

**А.Е. Белянцев**

**Некоторые вопросы теории взаимодействия  
мгд-волн в неоднородной и неравновесной  
плазме**

**монография**

**Москва  
Издательство Нобель Пресс**

- A11 **А.Е. Белянцев**  
Некоторые вопросы теории взаимодействия мгд-волн в неоднородной и неравновесной плазме: монография / А.Е. Белянцев – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2024. – 112 с.

**ISBN 978-5-458-54907-3**

Монография посвящена одному из актуальных направлений теоретической радиофизики – исследованию нелинейного резонансного взаимодействия низкочастотных волн в магнитоактивной плазме. Теоретическая и практическая значимость результатов работы состоит в изучении новых эффектов, возникающих при развитии неустойчивости магнитогидродинамических (МГД) волн в неравновесной плазме, как в безграничной системе поток-плазма, так и в неоднородной плазме, где неоднородность обусловлена ограниченностью среды – плазменные волноводы. В разделе «Приложение» исследована линейная трансформация электромагнитных и электростатических волн при квазипоперечном (по отношению к внешнему магнитному полю) распространении вблизи верхнего гибридного резонанса. Результаты монографии могут быть использованы при решении ряда проблем физики неравновесной магнитоактивной плазмы с приложениями в астрофизике и в лабораторных плазменных установках.

## Оглавление

<b>Введение .....</b>	<b>4</b>
<b>Глава 1. Стабилизация взрывной неустойчивости МГД-волн за счет генерации высших гармоник альфвеновских и звуковых мод в безграничной системе поток–плазма .....</b>	<b>14</b>
1.1. Введение .....	14
1.2. Генерация импульсов магнитного поля при развитии взрывной неустойчивости магнитозвуковых волн в системе «холодная» плазма – «нагретый» поток .....	14
1.2.1. Постановка задачи. Исходные уравнения. Анализ условий синхронизма .....	14
1.2.2. Исследование системы укороченных уравнений .....	21
1.3. Генерация звуковых импульсов при развитии взрывной неустойчивости альфвеновских волн в «нагретой» плазме, пронизываемой моноскоростным потоком заряженных частиц .....	28
1.3.1. Постановка задачи. Исходные уравнения .....	28
1.3.2. Анализ укороченных уравнений .....	32
1.4. Основные результаты .....	35
<b>Глава 2. ВЧ и параметрическая неустойчивость в потоке ионизированного газа, пронизывающего плоский волновод (продольное распространение) .....</b>	<b>37</b>
2.1. Введение .....	37
2.2. Асимптотический метод исследования многоволновых взаимодействий в ограниченных слабонелинейных неоднородных средах .....	37
2.2.1. Постановка задачи, исходные уравнения .....	38
2.2.2. Вывод уравнений для комплексных амплитуд в нулевом, первом и втором приближении по малому параметру .....	42
2.2.3. Заключение .....	55
2.3. Постановка задачи, получение укороченных уравнений для комплексных амплитуд магнитозвуковых волн .....	55
2.4. Энергии мод. Условия синхронизма. Анализ системы для амплитуд волн .....	67
2.5. Основные результаты .....	70
<b>Глава 3. ВЧ и параметрическая неустойчивость в потоке ионизированного газа, пронизывающего плоский волновод (поперечное распространение) .....</b>	<b>71</b>
3.1. Введение .....	71
3.2. Постановка задачи. Исходные уравнения. Вывод уравнений для комплексных амплитуд мод .....	71

---

3.3. Исследование взаимодействия волн. Анализ инкрементов возбужденных мод .....	84
3.4. Основные результаты .....	89
<b>Приложение.</b> Линейное взаимодействие волн при квазипоперечном распространении в гиротропной среде в квазигидродинамическом приближении.....	90
П.1. Введение .....	90
П.2. Постановка задачи. Укороченные уравнения для амплитуд взаимодействующих электромагнитной и плазменной волн .....	90
П.3. Условие пространственного синхронизма. Используемая модель дисперсионных кривых .....	97
П.4. Коэффициенты трансформации для одной и двух точек синхронизма .....	102
П.5. Основные результаты .....	104
<b>Заключение</b> .....	106
<b>Литература</b> .....	108

## Введение

### *Общая характеристика работы*

#### *Актуальность проблемы*

Представляемая работа посвящена изучению взаимодействия МГД-волн в неравновесной плазме. Исследования по указанному кругу вопросов, начатые около тридцати лет назад в радиоэлектронике, акустике, гидродинамике, оптике, теории плазмы, развивались чрезвычайно интенсивно и стали одними из основных направлений в этих областях. Достаточно сказать, что с 1962 г. непрерывно выходят монографии, сборники и обзоры на эту тему [1–37].

К концу 60-х годов стало ясно, что резонансные процессы взаимодействия волн (как с фиксированной, так и со случайной фазой) являются фундаментальными нелинейными процессами. Однако в теории были проанализированы лишь простейшие модели взаимодействия электромагнитных волн в однородной и безграничной плазме. В то же время для разнообразных приложений, относящихся к лазерной плазме, плазменной электронике, плазме твердого тела, космической плазме, а также к гидродинамике, радиоэлектронике, нелинейной оптике и др. было необходимо дальнейшее развитие теории нелинейного взаимодействия в НЧ диапазоне длин волн, в частности, исследование взаимодействия квазимонохроматических сигналов (МГД-мод) в потоковой плазме (как в безграничной плазме, так и в плазменных волноводах). Изучению значительной части этих вопросов в приложении к плазменным средам посвящена данная работа.

Монография, в соответствии с поставленными задачами, состоит из двух частей.

В первой части (Глава 1) исследуются особенности развития взрывной неустойчивости МГД-волн в безграничной системе поток – плазма, где изучены два предельных случаях:

- а) «нагретый» пучок – «холодная» плазма;
- б) «нагретая» плазма – «холодный» пучок.

Обнаружен новый механизм стабилизации «взрыва» МГД-мод за счет генерации слабозатухающих гармоник волн положительной энергии — нелинейное поглощение (впервые для ионного звука этот механизм был предложен в [38]).

Вторая часть работы (Главы 2, 3) посвящена условиям генерации МГД-волн в плоском волноводе, пронизываемом потоком ионизированного газа. В Главе 2 исследуется случай, когда постоянное магнитное поле направлено вдоль стенок волновода. Выяснены условия преобразования энергии мод вверх по спектру — *up*-конверсия. Показано, что в такой системе возможна эффективная трансформация энергии от пучка к возбуждаемым модам. В Главе 3 исследовано взаимодействие волн в волноводе с потоком ионизированного газа, причем постоянное магнитное поле направлено перпендикулярно стенкам волновода. Решена нелинейная краевая задача, выведены укороченные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд волн и показана также эффективность преобразования энергии МГД-волн вверх по спектру.

В Главе 1 приведены оценки для полупроводниковой плазмы антимонида индия (InSb), показывающие возможность создания твердотельного усилителя (генератора) магнитного поля в лабораторной плазме. Кроме того, результаты Глав 2, 3 весьма полезны для интерпретации экспериментально наблюдаемого НЧ излучения в магнитных трубках, которые моделируются плоским волноводом, например, в атмосфере Солнца. Это излучение имеет поперечную поляризацию и может быть принято как наземными, так и спутниковыми антеннами.

В Приложении рассмотрена линейная трансформация электромагнитных и плазменных волн в неоднородной магнитоактивной плазме при квазипоперечном, по отношению к внешнему магнитному полю, распространении на частотах, близких к частоте верхнего гибридного резонанса в приближении квазигидродинамики. Выведены укороченные уравнения для амплитуд взаимодействующих необыкновенной и плазменной волн, описывающие амплитуды полей с геометрической точностью. Найдены коэффициенты трансформации волн при прохождении ими плазменной неоднородности для случаев наличия внутри нее одной и двух точек синхронизма. Полученные результаты представляют интерес при анализе целого ряда

физических процессов: нагрев плазмы в лабораторных условиях, наблюдение радиоэхо с аномально большими задержками, интерпретация тонкой структуры ионосферных неоднородностей, а также в проблеме дальней радиосвязи.

### *Цель работы*

Целью данной работы является дальнейшее развитие теории взаимодействия МГД-волн в неравновесной и ограниченной плазме.

Неравновесность плазмы, связанная с потоком заряженных частиц, приводит к возникновению волн с отрицательной энергией (впервые этот эффект обсуждался в работе [39]) и, как следствие, при выполнении условий синхронизма (когда волна высшей частоты имеет отрицательную энергию), к возникновению взрывной неустойчивости. Если же волна отрицательной энергии имеет промежуточную частоту, то возникает ВЧ неустойчивость или *up*-конверсия, т.е. преобразование энергии вверх по спектру.

Кроме того, изучены параметрическая и ВЧ неустойчивости в потоке плазмы в плоском волноводе, где обнаружены новые эффекты, связанные с ограниченностью плазмы — поляризационные запреты на взаимодействие мод, обусловленные тем обстоятельством, что нелинейный ток ортогонален третьей моде резонансного триплета, а также появление дополнительной пространственной дисперсии, приводящей к возникновению новых типов взаимодействий.

В Приложении ставилась цель применения асимптотической теории линейной трансформации электромагнитных волн в неоднородной анизотропной среде для случая квазипоперечного распространения волн в плазме вблизи верхнего гибридного резонанса. В приближении геометрической оптики получены укороченные уравнения для амплитуд связанных волн. Вычислены коэффициенты матрицы трансформации, а также установлено, что они растут с увеличением угла отклонения направления распространения волн от строго поперечного (по отношению к внешнему магнитному полю) вплоть до значений углов, при которых еще справедливо квазипоперечное приближение.

*Научная новизна работы*

Основное внимание в монографии уделяется теоретическому исследованию новых эффектов, возникающих при резонансном взаимодействии МГД-волн в безграничной и ограниченной плазме. При построении теории не преследовалась цель дать исчерпывающий анализ всех возможных эффектов, а были исследованы закономерности, которые могут быть установлены на простейших моделях\*. В основу монографии положены работы автора по теории взаимодействия МГД-волн в системе поток – плазма, а также в потоке плазмы, пронизывающем плоский волновод. Часть из них принадлежит к числу первых работ, в которых:

- а) показано, что генерация слабо затухающих гармоник МГД-мод положительной энергии приводит к стабилизации взрывной неустойчивости в системе поток – плазма [40–42];
- б) проведено теоретическое рассмотрение как параметрической, так и ВЧ неустойчивости МГД-мод в плоском волноводе, заполненном движущимся ионизированным газом [43, 44];
- в) выяснена возможность эффективной трансформации энергии НЧ излучения вверх по спектру [43, 44].

В Приложении излагается работа автора [45], где впервые, для случая квазиперечного (по отношению к внешнему магнитному полю) распространения на частотах около точки верхнего гибридного резонанса, была теоретически исследована линейная трансформация электромагнитных и электростатических волн при прохождении ими плазменной неоднородности; найдены и проанализированы коэффициенты трансформации указанных волн.

*Практическая ценность и реализация результатов работы*

Решение задач нелинейного взаимодействия МГД-волн в неравновесной плазме имеет ряд практически важных аспектов. Результаты работы носят общий характер

---

\* Многие из полученных результатов легко могут быть обобщены на более сложные системы.



и должны учитываться при анализе роли нелинейных процессов в любых плазмоподобных средах. В частности, выводы, полученные в Главе 1 могут быть использованы для создания мощных усилителей НЧ колебаний в лабораторной твердотельной плазме. В Главе 1 приведены оценки такого усилителя для полупроводниковой плазмы.

Результаты Глав 2, 3 имеют практическое приложение как для лабораторной, так и космической плазмы. Например, в атмосфере Солнца существуют магнитные трубки (приближенно их можно считать плоскими волноводами), в которые при развитии вспышечных явлений инжектируются потоки заряженных частиц и, в процессе нелинейного взаимодействия МГД-волн, генерируются импульсы мощного НЧ излучения, принимаемые наземными и спутниковыми антеннами. Следствия теории, развитой в Главах 2, 3 вполне применимы для интерпретации этих экспериментальных данных.

Результаты и выводы, полученные в разделе «Приложение», могут быть полезны при решении таких практически важных задач, как дальняя радиосвязь, определение параметров ионосферы и магнитосферы, нагрев ионосферы мощным электромагнитным излучением и др.

### *Основные научные положения монографии*

1. Обнаружен новый механизм стабилизации взрывной неустойчивости МГД-волн за счет генерации гармоник мод положительной энергии — эффективное нелинейное поглощение.
2. Построена теория параметрической и ВЧ неустойчивости МГД-волн в плоском волноводе, пронизываемом потоком заряженных частиц, причем постоянное магнитное поле направлено вдоль потока. Выяснены условия *up*-конверсии, т.е. преобразования энергии вверх по спектру.
3. Изучены особенности резонансного трехволнового взаимодействия МГД-волн в плоском волноводе с потоком заряженных частиц при условии, что постоянное магнитное поле перпендикулярно стенкам волновода. В этом предельном случае

также выяснены условия возникновения ВЧ неустойчивости и показана возможность эффективной *ир*-конверсии МГД-мод.

4. В асимптотическом приближении исследовано взаимодействие электромагнитной и плазменной волн в окрестности верхнего гибридного резонанса при их квазипоперечном распространении по отношению к внешнему магнитному полю. На основе проведенного анализа определены коэффициенты трансформации этих волн для случаев одной и двух точек пространственного синхронизма.

### *Апробация результатов*

Материалы монографии докладывались на Международном симпозиуме EURO EM-94 (Бордо, Франция, 1994), XVIII Всероссийской конференции по распространению радиоволн (Санкт-Петербург, 1996), XXVI и XXVII Радиоастрономических конференциях (Санкт-Петербург, 1996, 1997), а также на семинарах ИЗМИРАН, НИРФИ, ИПФРАН и кафедры «Прикладная математика» НГТУ.

### *Публикации*

Основные результаты монографии опубликованы в шести печатных работах [40–45], выполненных в 1992–98 гг., трудах и тезисах докладов симпозиумов и научных конференций [46–49].

### *Структура монографии*

Монография состоит из Введения, трех Глав, Приложения и Заключения. Библиографический список включает 70 наименований.

### ***Содержание работы***

Во *Введении* проанализировано современное состояние изучаемой проблемы, обоснована актуальность темы монографии, сформулирована ее цель, отмечена научная новизна полученных результатов, их научная и практическая ценность, представлены основные научные положения монографии, дано краткое содержание работы.

Глава 1 посвящена изучению механизма стабилизации взрывной неустойчивости МГД-волн за счет генерации высших гармоник альфвеновских и звуковых волн в безграничной системе поток – плазма.

В 1.1. (Введение) дана аннотация проведенного далее теоретического анализа проблемы и отмечена возможность практических приложений полученных результатов для лабораторной и космической плазмы.

В 1.2. рассмотрен процесс генерации импульсов магнитного поля при развитии взрывной неустойчивости звуковых мод в системе «холодная» плазма — «нагретый» пучок.

В 1.2.1. сформулирована и поставлена задача; из исходных МГД-уравнений получены две системы уравнений для проекций волновых возмущений, описывающие распространение альфвеновских и магнитозвуковых волн в системе. Затем, стандартным способом, получены дисперсионные соотношения для альфвеновских и звуковых мод (линейная задача). Далее выведены укороченные уравнения для медленно меняющихся комплексных амплитуд волн (нелинейная задача), найдены коэффициенты нелинейного взаимодействия мод, а также представлены результаты счета на ЭВМ условий синхронизма и коэффициентов взаимодействия для различных параметров системы «нагретый» поток — «холодная» плазма.

В 1.2.2. проведено исследование системы укороченных уравнений. Найдены стационарные амплитуды гармоник волн Альфвена, которые «следят» за изменениями звуковых мод; приведена формула для коэффициента нелинейного поглощения и даны оценки генерации импульсов магнитного поля для полупроводниковой плазмы антимонида индия (InSb).

В 1.3. исследован другой предельный случай — моноскоростной поток заряженных частиц пронизывает «нагретую» плазму. В этой системе изучен процесс генерации звуковых импульсов при развитии взрывной неустойчивости альфвеновских волн.

В 1.3.1. из исходных МГД-уравнений получены две системы уравнений в координатной форме для волн Альфвена и «звука», выведены дисперсионные соотношения для указанных мод системы, а также проанализированы условия

синхронизма. Далее записана система укороченных уравнений для комплексных амплитуд, найдены коэффициенты взаимодействия мод.

В 1.3.2. проведен анализ системы укороченных уравнений, получены выражения для стационарных амплитуд первой и второй гармоник магнитозвуковых волн, которые «медленно следят» за изменениями волны Альфвена, а также приведена формула для коэффициента нелинейного поглощения.

В 1.4. сформулированы основные результаты, полученные в Главе 1.

В *Главе 2* изучено трехволновое резонансное взаимодействие в плоском плазменном волноводе, который пронизывается потоком ионизированного газа, причем постоянное магнитное поле направлено вдоль потока (продольное распространение).

Введение к Главе 2 (2.1.) содержит краткое описание проведенных исследований.

В 2.2. подробно изложен асимптотический метод для волноводных систем [50], разработанный В.П. Дворяковским, на базе которого решается полуоднородная краевая задача и выводятся укороченные уравнения для комплексных амплитуд взаимодействующих волн системы в различных приближениях по малому параметру.

В 2.3. поставлена задача, далее из исходных МГД-уравнений, дополненных однородными граничными условиями, получена система нелинейных уравнений для проекций волновых возмущений (причем в правых частях уравнений системы учтены лишь нелинейные члены 2-го порядка), описывающая магнитозвуковые моды. Затем, применяя асимптотический метод (2.2.), выведены укороченные уравнения для комплексных амплитуд, попутно получено дисперсионное соотношение для магнитного «звука».

В 2.4. выяснены энергии мод и проанализированы условия синхронизма; установлено, что только при определенных ограничениях на номера мод возможна ВЧ и параметрическая неустойчивость (поляризационные запреты); получены формулы для коэффициентов нелинейного взаимодействия в указанных случаях; найдены инкременты соответствующих неустойчивостей и показана эффективность преобразования энергии вверх по спектру (*up*-конверсия). Кроме того, здесь же приведены результаты счета на ЭВМ условий синхронизма и коэффициентов