. Мы благодарим всех сотрудников этой кафедры и ее заведующего — академика Л. Д. Фаддеева — за внимание и поддержку в нелегком деле подготовки этой книги.

Мы признательны студентам, участвовавшим в работе кружков по математике: им принадлежит много красивых и зачастую неожиданных соображений, часть из которых использована в нашей книге в виде теорем и задач.

---

* Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. 1—5. М., 1953—1959.

** Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. Изд. 3-е, перераб. М., 1972. 496 с.

Авторы также благодарны сотрудникам кафедры анализа математико-механического факультета Ленинградского университета за содержательное общение, приведшее к значительной модернизации первоначального изложения теории интегрирования.

Наконец, авторы благодарны рецензентам Н. К. Никольскому и М. В. Федорюку за ряд конструктивных предложений.

Авторы сознают, что текст книги, столь долго складывавшейся, представляет все же их точку зрения только на данный момент. Безусловно, через несколько лет эта точка зрения изменится. Поэтому они будут искренне благодарны тем внимательным читателям, которые возьмут на себя труд сообщить о своих впечатлениях от этой книги и о своих пожеланиях в части выбора материала и способа изложения.

Корреспонденцию следует направлять по адресу: 199164, Ленинград, Университетская наб., 7/9, Издательство Ленинградского университета.

ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОБОЗНАЧЕНИЯ

Введем стандартные обозначения и перечислим основные понятия.

Мы исходим из того, что понятия множества, подмножества, элемента и пустого множества не вызывают у читателя превратных толкований. Под термином **набор** мы подразумеваем конечное множество элементов, снабженных индексами. В аналогичном смысле употребляется термин **семейство**, однако семейство может быть и бесконечным. Если элемент m принадлежит множеству M, (m из M), то пишем $m \in M$. Если множество M_1 является частью множества M (его подмножеством), то пишем $M_1 \subseteq M$. В том случае, когда M_1 непусто и при этом в M еще остаются элементы, не принадлежащие M_1, говорят, что M_1 — собственная часть M и пишут $M_1 \subset M$. **Пересечением множеств** M и N называется их максимальная общая часть, т. е. множество всех элементов из M, принадлежащих также и множеству N. Пересечение обозначается символом $M \cap N$. Множество $M \cap N$ очевидно совпадает с $N \cap M$, т. е. $M \cap N = N \cap M$. **Объединением** (или **суммой**) **множеств** M и N называется множество всех элементов, принадлежащих M и(или) N. Объединение M и N обозначается символом $M \cup N$. Под **разностью множеств** M и N понимают подмножество всех элементов M, не входящих в N. Разность обозначается символом $M \setminus N$. Очевидно, что $M \setminus N = M \setminus \{M \cap N\}$. **Симметрической разностью множеств** M и N называется множество $M \triangle N = \{M \cup N\} \setminus \{M \cap N\}$.

Мы говорим, что задано **отображение** T множества M в множество N, и пишем $T : M \to N$, если каждому элементу m ($m \in M$) сопоставлен некоторый вполне определенный элемент n ($n \in N$), называемый **образом элемента** m **при отображении** T. При этом не исключается возможность, что одному элементу n из N отвечает при отображении T несколько элементов m_i из M, таких, что $Tm_i = n$. Подмножество $\{m_i\}$ всех таких элементов называется **прообразом** n **при отображении** T. Аналогично **образом подмножества** M_1 ($M_1 \subseteq M$) при отображении T называется объединение образов всех элементов из M_1; образ множества M_1 при отображении T обозначают символом TM_1. Если множество N_1 из N служит образом некоторого множества M_1 из M, т. е. $TM_1 = N_1$, то определено понятие **прообраза множества** N_1 **при отображении** T, а именно прообразом множества N_1 называется объединение прообразов всех элементов, входящих в N_1, т. е. элемент m входит в прообраз, если $Tm \in N_1$. Вообще говоря, прообраз образа множества M_1 содержит M_1. Отображение $T: M \to N$ называется **отображением «на», сюръекцией,** или **эпиморфизмом**, если всякое подмножество N_1 из N имеет непустой прообраз. Отображение $T: M \to N$ называется **инъекцией, или мономорфизмом**, если для всякой пары элементов m_1, m_2 из M ($m_1 \neq m_2$) выполнено $Tm_1 \neq Tm_2$. Отображение, являющееся одновременно инъекцией и сюръекцией, называется **взаимно однозначным**, или **биекцией**. Если задано отображение $T: M \to N$ и M_1 — некоторое собственное подмножество в M, то определено также и отображение $T_1: M_1 \to N$, называемое **сужением** T на M_1, $T_1 = T|M_1$ и заданное условием $T_1 m = Tm$ ($m \in M_1$).

В первой части книги — в линейной алгебре — векторы обозначаются латинскими символами (скажем, x), а их координаты — «соответствующими» греческими (ξ^i). Скаляры тоже обозначаются греческими буквами. Во второй части книги, следуя обычаю, принятому в книгах по анализу, мы обозначаем векторы латинскими символами (скажем, x), а их координаты — теми же символами с индексами наверху (x^i). Для обозначения произвольного элемента какого-либо множества в книге часто используется символ $\forall$.