

**Л.Э. Эльсгольц**

**Дифференциальные  
уравнения и вариационное  
исчисления.**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Л11

Л11 **Л.Э. Эльсгольц**  
Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление. / Л.Э. Эльсгольц – М.: Книга по Требованию, 2013. – 424 с.

**ISBN 978-5-458-27443-2**

Третий выпуск "Курса высшей математики и математической физики" для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им М. В. Ломоносова. Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора "Дифференциальные уравнения" (М., Гостехиздат, 1957) и "Вариационное исчисление" (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесён ряд изменений. За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.

**ISBN 978-5-458-27443-2**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



- неоднородное 243
- — — — — однородное 243
- — — — — высших порядков 93—106, 113—124
- — — — — с постоянными коэффициентами 107—110, 124—136
- — — — —, фундаментальная система решений 100
- Линейный дифференциальный оператор 94—183
- функционал 287
- Липшица условие 40
- Ляпунова второй метод 215
- теорема 215, 217
- функция 215
- Максимум функционала 289
- — — — — сильный 290
- — — — — слабый 290
- — — — — строгий 289
- Малкина теорема 235
- Мало параметра метод 147—158
- Метрическое пространство 48
- Минимум функционала 289
- Минимум функционала сильный 290
- — — — — слабый 290
- Наклон поля 351
- Наложения принцип 114, 189
- Начальная задача 13
- Неголономные связи 382
- Непрерывный функционал 285, 286
- Неустойчивое решение 204
- Неустойчивый предельный цикл 226
- узел 208, 211
- фокус 209
- Общее решение дифференциального уравнения 15, 86
- Общий интеграл дифференциального уравнения 20
- Обыкновенное дифференциальное уравнение 10
- Огибающая 74
- Оператор
  - линейный
  - дифференциальный 94, 183
- Операторный метод решения дифференциальных уравнений 129—136
- многочлен 129
- Определитель Вронского 97, 185
- Оптимальная функция 391
- Оптимальное управление 391
- Особая интегральная кривая 78
- точка 57
- Особое решение дифференциального уравнения 57, 78
- Остроградского уравнение 314
- Остроградского — Гамильтона принцип 320
- Остроградского — Лиувилля формула 106
- Первого приближения система уравнений 221
- Первый интеграл 89, 179
- Периодические решения дифференциального уравнения 143—146
- Периодичности условия 157
- Плотность функции Лагранжа 324
- Покая точка 171, 205
- Поле собственное 351
- центральное 351
- экстремалей 352
- Полная интегрируемость уравнения Пфаффа 256
- Полное пространство 48
- Полный интеграл 261
- Полуустойчивый предельный цикл 226
- Порядок дифференциального уравнения 10
- Последовательных приближений метод 199
- Предельный цикл 23, 226
- — — — — неустойчивый 226
- — — — — полуустойчивый 226
- — — — — устойчивый 226

- Пространство метрическое 48  
 — полное 48  
 — равномерной сходимости 50  
 — фазовое 12, 170  
 Прямые методы в вариационном  
 исчислении 394—413  
 Пуассона уравнение 315  
 Пфаффа уравнение 255  
 Равномерной сходимости  
 пространство 50  
 Расстояние 48  
 Резонанс 145, 152  
 Риккати уравнение 31  
 Ритца метод 397—406  
 Рунге метод 64, 201  
 Связи голономные 382  
 — неголономные 382  
 Связный экстремум 282  
 Седло 59, 208  
 Сжатых отображений принцип 48  
 Сильный экстремум 290, 360  
 Системы дифференциальных  
 уравнений 168—202  
 — линейных дифференциальных  
 уравнений 181—192  
 — — — с постоянными  
 коэффициентами 192—199  
 Слабый экстремум 290, 359, 360  
 Собственное поле 351  
 Специальные решения 253  
 Стационарного действия принцип  
 320  
 Строгий экстремум 290  
 Суперпозиции принцип 114, 189  
 Трансверсальности условие 331, 336  
 Узел 58  
 — дикритический 211  
 — неустойчивый 208, 211  
 — устойчивый 207, 211  
 Управление оптимальное 391  
 Управляющая функция 391  
 Уравнения в частных производных  
 10  
 — — — — первого порядка 241 —  
 279  
 Уравнивание 61  
 Условный экстремум 282, 375—393  
 Устойчивое' решение (по Ляпунову)  
 204  
 — — по отношению к постоянно  
 действующим возмущениям  
 236  
 Устойчивый предельный цикл 222  
 — узел 207, 211  
 — фокус 209  
 Фазовая траектория 170  
 Фазовое пространство 12, 170  
 Фокус 59  
 — неустойчивый 209  
 — устойчивый 209  
 Фундаментальная система решений  
 100  
 Функционал 280, 284  
 — линейный 287  
 — непрерывный 285, 286  
 Характеристик метод 268  
 Характеристики 245, 248, 254, 268,  
 269, 273  
 Характеристическая полоса 269, 273  
 Характеристическое уравнение 107,  
 194  
 Центр 59, 210  
 Центральное поле 351  
 Цикл предельный 23, 226  
 Четаева теорема 218  
 Штермера метод 62, 200  
 Эйлера дифференциальное уравнение  
 110—113, 136  
 — конечно-разностный метод 395—  
 397  
 — ломаная 13, 40  
 — метод 39, 61, 199  
 — уравнение (в вариационном  
 исчислении) 297, 306, 368, 377  
 Эйлера — Пуассона уравнение 310  
 Экстремаль 297, 310

Экстремум связанный 282  
— условный 282, 375—393  
— функционала 290  
— — сильный 290, 360

— — слабый 290, 359, 360  
Якоби первый метод 277  
— уравнение 356  
— условие 355

## ОТ РЕДАКТОРОВ СЕРИИ

В качестве третьего выпуска серии редакция приняла переиздание (с некоторыми изменениями) книг Л. Э. Эльсгольца по соответствующим разделам.

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Третий выпуск «Курса высшей математики и математической физики» для физических и физико-математических факультетов содержит теорию дифференциальных уравнений и вариационное исчисление. В основу книги положены лекции, которые автор в течение ряда лет читал на физическом факультете Московского ордена Ленина государственного университета им. М. В. Ломоносова.

Излагаемый материал хотя и близок к содержанию книг автора «Дифференциальные уравнения» (М., Гостехиздат, 1957) и «Вариационное исчисление» (М., Гостехиздат, 1958), однако по совету редакторов Курса в него внесен ряд изменений. За эти советы автор выражает им свою искреннюю признательность.

*Л. Э. Эльсгольц*

ЧАСТЬ I

**ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

---

**ВВЕДЕНИЕ**

При изучении физических явлений часто не удается непосредственно найти законы, связывающие величины, характеризующие физическое явление, но в то же время легко устанавливается зависимость между теми же величинами и их производными или дифференциалами. При этом мы получаем уравнения, содержащие неизвестные функции или вектор-функции под знаком производной или дифференциала.

Уравнения, в которых неизвестная функция или вектор-функция входит под знаком производной или дифференциала, называются *дифференциальными уравнениями*. Приведем несколько примеров дифференциальных уравнений:

1)  $\frac{dx}{dt} = -kx$  — уравнение радиоактивного распада ( $k$  — постоянная распада,  $x$  — количество неразложившегося вещества в момент времени  $t$ , скорость распада  $\frac{dx}{dt}$  пропорциональна количеству распадающегося вещества).

2)  $m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}\left(t, \mathbf{r}, \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)$  — уравнение движения точки массы  $m$  под влиянием силы  $\mathbf{F}$ , зависящей от времени, положения точки, определяемого радиусом-вектором  $\mathbf{r}$ , и ее скорости  $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$ . Сила равна произведению массы на ускорение.

3)  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 4\pi\rho(x, y, z)$  — уравнение Пуассона, которому, например, удовлетворяет потенциал  $u(x, y, z)$  электростатического поля,  $\rho(x, y, z)$  — плотность зарядов.

Зависимость между искомыми величинами будет найдена, если будут указаны методы нахождения неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями. Нахождение неизвестных функций, определяемых дифференциальными уравнениями, и является основной задачей теории дифференциальных уравнений.

Если в дифференциальном уравнении неизвестные функции или вектор-функции являются функциями одной переменной, то дифферен-

циальное уравнение называется *обыкновенным* (например, уравнения 1) и 2)). Если же неизвестная функция, входящая в дифференциальное уравнение, является функцией двух или большего числа независимых переменных, то дифференциальное уравнение называется *уравнением в частных производных* (например, уравнение 3)).

*Порядком* дифференциального уравнения называется максимальный порядок входящей в уравнение производной (или дифференциала) неизвестной функции.

*Решением* дифференциального уравнения называется функция, которая при подстановке в дифференциальное уравнение обращает его в тождество.

Например, уравнение радиоактивного распада

$$\frac{dx}{dt} = -kx \quad (\text{B.1})$$

имеет решение

$$x = ce^{-kt}, \quad (\text{B.1}_1)$$

где  $c$  — произвольная постоянная.

Очевидно, что дифференциальное уравнение (B.1) еще не полностью определяет закон распада  $x = x(t)$ . Для его полного определения надо знать количество распадающегося вещества  $x_0$  в некоторый начальный момент  $t_0$ . Если  $x_0$  известно, то, принимая во внимание условие  $x(t_0) = x_0$  из (B.1<sub>1</sub>), находим закон радиоактивного распада:

$$x = x_0 e^{-k(t-t_0)}.$$

Процесс нахождения решений дифференциального уравнения называется *интегрированием дифференциального уравнения*. В рассмотренном примере мы легко нашли точное решение, однако в более сложных случаях очень часто приходится применять приближенные методы интегрирования дифференциальных уравнений. Эти приближенные методы еще недавно приводили к утомительным вычислениям, но теперь быстродействующие вычислительные машины способны выполнять эту работу со скоростью в несколько десятков или даже сотен тысяч операций в секунду.

Рассмотрим несколько подробнее упомянутую выше более сложную задачу о нахождении закона движения  $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$  материальной точки массы  $m$  под действием заданной силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$ . По закону Ньютона

$$m\ddot{\mathbf{r}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}}). \quad (\text{B.2})$$

Следовательно, задача сводится к интегрированию этого дифференциального уравнения. Очевидно, что закон движения еще не вполне

определяется заданием массы  $m$  и силы  $\mathbf{F}$ , надо еще знать начальное положение точки

$$\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0 \quad (\text{B.2}_1)$$

и начальную скорость

$$\dot{\mathbf{r}}(t_0) = \dot{\mathbf{r}}_0. \quad (\text{B.2}_2)$$

Укажем весьма естественный приближенный метод решения уравнения (B.2) с начальными условиями (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>), причем идея этого метода может служить и для доказательства существования решения рассматриваемой задачи.

Разделим отрезок времени  $t_0 \leq t \leq T$ , на котором требуется определить решение уравнения (B.2), удовлетворяющее начальным условиям (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>), на  $n$  равных частей длины  $h = \frac{T-t_0}{n}$ :

$$[t_0, t_1], [t_1, t_2], \dots, [t_{n-1}, T],$$

где

$$t_k = t_0 + kh \quad (k = 1, 2, \dots, n-1).$$

В пределах каждого из этих малых (при больших значениях  $n$ ) отрезков времени сила  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  мало изменяется (вектор-функция  $\mathbf{F}$  предполагается непрерывной), поэтому приближенно ее можно считать на каждом отрезке  $[t_{k-1}, t_k]$  постоянной, например, равной ее значению в левой граничной точке каждого отрезка. Точнее, на отрезке  $[t_0, t_1]$  сила  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  считается постоянной и равной  $\mathbf{F}(t_0, \mathbf{r}_0, \dot{\mathbf{r}}_0)$ . При этом допущении из уравнения (B.2) и начальных условий (B.2<sub>1</sub>) и (B.2<sub>2</sub>) легко определяется закон движения  $\mathbf{r}_n(t)$  на отрезке  $[t_0, t_1]$  (движение будет равномерно переменным) и, следовательно, в частности, известны значения  $\mathbf{r}_n(t_1)$  и  $\dot{\mathbf{r}}_n(t_1)$ . Тем же методом приближенно определяем закон движения  $\mathbf{r}_n(t)$  на отрезке  $[t_1, t_2]$ , считая силу  $\mathbf{F}$  на этом участке постоянной и равной  $\mathbf{F}(t_1, \mathbf{r}_n(t_1), \dot{\mathbf{r}}_n(t_1))$ . Продолжая этот процесс, определим приближенное решение  $\mathbf{r}_n(t)$  поставленной задачи с начальными значениями для уравнения (B.2) на всем отрезке  $[t_0, T]$ .

Интуитивно ясно, что при  $n \rightarrow \infty$  приближенное решение  $\mathbf{r}_n(t)$  должно стремиться к точному решению.

Заметим, что векторное уравнение (B.2) второго порядка может быть заменено эквивалентной системой двух векторных уравнений первого порядка, если рассматривать скорость  $\mathbf{v}$  как вторую неизвестную вектор-функцию:

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{v}, \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}). \quad (\text{B.3})$$

Каждое векторное уравнение в трехмерном пространстве может быть заменено путем проектирования на оси координат тремя



В этом методе искомое решение  $\mathbf{R}(t)$  приближенно заменяется кусочно линейной вектор-функцией, графиком которой служит некоторая ломаная, называемая *ломаной Эйлера*.

Для уравнения (В.2) нередко в приложениях встречается и иная постановка задачи — дополнительные условия задаются не в одной, а в двух точках. Такая задача, в отличие от задачи с условиями (В.2<sub>1</sub>) и (В.2<sub>2</sub>), называемой задачей с начальными условиями или задачей Коши, носит название *краевой* или *граничной*.

Пусть, например, требуется, чтобы материальная точка массы  $m$ , движущаяся под действием силы  $\mathbf{F}(t, \mathbf{r}(t), \dot{\mathbf{r}}(t))$ , находившаяся в начальный момент  $t = t_0$  в положении  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ , попала бы в момент  $t = t_1$  в положение  $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ , т. е. надо решить уравнение (В.2) с граничными условиями  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$ ,  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$ . К этой граничной задаче сводятся многие баллистические задачи, причем очевидно, что решение здесь часто может быть не единственным, так как из точки  $\mathbf{r}(t_0) = \mathbf{r}_0$  можно попасть в точку  $\mathbf{r}(t_1) = \mathbf{r}_1$  по настильной и по навесной траекториям.

Точное или приближенное решение задач с начальными условиями и граничных задач является основной задачей теории дифференциальных уравнений, однако иногда требуется выяснить или приходится ограничиваться выяснением лишь некоторых свойств решений. Например, часто требуется установить, существуют ли периодические или колеблющиеся решения, оценить быстроту возрастания или убывания решений, выяснить, сильно ли меняется решение при малом изменении начальных значений.

Остановимся несколько подробнее на последнем из этих вопросов применительно к уравнению движения (В.2). В прикладных задачах начальные значения  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  почти всегда являются результатом измерения и, следовательно, неизбежно определены с некоторой погрешностью. Поэтому естественно возникает вопрос о влиянии малого изменения начальных значений на искомое решение.

Если сколь угодно малые изменения начальных значений способны вызвать значительные изменения решения, то решение, определяемое неточными начальными значениями  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$ , обычно не имеет никакого прикладного значения, так как оно даже приближенно не описывает движение рассматриваемого тела. Следовательно, возникает важный для приложений вопрос о нахождении условий, при которых малое изменение начальных значений  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$  вызывает лишь малое изменение определяемого ими решения  $\mathbf{r}(t)$ .

Аналогичный вопрос возникает и в задачах, в которых требуется выяснить, с какой точностью надо задавать начальные значения  $\mathbf{r}_0$  и  $\dot{\mathbf{r}}_0$ , чтобы движущаяся точка с заданной точностью вышла на требуемую траекторию или попала бы в данную область.

Столь же большое значение имеет вопрос о влиянии на решение малых слагаемых в правой части уравнения (В.2) -- малых, но постоянно действующих сил.

В некоторых случаях эти малые силы, действующие в течение большого промежутка времени, способны сильно исказить решение и ими нельзя пренебречь. В других случаях изменение решения под действием этих сил незначительно, и если оно не превосходит требуемой точности вычисления, то малыми возмущающими силами можно пренебречь.

Ниже излагаются методы интегрирования дифференциальных уравнений и простейшие способы исследования их решений.

---