Л.Э. Эльсгольц

Дифференциальные уравнения и вариационное исчисления.

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Л11

Л.Э. Эльсгольц
Л11 Дифференциальные уравнения и вариационное исчисления. / Л.Э. Эльсгольц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 424 с.

ISBN 978-5-458-27443-2

Третий выпуск "Курса высшей математики и математической физики" для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им М. В. Ломоносова.Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора "Дифференциальные уравнения" (М., Гостехиздат, 1957) и "Вариационное исчисление" (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесён ряд изменений. За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.

ISBN 978-5-458-27443-2

ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

В качестве третьего выпуска серии редакция приняла переиздание (с некоторыми изменениями) книг Л. Э. Эльсгольца по соответствующим разделам.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Третий выпуск «Курса высшей математики и математической физики» для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора «Дифференциальные уравнения» (М., Гостехиздат, 1957) и «Вариационное исчисление» (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесен ряд изменений. За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.

Л. Э. Эльсгольц

ЧАСТЬ I
ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ВВЕДЕНИЕ

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие физическое явление, но в то же время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции или вектор-функции под знаком производной или дифференциала.

Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются *дифференциальными уравнениями*. Приведем несколько примеров дифференциальных уравнений:

1) $\frac{dx}{dt} = -kx$ — уравнение радиоактивного распада (k — постоянная распада, x — количество неразложившегося вещества в момент времени t, скорость распада $\frac{dx}{dt}$ пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2) $m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$ — уравнение движения точки массы m под влиянием силы $\mathbf{F}$, зависящей от времени, положения точки, определяемого радиусом-вектором $\mathbf{r}$, и ее скорости $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$. Сила равна произведению массы на ускорение.

3) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$ — уравнение Пуассона, которому, например, удовлетворяет потенциал $u(x, y, z)$ электростатического поля, $\rho(x, y, z)$ — плотность зарядов.

Зависимость между искомыми величинами будет найдена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифференциальное уравнение называется *обыкновенным* (например, уравнения 1) и 2)). Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется ***уравнением в частных производных*** (например, уравнение 3)).

Порядком дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

Решением дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Например, уравнение радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx \tag{B.1}$$

имеет решение

$$x = ce^{-kt}, \tag{B.1$_1$}$$

где c — произвольная постоянная.

Очевидно, что дифференциальное уравнение (B.1) еще не полностью определяет закон распада $x = x(t)$. Для его полного определения надо знать количество распадающегося вещества x_0 в некоторый начальный момент t_0. Если x_0 известно, то, принимая во внимание условие $x(t_0) = x_0$ из (B.1$_1$), находим закон радиоактивного распада:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В рассмотренном примере мы легко нашли точное решение, однако в более сложных случаях очень часто приходится применять приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Эти приближенные методы еще недавно приводили к утомительным вычислениям, но теперь быстродействующие вычислительные машины способны выполнять эту работу со скоростью в несколько десятков или даже сотен тысяч операций в секунду.

Рассмотрим несколько подробнее упомянутую выше более сложную задачу о нахождении закона движения $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ материальной точки массы m под действием заданной силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$. По закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \tag{B.2}$$

Следовательно, задача сводится к интегрированию этого дифференциального уравнения. Очевидно, что закон движения еще не вполне определяется заданием массы m и силы $\mathbf{F}$, надо еще знать начальное положение точки

$$\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0 \tag{B.2$_1$}$$

и начальную скорость

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0)=\dot{\mathbf{r}}_0. \tag{B.2$_2$}$$

Укажем весьма естественный приближенный метод решения уравнения (В.2) с начальными условиями (В.2_1) и (В.2_2), причем идея этого метода может служить и для доказательства существования решения рассматриваемой задачи.

Разделим отрезок времени $t_0 \leqslant t \leqslant T$, на котором требуется определить решение уравнения (В.2), удовлетворяющее начальным условиям (В.2_1) и (В.2_2), на n равных частей длины $h=\frac{T-t_0}{n}$:

$$[t_0,\ t_1],\ [t_1,\ t_2],\ \ldots,\ [t_{n-1},\ T],$$

где

$$t_k=t_0+kh \qquad (k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1).$$

В пределах каждого из этих малых (при больших значениях n) отрезков времени сила $\mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}})$ мало изменяется (вектор-функция $\mathbf{F}$ предполагается непрерывной), поэтому приближенно ее можно считать на каждом отрезке $[t_{k-1},\ t_k]$ постоянной, например, равной ее значению в левой граничной точке каждого отрезка. Точнее, на отрезке $[t_0,\ t_1]$ сила $\mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \dot{\mathbf{r}})$ считается постоянной и равной $\mathbf{F}(t_0,\ \mathbf{r}_0,\ \dot{\mathbf{r}}_0)$. При этом допущении из уравнения (В.2) и начальных условий (В.2_1) и (В.2_2) легко определяется закон движения $\mathbf{r}_n(t)$ на отрезке $[t_0,\ t_1]$ (движение будет равномерно переменным) и, следовательно, в частности, известны значения $\mathbf{r}_n(t_1)$ и $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$. Тем же методом приближенно определяем закон движения $\mathbf{r}_n(t)$ на отрезке $[t_1,\ t_2]$, считая силу $\mathbf{F}$ на этом участке постоянной и равной $\mathbf{F}(t_1,\ \mathbf{r}_n(t_1),\ \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$. Продолжая этот процесс, определим приближенное решение $\mathbf{r}_n(t)$ поставленной задачи с начальными значениями для уравнения (В.2) на всем отрезке $[t_0,\ T]$.

Интуитивно ясно, что при $n \to \infty$ приближенное решение $\mathbf{r}_n(t)$ должно стремиться к точному решению.

Заметим, что векторное уравнение (В.2) второго порядка может быть заменено эквивалентной системой двух векторных уравнений первого порядка, если рассматривать скорость $\mathbf{v}$ как вторую неизвестную вектор-функцию:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt}=\mathbf{F}(t,\ \mathbf{r},\ \mathbf{v}). \tag{B.3}$$

Каждое векторное уравнение в трехмерном пространстве может быть заменено путем проектирования на оси координат тремя скалярными уравнениями. Следовательно, уравнение (В.2) эквивалентно системе трех скалярных уравнений второго порядка, а система (В.3) эквивалентна системе шести скалярных уравнений первого порядка.

Наконец, можно одно векторное уравнение (В.2) второго порядка в трехмерном пространстве заменить одним векторным уравнением первого порядка в шестимерном пространстве, координатами в котором служат координаты r_x, r_y, r_z радиуса-вектора $\mathbf{r}(t)$ и координаты v_x, v_y, v_z вектора-скорости $\mathbf{v}$. Такое пространство физики называют *фазовым*. Радиус-вектор $\mathrm{R}(t)$ в этом пространстве имеет координаты $(r_x, r_y, r_z, v_x, v_y, v_z)$. В таких обозначениях система (В.3) имеет вид:

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t, \mathrm{R}(t)) \tag{В.4}$$

(проекциями вектора $\mathbf{\Phi}$ в шестимерном пространстве служат соответствующие проекции правых частей системы (В.3) в трехмерном пространстве).

При такой интерпретации начальные условия (В.2_1) и (В.2_2) заменяются условием

$$\mathrm{R}(t_0) = \mathrm{R}_0. \tag{В.4_1}$$

Решением уравнения (В.4) $\mathrm{R} = \mathrm{R}(t)$ будет фазовая траектория, каждой точке которой будет соответствовать некоторое мгновенное состояние движущейся точки — ее положение $\mathbf{r}(t)$ и ее скорость $\mathbf{v}(t)$.

Если к уравнению (В.4) с начальным условием (В.4_1) применить изложенный выше приближенный метод, то на первом отрезке $[t_0, t_1]$ вектор-функцию $\mathbf{\Phi}(t, \mathrm{R}(t))$ надо считать постоянной и равной $\mathbf{\Phi}(t_0, \mathrm{R}(t_0))$. Итак, при $t_0 \leqslant t \leqslant t_0 + h$

$$\frac{d\mathrm{R}}{dt} = \mathbf{\Phi}(t_0, R(t_0)),$$

откуда, умножая на dt и интегрируя в пределах от t_0 до t, получим линейную вектор-функцию $\mathrm{R}(t)$:

$$\mathrm{R}(t) = \mathrm{R}(t_0) + \mathbf{\Phi}(t_0, \mathrm{R}(t_0))(t - t_0).$$

В частности, при $t = t_1$ будем иметь

$$\mathrm{R}(t_1) = \mathrm{R}(t_0) + h\mathbf{\Phi}(t_0, \mathrm{R}(t_0)).$$

Повторяя то же рассуждение на следующих участках, получим

$$\begin{gathered}
\mathrm{R}(t_2) = \mathrm{R}(t_1) + h\mathbf{\Phi}(t_1, \mathrm{R}(t_1)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\mathrm{R}(t_k) = \mathrm{R}(t_{k-1}) + h\mathbf{\Phi}(t_{k-1}, \mathrm{R}(t_{k-1})), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{gathered}$$

Применяя эти формулы n раз, дойдем до значения $\mathrm{R}(T)$.

В этом методе искомое решение $\mathbf{R}(t)$ приближенно заменяется кусочно линейной вектор-функцией, графиком которой служит некоторая ломаная, называемая *ломаной Эйлера*.

Для уравнения (В.2) нередко в приложениях встречается и иная постановка задачи — дополнительные условия задаются не в одной, а в двух точках. Такая задача, в отличие от задачи с условиями (В.2_1) и (В.2_2), называемой задачей с начальными условиями или задачей Коши, носит название *краевой* или *граничной*.

Пусть, например, требуется, чтобы материальная точка массы m, движущаяся под действием силы $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$, находившаяся в начальный момент $t=t_0$ в положении $\mathbf{r}=\mathbf{r}_0$, попала бы в момент $t=t_1$ в положение $\mathbf{r}=\mathbf{r}_1$, т. е. надо решить уравнение (В.2) с граничными условиями $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$, $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$. К этой граничной задаче сводятся многие баллистические задачи, причем очевидно, что решение здесь часто может быть не единственным, так как из точки $\mathbf{r}(t_0)=\mathbf{r}_0$ можно попасть в точку $\mathbf{r}(t_1)=\mathbf{r}_1$ по настильной и по навесной траекториям.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений. Например, часто требуется установить, существуют ли периодические или колеблющиеся решения, оценить быстроту возрастания или убывания решений, выяснить, сильно ли меняется решение при малом изменении начальных значений.

Остановимся несколько подробнее на последнем из этих вопросов применительно к уравнению движения (В.2). В прикладных задачах начальные значения $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$ почти всегда являются результатом измерения и, следовательно, неизбежно определены с некоторой погрешностью. Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если сколь угодно малые изменения начальных значений способны вызвать значительные изменения решения, то решение, определяемое неточными начальными значениями $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$, обычно не имеет никакого прикладного значения, так как оно даже приближенно не описывает движение рассматриваемого тела. Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых малое изменение начальных значений $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$ вызывает лишь малое изменение определяемого ими решения $\mathbf{r}(t)$.

Аналогичный вопрос возникает и в задачах, в которых требуется выяснить, с какой точностью надо задавать начальные значения $\mathbf{r}_0$ и $\dot{\mathbf{r}}_0$, чтобы движущаяся точка с заданной точностью вышла на требуемую траекторию или попала бы в данную область.

Столь же большое значение имеет вопрос о влиянии на решение малых слагаемых в правой части уравнения (B.2) — малых, но постоянно действующих сил.

В некоторых случаях эти малые силы, действующие в течение большого промежутка времени, способны сильно исказить решение и ими нельзя пренебречь. В других случаях изменение решения под действием этих сил незначительно, и если оно не превосходит требуемой точности вычисления, то малыми возмущающими силами можно пренебречь.

Ниже излагаются методы интегрирования дифференциальных уравнений и простейшие способы исследования их решений.