А.Р. Янпольский

Гиперболические функции

Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
А11

А.Р. Янпольский
А11 Гиперболические функции: Избранные главы высшей математики для инженеров и студентов втузов / А.Р. Янпольский – М.: Книга по Требованию, 2013. – 196 с.

ISBN 978-5-458-25953-8

В книге излагаются свойства гиперболических и обратных гиперболических функций и даются соотношения между ними и другими элементарными функциями. Показаны применения гиперболических функций к интегрированию функций и дифференциальных уравнений. Разобрано много задач из разных областей естествознания и техники.Все разделы сопровождаются упражнениями для самостоятельного решения. Книга снабжены справочным и табличным материалом и может быть использована в качестве справочника по гиперболическим функциям как студентами, так и инженерами и техниками.

ISBN 978-5-458-25953-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемая небольшая книга может служить в качестве учебного пособия по гиперболическим функциям. В ней излагаются основные сведения об этих функциях и приводятся примеры применения их в математическом анализе, геометрии, механике и физике. Каждый параграф снабжен упражнениями. Самостоятельное решение хотя бы некоторой части приведенных упражнений поможет читателю закрепить соответствующий теоретический материал и научиться свободно владеть гиперболическими функциями.

В конце книги приложены различные таблицы. Вместе с формулами, содержащимися в основном тексте, а также в некоторых упражнениях, завершающих параграфы, они позволяют использовать книгу и как справочник по гиперболическим функциям.

Автор выражает свою благодарность Р. С. Гутеру, Г. Л. Лунцу, Р. Я. Шостаку, прочитавшим книгу в рукописи и сделавшим ряд ценных замечаний, и особенно Ф. Л. Варпаховскому за большую работу по редактированию книги.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И СООТНОШЕНИЯ

1. Введение. Определение гиперболических функций

В математике и ее приложениях к естествознанию и технике находят широкое применение показательные функции. Это, в частности, объясняется тем, что многие изучаемые в естествознании явления относятся к числу так называемых процессов органического роста, в которых скорости изменения участвующих в них функций пропорциональны величинам самих функций. Если обозначить через y функцию, а через x аргумент, то дифференциальный закон процесса органического роста может быть записан в виде

$$\frac{dy}{dx}=ky,$$

где k — некоторый постоянный коэффициент пропорциональности.

Интегрирование этого уравнения приводит к общему решению в виде показательной функции

$$y=Ce^{kx}.$$

Если задать начальное условие $y=y_0$ при $x=x_0$, то можно определить произвольную постоянную $C=y_0e^{-kx_0}$ и, таким образом, найти частное решение

$$y=y_0e^{k(x-x_0)},$$

которое представляет собой интегральный закон рассматриваемого процесса.

К процессам органического роста относятся при некоторых упрощающих предположениях такие явления, как, например, изменение атмосферного давления в зависимости от высоты над поверхностью Земли, радиоактивный распад, охлаждение или нагревание тела в окружающей среде постоянной температуры, унимолекулярная химическая реакция (например, растворение вещества в воде), при которой имеет место закон действия масс (скорость реакции пропорциональна наличному количеству реагирующего вещества), размножение микроорганизмов и многие другие.

Возрастание денежной суммы вследствие начисления на нее сложных процентов (проценты на проценты) также представляет собой процесс органического роста.

Эти примеры можно было бы продолжить.

Наряду с отдельными показательными функциями в математике и ее приложениях находят применение различные комбинации показательных функций, среди которых особое значение имеют некоторые линейные и дробно-линейные комбинации функций e^x и e^{-x} — так называемые *гиперболические* функции. Этих функций шесть, для них введены следующие специальные наименования и обозначения:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad (\textit{гиперболический синус}),$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad (\textit{гиперболический косинус}),$$

$$\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (\textit{гиперболический тангенс}),$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}} \quad (\textit{гиперболический котангенс}),$$

$$\operatorname{sch} x = \frac{2}{e^x + e^{-x}} \quad (\textit{гиперболический секанс}),$$

$$\operatorname{csch} x = \frac{2}{e^x - e^{-x}} \quad (\textit{гиперболический косеканс}).$$

Возникает вопрос, почему даны именно такие названия, при чем здесь гипербола и известные из тригонометрии названия функций: синус, косинус и т. д.? Как мы сейчас убедимся, эти названия не случайны. Оказывается, что соотношения, связывающие тригонометрические функции с координатами точек окружности единичного радиуса, аналогичны соотношениям, связывающим гиперболические функции с координатами точек равносторонней гиперболы с единичной полуосью. Этим как раз и оправдывается наименование гиперболических функций.

Возьмем на окружности $x^2+y^2=1$ (рис. 1) точку $M(x, y)$, построим острый центральный угол $\angle AOM=t$ и опустим из точки M перпендикуляр MB на ось Ox. Тогда $\sin t=BM$ (так как радиус окружности $OM=1$), а $\cos t=OB$. Проведя в точках A и P касательные к окружности до пересечения их с продолжением радиуса в точках C и N, будем иметь: $\operatorname{tg} t=AC$, $\operatorname{ctg} t=PN$, $\sec t=OC$ и $\operatorname{cosec} t=ON$.

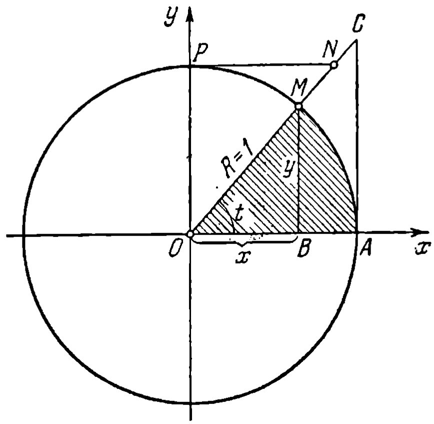

Рис. 1.

Заметим, что между центральным углом t (выраженным в радианах) и площадью S кругового сектора AOM имеется простая зависимость: $t=2S$. В самом деле, как известно, $S=\frac{1}{2}\smile{AM}\cdot R$, где $\smile{AM}$ — дуга окружности, на которую опирается центральный угол t, а R — радиус окружности. Из определения радианной меры угла следует, что $\smile{AM}=Rt$, но в нашем случае $R=1$, и потому $S=\frac{t}{2}$, или $t=2S$. Следовательно, аргумент t тригонометрических функций $\sin t$, $\cos t$, $\operatorname{tg} t$ и т. д., который обычно истолковывается геометрически как угол, может рассматриваться при желании как удвоенная площадь кругового сектора AOM. Именно такое толкование аргумента t мы примем в дальнейшем.

Теперь возьмем равностороннюю гиперболу $x^2 - y^2 = 1$ (рис. 2) и произведем такие же построения, что и для окружности. Покажем, что $\operatorname{sh} t = BM$, $\operatorname{ch} t = OB$, $\operatorname{th} t = AC$ и т. д., где t есть удвоенная площадь гиперболического сектора AOM (но не угол!).

Непосредственно из чертежа имеем: $t = 2S = 2$ (пл. OMB — пл. AMB), но пл. $OMB = \frac{1}{2} OB \cdot BM = \frac{1}{2} xy$, где x и y — координаты точки M гиперболы, а пл. AMB можно вычислить с помощью определенного интеграла. Из уравнения

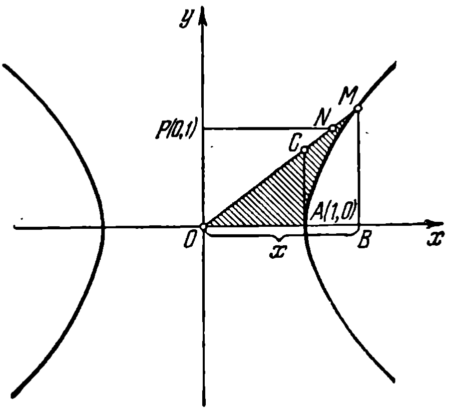

Рис. 2.

равносторонней гиперболы $x^2 - y^2 = 1$ находим, что для точек ее верхней части $y = \sqrt{x^2 - 1}$, а потому пл. $AMB = \int\limits_1^x y\,dx = \int\limits_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx$.

Для вычисления этого интеграла применим способ интегрирования по частям, положив $u = \sqrt{x^2 - 1}$, а $dv = dx$. Тогда получим $du = \frac{x\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}$, $v = x$ и, следовательно,

$$\int\limits_1^x \sqrt{x^2 - 1}\,dx = x\sqrt{x^2 - 1}\Big|_1^x - \int\limits_1^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

Первый член правой части равен xy, а второй преобразуем следующим образом:

$$\int_1^x \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^2-1}} = \int_1^x \frac{(x^2-1)+1}{\sqrt{x^2-1}}\,dx = \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx + \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Таким образом, подлежащий вычислению интеграл может быть записан в виде

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = xy - \int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx - \int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}}.$$

Второй член правой части последнего равенства есть вычисляемый интеграл; перенеся его влево, разделив обе части полученного равенства на 2 и учитывая, что

$$\int_1^x \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)\Big|_1^x = \ln(x+y),$$

будем иметь:

$$\int_1^x \sqrt{x^2-1}\,dx = \frac{1}{2}\,xy - \frac{1}{2}\ln(x+y).$$

Итак,

$$t = 2\left[\frac{1}{2}\,xy - \frac{1}{2}\,xy + \frac{1}{2}\ln(x+y)\right] = \ln(x+y)$$

или, потенцируя,

$$x+y=e^t.$$

Если разделить обе части уравнения равносторонней гиперболы $x^2-y^2=1$ на соответствующие части последнего уравнения, то получим еще одно уравнение, связывающее x и y:

$$x-y=e^{-t}.$$

Из системы этих двух уравнений относительно x и y получаем:

$$x=\frac{e^t+e^{-t}}{2}, \qquad y=\frac{e^t-e^{-t}}{2}.$$

Так как x и y равны соответственно OB и BM, а полученные комбинации показательных функций, согласно определению, равны $\operatorname{ch} t$ и $\operatorname{sh} t$, то $OB = \operatorname{ch} t$ и $BM = \operatorname{sh} t$.

Заметим попутно, что уравнения $x = a \operatorname{ch} t$, $y = a \operatorname{sh} t$, рассматриваемые совместно, являются параметрическими уравнениями равносторонней гиперболы с полуосью a (точнее, ее правой ветви), подобно тому как параметрическими уравнениями окружности радиуса a являются уравнения $x = a\cos t$, $y = a \sin t$. В самом деле, исключим параметр t, для чего возведем в квадрат обе части каждого из уравнений и из x^2 вычтем y^2:

$$a^2 \operatorname{ch}^2 t - a^2 \operatorname{sh}^2 t = a^2 (\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t) =$$

$$= a^2 \left[\left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2\right] =$$

$$= a^2 \left(\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} - \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}\right) = a^2,$$

т. е. $x^2 - y^2 = a^2$, а это и есть уравнение равносторонней гиперболы в канонической форме.

Если провести касательную к гиперболе в точке A до ее пересечения с прямой OM в точке C, то из подобия треугольников AOC и BOM имеем:

$$\frac{AC}{BM} = \frac{OA}{OB},$$

откуда

$$AC = \frac{BM}{OB} = \frac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \frac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}} = \operatorname{th} t.$$

Аналогичным образом, отложив на оси Oy отрезок $OP = 1$ и проведя из точки P прямую параллельно оси Ox до пересечения с прямой OM в точке N, можно показать, что $PN = \operatorname{cth} t$. Это вытекает из подобия треугольников OPN и OBM; имеем:

$$\frac{PN}{OB} = \frac{OP}{BM},$$

откуда

$$PN = \frac{OB}{BM} = \frac{e^t + e^{-t}}{e^t - e^{-t}} = \operatorname{cth} t.$$

Так же легко убедиться в том, что OC и ON равны соответственно $\operatorname{sch} t$ и $\operatorname{csch} t$. Мы на этом останавливаться не будем.

Выясним теперь, как изменяются гиперболические функции при изменении аргумента, который в дальнейшем будем обозначать через x.

Непосредственно из определения $\operatorname{sh} x$ имеем $\operatorname{sh} 0 = 0$. Если переписать выражение для $\operatorname{sh} x$ в виде

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}\left(e^x - \frac{1}{e^x}\right),$$

то мы обнаружим, что когда аргумент x возрастает от 0 до $+\infty$, то первый член e^x возрастает неограниченно, а второй член $1/e^x$ убывает, стремясь к нулю. Следовательно, $\operatorname{sh} x$ при $x \to +\infty$ принимает сколь угодно большие положительные значения, стремясь к $+\infty$. При изменении аргумента от 0 до $-\infty$ первый член $e^x \to 0$, а второй $e^{-x} \to +\infty$, следовательно, $\operatorname{sh} x$ при $x \to -\infty$ стремится к $-\infty$.

Таким образом, областью определения и областью значений функции $\operatorname{sh} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$.

Из определения $\operatorname{ch} x$ имеем $\operatorname{ch} 0 = 1$. Если переписать выражение для $\operatorname{ch} x$ в виде $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}\left(e^x + \frac{1}{e^x}\right)$, то легко установить, что при изменении x от 0 от $+\infty$ $\operatorname{ch} h$ возрастает от 1 до $+\infty$, а при изменении x от $-\infty$ до 0 $\operatorname{ch} x$ убывает от $+\infty$ до 1, так как $\operatorname{ch}(-x) = \operatorname{ch} x$, что следует непосредственно из определения.

Таким образом, областью определения функции $\operatorname{ch} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — промежуток $[1, +\infty)$.

Если в равенстве $\operatorname{th} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ разделить числитель и знаменатель правой части на e^x, то получим $\operatorname{th} x = \frac{1 - \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \frac{1}{e^{2x}}}$, откуда заключаем, что $\operatorname{th} x$ представляет собой правильную дробь, поскольку числитель всегда меньше знаменателя; при этом $\operatorname{th} 0 = 0$.

При изменении x от 0 до $+\infty$ $\operatorname{th} x$ возрастает от 0 до $+1$, а при изменении x от $-\infty$ до 0 — возрастает от -1 до 0. Таким образом, областью определения функции $\operatorname{th} x$ является промежуток $(-\infty, +\infty)$, а областью значений — промежуток $(-1, 1)$, т. е. $|\operatorname{th} x| < 1$.

Из равенства $\operatorname{cth} x = \dfrac{1 + \frac{1}{e^{2x}}}{1 - \frac{1}{e^{2x}}}$ находим, что $\operatorname{cth} x$ при изменении x от 0 до $+\infty$ убывает от $+\infty$ до 1, а при изменении x от $-\infty$ до 0 убывает от -1 до $-\infty$. В точке $x = 0$ $\operatorname{cth} x$ не определен: при стремлении x к 0 справа $\operatorname{cth} x \to +\infty$, при стремлении x к 0 слева $\operatorname{cth} x \to -\infty$.

Областью определения функции $\operatorname{cth} x$ являются промежутки $(-\infty, 0)$ и $(0, +\infty)$, а областью значений — промежутки $(-\infty, -1)$ и $(1, +\infty)$. Таким образом, $|\operatorname{cth} x| > 1$.

Совершенно аналогично можно исследовать изменение функций $\operatorname{sch} x$ и $\operatorname{csch} x$. Мы на этом останавливаться не будем.

Заметим, что при достаточно больших значениях x $(x > 0)$ значения $\operatorname{sh} x$ и $\operatorname{ch} x$ мало отличаются от соответствующих значений $e^{x}/2$, а значения $\operatorname{th} x$ — от $+1$. При достаточно больших по абсолютной величине, но отрицательных значениях x функция $\operatorname{sh} x$ мало отличается от $-e^{-x}/2$, $\operatorname{ch} x$ — от $e^{-x}/2$, а $\operatorname{th} x$ — от -1.

Если произвести замену аргумента x на $-x$, то получим:

$$\operatorname{sh}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{2} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{2} = -\operatorname{sh} x,$$

$$\operatorname{ch}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{2} = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \operatorname{ch} x,$$

$$\operatorname{th}(-x) = \frac{e^{-x} - e^{x}}{e^{-x} + e^{x}} = -\frac{e^{x} - e^{-x}}{e^{x} + e^{-x}} = -\operatorname{th} x,$$

$$\operatorname{cth}(-x) = \frac{e^{-x} + e^{x}}{e^{-x} - e^{x}} = -\frac{e^{x} + e^{-x}}{e^{x} - e^{-x}} = -\operatorname{cth} x,$$

что доказывает четность функции $\operatorname{ch} x$ и нечетность функций $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{th} x$ и $\operatorname{cth} x$.

Непосредственно из определения $\operatorname{ch} x$ и $\operatorname{sh} x$ следует, что

$$e^{x} = \operatorname{ch} x + \operatorname{sh} x,$$

$$e^{-x} = \operatorname{ch} x - \operatorname{sh} x,$$