

Чарльз Тригг

Задачи с изюминкой

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Ч-20

Ч-20 **Чарльз Тригг**
Задачи с изюминкой / Чарльз Тригг – М.: Книга по Требованию, 2013. –
298 с.

ISBN 978-5-458-24649-1

Книга американского педагога Чарльза Тригга открывает новую серию "Задачи и олимпиады". В ней собраны задачи, которые при довольно сложной формулировке допускают простое и изящное решение. Среди авторов оригинальных решений - имена известных американских математиков. Сборник рассчитан на широкий круг читателей, интересующихся математикой, особый интерес представляет для увлеченных этим предметом учащихся старших классов.

ISBN 978-5-458-24649-1

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

Серия рассчитана в основном на широкий круг учащейся молодежи — от старшеклассников до младшекурсников, хотя необходимый уровень подготовки ее читателей сильно колеблется не только от книги к книге, но и от задачи к задаче. (Так, значительная часть задач из дункелевского сборника требует известной математической культуры, тогда как в книге Тригга, за редким исключением, все задачи элементарны.) С другой стороны, эти книги заинтересуют и тех читателей, чей возраст далек от школьного (к тому же среди активных читателей популярной математической литературы значительную долю составляют родители, многочисленные мамы и папы, стремящиеся обнаружить в своих детях математические способности).

Задачи, собранные Триггом, публиковались в разное время в американских журналах (см. предисловие автора). Хотя даже самые крупные наши библиотеки не располагают полными комплектами этих журналов, задачи из них, и уж во всяком случае идеи задач, довольно широко представлены в «фольклоре» московских, да, вероятно, и не только московских, школьных математических кружков. Поэтому не удивительно, что для ветеранов-кружковцев многое в книге Тригга окажется знакомым¹. Даже если оставить в стороне фактические пересечения, общий стиль задач и круг тем, из которых они почерпнуты, роднят сборник Тригга с первыми книгами «Библиотеки математического кружка» — прекрасной серии, которая теперь уже состоит из дюжины томов и насчитывает за плечами двадцать с лишним лет. Рядом с ней я и поставлю книгу Тригга на своей книжной полке.

Эти книги роднят «олимпиадный дух» и нестандартность задач, стремление сочетать кажущуюся несерьезность, а иногда и легкомысленность формулировок с нетривиальностью содержания и, наконец, забота о красоте и изяществе решений, которые должны не только по-

¹ Кстати, сам Тригг подчеркивает, что ссылка на автора и дата публикации не носят приоритетного характера. Во многих случаях задача или ее решение так или иначе известны. С некоторыми задачами этого сборника я познакомился в школьном кружке при МГУ за несколько лет до указанной в книге даты журнальной публикации.

учать, но и вызывать эмоции (желательно, разумеется, положительные).

Сегодняшние советские школьники располагают массой популярных книг, к их услугам прекрасный журнал «Квант», на страницах которого постоянно публикуются очень интересные и свежие задачи. И все же, исходя из принципа «новое есть хорошо забытое старое», я полагаю, что издание задач, собранных в течение многих лет (а если иметь в виду всю серию, то и в разных странах), полезно не только простым расширением «задачного фонда», но и, так сказать, «генофонда», поскольку оно введет в обиход новые и оживит старые идеи задач, что в общем-то гораздо важнее.

По замыслу Тригга, каждая из задач этого сборника должна содержать в своем решении что-то неожиданное, какую-то «изюминку». Вот почему мы в переводе остановились на несколько необычно звучащем названии, хотя английское слово Quickies означает нечто другое. После ряда неудачных попыток найти подходящий русский эквивалент редактор перевода провел закрытый конкурс среди своих друзей. Неологизмы вроде «Раз-и-Готы» («раз и готово!») и «Вмиг-реши» («решил вмиг») были признаны нежизнеспособными, и тогда, отвергнув «орешки», мы остановились на «изюминке».

Возможно, некоторым читателям не все «изюминки» придутся по вкусу; я и сам нахожу часть из них «недостаточно сладкими». Впрочем, особенностью книги Тригга вообще является отсутствие систематизации. Задачи трудные и легкие, остроумные и банальные идут вперемешку. Рядом с задачкой «на устный счет» (задача 7) вы встречаете такую, решение которой, в сущности, требует интегрального исчисления (задача 15), а способ, которым решена задача 75, хотя и совершенно элементарный, радует своим изяществом. Поэтому решать эти задачи подряд и без разбора совершенно необязательно. Каждый может и должен выбирать здесь то, что ему по силам и по душе. Даже шестиклассник может найти среди задач кое-что для себя интересное. Для более же искушенного читателя хаотичность в расположении материала и пестрота тематики являются даже некоторым достоинством, ибо помогают сохранить интерес к книге на всем ее протяжении.

Наконец, я предвижу, что среди читателей найдутся и такие, которые, выковыривая изюминку, заглянут в решение, не пытаясь решить задачу самостоятельно (ах, как это непедагогично!). Основываясь на собственном опыте, знаю, что это тоже может доставить удовольствие.

Как известно, иногда в изюме попадаются косточки. Решение может опираться на малоизвестные факты, не входящие в нашу школьную программу, хотя в большинстве своем задачи Тригга посильны школьникам восьмых-девярых классов. В некоторых случаях приведенное в книге рассуждение слишком кратко и нуждается, на мой взгляд, в разъяснении. Ряд мест (впрочем, их совсем немного) может вызывать справедливое негодование ревнителя математической строгости. Потому я счел необходимым сопроводить русский перевод книги Тригга комментарием, в котором собраны некоторые сведения из элементарной математики, поясняются трудные места и приводятся правильные решения (может быть, и без «изюминки») в тех случаях, когда это необходимо. (Тем самым я частично отвечаю на обращение автора, помещенное в начале отдела решений.) Можно было бы и исключить задачи, решения которых не вполне удовлетворительны, но, во-первых, разбор ошибок обычно не менее поучителен, чем разбор правильного решения, а во-вторых, красивое, но неверное решение может послужить стимулом к отысканию красивого и верного решения, и читатель преуспеет в этом больше, чем я.

В оригинале книга Тригга вышла в 1967 году. За прошедшие годы в тех же журналах, откуда главным образом почерпнуто ее содержание, появилось немало интересных задач. Переводчик книги Ю. Н. Сударев отобрал некоторые из них, и мы добавили их к основному тексту, сохранив непрерывную нумерацию задач (с задачи 271 и далее). Средний уровень трудности этих задач несколько выше, чем у Тригга, а некоторые задачи явно предполагают знакомство с началами математического анализа. Наш отбор был менее придирчив (Тригг отбирал из обширной коллекции, насчитывающей около 16 000 задач) и не претендует на обязательную «изюминку» в задаче.

В дополнительной части книги вмешательство редактора иногда было весьма серьезным: текст сокращен за

счет малоинтересных подробностей или расширялся там, где рассуждение казалось слишком беглым; исправлялись незначительные неточности; в некоторых задачах менялись «реалии» и «литературная обработка» при сохранении математической идеи, лежащей в основе задачи и ее решения. Иногда подобные замены были вызваны желанием обойтись без введения обозначений, принятых у специалистов, но малоизвестных для широкого круга читателей.

Мне остается выразить признательность всем энтузиастам, которые своими советами и дружеским участием способствовали нашей работе.

В. М. Алексеев

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

В данном сборнике представлены элементарные задачи из области арифметики, алгебры, плоской и пространственной геометрии, тригонометрии, теории чисел и традиционные головоломки, такие, как задачи на разрезание, криптарифмы и магические квадраты. Акцент сделан на методе решения. Читателю предлагается не просто найти решение, но и сделать его по возможности более изящным, чем здесь представленное.

Я начал собирать подобные задачи с марта 1950 г., когда, будучи редактором раздела «Задачи и решения» журнала *Mathematics Magazine*, ввел в него подраздел, носящий название «Quickies». Во вводной статье к нему говорилось: «Время от времени в этом разделе будут публиковаться задачи, которые можно решить трудоемкими методами, но с которыми при надлежащем подходе удастся справиться в два счета. Мы предлагаем читателям присылать нам свои любимые задачи такого типа вместе с изящными решениями, а также, если представится возможным, и с указанием источника, откуда взято соответствующее решение». Раздел быстро завоевал популярность и удерживает ее до настоящего времени.

Под «изящным» в математике принято понимать ясное и логичное решение, содержащее, так сказать, некоторую «изюминку». Краткость обычно достигается не за счет пропусков облегчающих понимание шагов и не с помощью известной математической уловки, состоящей в использовании слова «очевидно». Разумеется, для читателя, уже знакомого с данным результатом, элемент неожиданности пропадает.

Быстрота и изящество — понятия относительные. Зачастую магический ключ к решению задачи дает использование какой-то малоизвестной теоремы или теоремы, заимствованной из другой дисциплины или из более «вы-

соких» разделов математики. В ряде случаев скорейшее решение можно получить с помощью элементарной математики. Иногда желаемый эффект может дать какой-нибудь специально придуманный или на первый взгляд не связанный с данной задачей прием.

Часто хорошие задачи из-за различных по форме постановок, которые порой маскируют тот факт, что мы имеем дело с нашей давней знакомой, годами циркулируют анонимно. Не стремясь увековечить подобную ситуацию, но отдавая себе отчет в том, что обнаружить действительно первое появление какой-нибудь задачи практически невозможно, я счел необходимым в данной книге указывать источник и автора *решения*. Если фамилия автора не приводится, то решение принадлежит мне самому. Если же автор решения указан, но источник не упомянут, то это означает, что автор прислал решение непосредственно мне.

Иногда оригинальный текст решения перерабатывался без изменения самого метода. В ряде случаев в моем распоряжении не оказывалось подходящих символов, которые позволяли бы записать решение компактно, поэтому оно может показаться излишне длинным, хотя основных идей и шагов на самом деле в нем было использовано мало.

Поскольку существенная часть решения опирается на частную математическую дисциплину, я не проводил классификацию задач на алгебраические, геометрические и т. п. Трудность меняется от одной задачи к другой случайным образом, поэтому в любом месте читатель может натолкнуться как на трудную, так и на легкую задачу.

Чарльз У. Тригг

ЗАДАЧИ

Здесь представлено 270 занимательных задач различной степени трудности, взятых из разных источников и относящихся к различным областям математики. Они бросают читателю двойной вызов — не просто найти решение, а попытаться отыскать такое решение, которое было бы короче, аккуратнее и элегантнее приведенного в книге.

Задачи помещены в случайном порядке. Автор не старался отделить менее трудные задачи от более трудных. Поэтому читатель в любой момент должен быть готов к встрече как с трудной, так и с легкой задачей. Каждая задача снабжена порядковым номером. Под тем же номером во второй части книги приводится соответствующее решение.

1. Рассеянная секретарша. Машинистка напечатала десять писем и адреса на десяти конвертах, но рассеянная секретарша разложила эти письма по конвертам, насколько не заботясь о соответствии между письмом и адресатом. Правда, в каждый конверт она положила только по одному письму. Какова вероятность того, что ровно девять писем попали в предназначенные для них конверты?

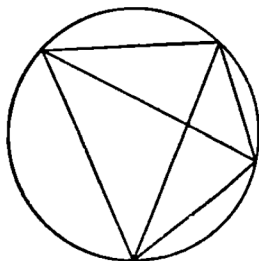
2. Теорема Пифагора. Докажите, что квадрат гипотенузы прямоугольного треугольника равен сумме квадратов его катетов.

3. Четыре уравнения с четырьмя неизвестными. Найдите все решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} x + y + z + w = 10 \\ x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 30 \\ x^3 + y^3 + z^3 + w^3 = 100 \\ x y z w = 24 \end{cases}$$

4. Тест с нулевой суммой. Некий тест состоит из 26 вопросов. За каждый неверный ответ у испытуемого вычитается пять очков, а за каждый правильный — ему начисляется восемь очков. Испытуемый ответил на все вопросы. На сколько вопросов он ответил правильно, если в итоге сумма полученных им очков равнялась нулю?

5. Теорема Птолемея. Докажите, что в любом выпуклом четырехугольнике, вписанном в окружность, произ-



ведение диагоналей равно сумме произведений противоположных сторон.

6. Простое разложение на множители. Разложите на множители, не группируя члены, выражение

$$x^8 - x^7y + x^6y^2 - x^5y^3 + x^4y^4 - x^3y^5 + x^2y^6 - xy^7 + y^8.$$

7. Устный счет. Возведите в уме 85 в квадрат.

8. Уравнение четвертого порядка. Сколько отрицательных корней имеет уравнение

$$x^4 - 5x^3 - 4x^2 - 7x + 4 = 0?$$

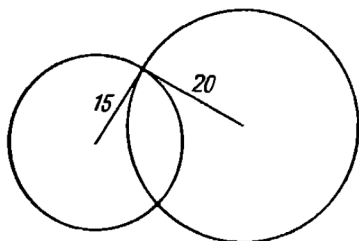
9. По миллиону с каждой стороны. Два миллиона отмеченных точек целиком расположены внутри окружности, диаметр которой равен 1 см. Существует ли прямая, по каждую сторону от которой находилось бы ровно по одному миллиону таких точек?

10. Бесконечность множества простых чисел. Покажите, что существует бесконечно много простых чисел.

11. Комплексные числа. Упростите выражение

$$(27 + 8i)/(3 + 2i^3).$$

12. Перекрывающиеся круги. Окружность радиуса 15 пересекается с окружностью радиуса 20 под прямым углом. Рассмотрим две области, которые получаются после удаления из соответствующих кругов их общей части. Чему равна разность их площадей?



13. Соревнования по теннису. В соревнованиях по теннису участвуют n игроков. Каждый теннисист выбывает из турнира после первого поражения. Сколько следует провести встреч, чтобы выявить победителя?

14. Суммирование факториалов. Чему равна сумма

$$1(1!) + 2(2!) + 3(3!) + \dots + n(n!)?$$

15. Пересекающиеся цилиндры. Оси симметрии двух прямых круговых цилиндров, диаметр каждого из которых равен 2 см, пересекаются под прямым углом. Чему равен объем общей части этих цилиндров?

16. Представление целого числа в виде суммы. Число 3 можно представить четырьмя способами как сумму одного или более положительных чисел, а именно как 3, $1 + 2$, $2 + 1$ и $1 + 1 + 1$. Покажите, что любое целое положительное число n можно подобным же образом выразить 2^{n-1} способами.

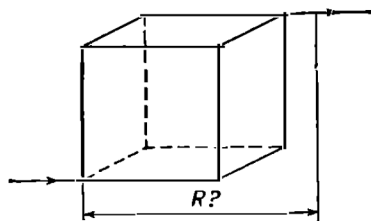
17. Многочлен четвертого порядка с рациональными корнями. Покажите, что уравнение четвертого порядка

$$()x^4 + ()x^3 + ()x^2 + ()x + () = 0,$$

где скобки в произвольном порядке заполнены числами 1, -2, 3, 4, -6 (по одному числу в каждой скобке), всегда имеет рациональный корень.

18. Проволочный куб. Каждое ребро проволочного куба имеет сопротивление 1 Ом. Чему равно

сопротивление между двумя противоположными вершинами данного куба?



19. Деление-шутка. Каждая буква криптоарифма $АННААН:ЮКЕ = НА$ единственным образом представляет какую-то десятичную цифру. Восстановите зашифрованное здесь деление.

20. Продавец цветов. Девушка купила в магазине x роз, заплатив за все y долларов (x и y — целые числа). Когда она собиралась уходить, продавец сказал ей: «Если бы вы купили еще 10 роз, то я отдал бы вам все розы за 2 доллара и вы сэкономили бы 80 центов на каждой дюжине». Найдите x и y .

21. Отношение площадей у многоугольников. Периметры некоторого равностороннего треугольника и правильного шестиугольника совпадают. Чему равно отношение их площадей?

22. Перевернутые чашки. Требуется перевернуть вверх дном n чашек, следуя такому правилу: за один раз разрешается перевернуть ровно $n - 1$ чашку (любые), и эту процедуру можно повторить несколько раз. Покажите, что задача разрешима при четном n и неразрешима при нечетном.

23. Конец света. Первого апреля 1946 г. газета «Иерихон Дейли Ляпсус» сообщила: «Известный астролог и знаток чисел из Гайясуелы, профессор Евклид Парацельсо Бомбаст Умбуджо, предсказал что конец света наступит в 2141 г. Его предсказание основано на глубоких математических и исторических исследованиях. Профессор Умбуджо вычислил, чему равно выражение

$$1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$$

при $n = 0, 1, 2, 3$ и т. д. до 1945, и обнаружил, что все числа, которые он получил в результате многомесячной кропотливой работы, делятся на 1946. Числа 1492, 1770