

Р. Курант, Д. Гильберт

**Методы математической
физики**

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Р11

Р. Курант
P11 Методы математической физики: Том 2 / Р. Курант, Д. Гильберт – М.: Книга по Требованию, 2012. – 620 с.

ISBN 978-5-458-25397-0

В этом томе излагаются некоторые отделы теории дифференциальных уравнений в частных производных, связанные с математической физикой. Даже с этим ограничением я отнюдь не стремился к исчерпывающей полноте. Точнее говоря, здесь рассматриваются преимущественно вопросы, в существо или форму изложения которых мне, как я полагаю, удалось внести нечто новое. При этом преследовалась цель сделать важные ветви анализа более доступными и прозрачными и тем облегчить путь для дальнейших исследований. Этот том, в основном независимый от предыдущего, содержит систематическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемую с точки зрения математической физики. В последней, седьмой, главе приводятся на основе прямых методов вариационного исчисления доказательства существования решений для краевых задач и задач о собственных значениях эллиптических дифференциальных уравнений в том объеме, в каком эти задачи встречались в предшествующем изложении.

ISBN 978-5-458-25397-0

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Глава I

Введение. Основные понятия

§ 1. Представление о многообразии решений	14
1. Примеры (14). — 2. Дифференциальные уравнения для заданных семейств функций (19).	
§ 2. Системы дифференциальных уравнений	22
1. Проблема эквивалентности систем и отдельных дифференциальных уравнений (22). — 2. Системы определенные, сверхопределенные, недоопределенные (24).	
§ 3. Методы интегрирования для некоторых дифференциальных уравнений частных видов	27
1. Разделение переменных (27). — 2. Получение новых решений с помощью суперпозиции (наложения). Основное решение уравнения теплопроводности. Интеграл Пуассона (29).	
§ 4. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными. Полный интеграл	30
1. Геометрическое истолкование дифференциального уравнения в частных производных первого порядка (30). — 2. Полный интеграл (32). — 3. Особые интегралы (33). — 4. Примеры (34).	
§ 5. Теория линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений первого порядка	35
1. Линейные дифференциальные уравнения (35). — 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения (38).	
§ 6. Преобразование Лежандра	39
1. Преобразование Лежандра для функции двух переменных (39). — 2. Преобразование Лежандра для функции n переменных (41). — 3. Применение преобразования Лежандра к дифференциальным уравнениям с частными производными (41).	
§ 7. Определение решений по их начальным значениям и теорема существования	44
1. Формулировка и разъяснение задачи с заданными начальными значениями (задачи Коши) (44). — 2. Приведение к системе квазилинейных дифференциальных уравнений (47). — 3. Определение производных вдоль начального многообразия (50). — 4. Доказательство существования аналитических решений у аналитических дифференциальных уравнений (52).	

Дополнения к главе I

§ 1. Дифференциальное уравнение для опорной функции минимальной поверхности	57
§ 2. Система дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение высшего порядка	60
§ 3. Система двух дифференциальных уравнений первого порядка и одно дифференциальное уравнение второго порядка	61
§ 4. Параметрическое представление отображений, сохраняющих площадь	63

Глава II

Общая теория дифференциальных уравнений с частными производными первого порядка

§ 1. Квазилинейные дифференциальные уравнения при двух независимых переменных	66
1. Характеристические кривые (66). — 2. Задача Коши (68). — 3. Примеры (70).	
§ 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения с n независимыми переменными	73
§ 3. Общие дифференциальные уравнения первого порядка с двумя независимыми переменными	79
1. Характеристические и фокальные кривые (79). — 2. Решение задачи Коши (83). — 3. Характеристики как элементы разветвления. Дополнительные замечания. Интегральный кононд (85).	
§ 4. Связь с теорией полного интеграла	87
§ 5. Фокальные кривые и уравнение Монжа	89
§ 6. Примеры	91
1. Дифференциальное уравнение $(\text{grad } u)^2 = 1$ (91). — 2. $F(u_x, u_y) = 0$ (94). — 3. Дифференциальное уравнение Клеро (96). — 4. Дифференциальное уравнение поверхностей каналов (97). — 5. Соотношение однородности (98).	
§ 7. Общее дифференциальное уравнение с n независимыми переменными	99
§ 8. Полный интеграл и теория Гамильтона-Якоби	105
1. Образование огибающей и характеристические кривые (105). — 2. Канонический вид характеристических дифференциальных уравнений (108). — 3. Теория Гамильтона-Якоби (109). — 4. Пример. Задача о двух телах (111). — 5. Пример. Геодезические линии на эллипсоиде (113).	
§ 9. Теория Гамильтона и вариационное исчисление	114
1. Дифференциальные уравнения Эйлера в канонической форме (114). — 2. Геодезическое расстояние или эйконал, его производные и дифференциальное уравнение с частными производными Гамильтона-Якоби (116). — 3. Однородные подинтегральные выражения. Геодезические линии (119). — 4. Поля экстремалей и дифференциальное уравнение Гамильтона (121). — 5. Конус лучей. Построение Гюйгенса (Huyghens) (124). — 6. Инвариантный интеграл Гильберта (Hilbert) для представления эйконала (124). — 7. Теорема Гамильтона-Якоби (126).	
§ 10. Канонические преобразования и приложения	127
1. Каноническое преобразование (127). — 2. Новое доказательство теоремы Якоби (128). — 3. Вариация постоянных (каноническая теория возмущений) (129).	

Дополнения к главе II

§ 1. Новое рассмотрение характеристических многообразий . . .	130
1. Предварительные формальные замечания по поводу дифференцирования в пространстве n измерений (130). — 2. Задача Коши и характеристические многообразия (132).	
§ 2. Системы квазилинейных дифференциальных уравнений с одинаковой главной частью. Новый подход к теории характеристик	137
Литература к главам I и II	142

Глава III

Общие сведения о линейных дифференциальных уравнениях высших порядков

§ 1. Нормальные формы линейных дифференциальных выражений второго порядка с двумя независимыми переменными .	143
1. Эллиптические, гиперболические и параболические нормальные формы (143). — 2. Примеры (148).	
§ 2. Нормальные формы квазилинейных дифференциальных уравнений	150
1. Нормальные формы (150). — 2. Пример. Минимальные поверхности (154).	
§ 3. Классификация линейных дифференциальных уравнений второго порядка в случае многих независимых переменных.	156
1. Эллиптические, гиперболические и параболические дифференциальные уравнения (156) — 2. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами (158).	
§ 4. Дифференциальные уравнения высшего порядка и системы дифференциальных уравнений	159
1. Дифференциальные уравнения высшего порядка (160). — 2. Классификация систем дифференциальных уравнений (162). — 3. Замечания о нелинейных задачах (167).	
§ 5. Линейные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами	168
1. Общие соображения (168). — 2. Плоские волны. Отсутствие искажения. Дисперсия (169). — 3. Примеры: телеграфное уравнение, отсутствие искажения у кабелей (174). — 4. Цилиндрические и сферические волны (175).	
§ 6. Задачи с начальными условиями (задачи Коши); проблемы излучения	178
1. Задачи Коши в теории теплопроводности. Преобразование тета-функции (178). — 2. Задачи Коши для волнового уравнения (182). — 3. Метод интеграла Фурье для решения задачи Коши (183). — 4. Решение неоднородного уравнения методом вариаций постоянных. Запаздывающие потенциалы (187). — 5. Задачи Коши для волнового уравнения в двух пространственных измерениях. Метод спуска (189). — 6. Проблема излучения (191). — 7. Процессы распространения и принцип Гюйгенса (192).	
§ 7. Типичные задачи теории дифференциальных уравнений математической физики	194
1. Предварительные замечания. Примеры типичных задач (194). — 2. Принципиальные соображения (199). — 3. Общие замечания о линейных задачах (202).	

Дополнения к главе III

Нестационарные задачи и операторное исчисление Хивисайда.

§ 1. Нестационарные задачи и решение с помощью интегральных выражений	203
1. Пример. Волновое уравнение (203). — 2. Общая постановка задачи (206). — 3. Интеграл Дюамеля (207). — 4. Метод суперпозиции экспоненциальных решений (209).	
§ 2. Операторный метод Хивисайда	211
1. Простейшие операторы (211). — 2. Примеры (214). — 3. Приложения к теории теплопроводности (218). 4. Волновое уравнение (219). — 5. Метод обоснования операторного исчисления. Реализация дальнейших операторов (220).	
§ 3. К общей теории нестационарных задач	226
1. Преобразование Лапласа (226). — 2. Решение нестационарных задач с помощью преобразования Лапласа (229). — 3. Примеры. Уравнение теплопроводности и уравнение кабеля для конечных областей (234).	
Литература к дополнениям к главе III	247

Глава IV

Эллиптические дифференциальные уравнения
и, в частности, теория потенциала

§ 1. Основы	248
1. Дифференциальные уравнения Лапласа, Пуассона и родственные им дифференциальные уравнения (248). — 2. Потенциал распределения массы (252). — 3. Формулы Грина и их применения (256). — 4. Производные потенциала поверхностного распределения массы (263).	
§ 2. Интеграл Пуассона и его следствия	265
1. Краевая задача и функция Грина (265). — 2. Функция Грина для круга и шара. Интеграл Пуассона для шара и полупространства (268). — 3. Следствия из формулы Пуассона (273).	
§ 3. Теорема о среднем значении и ее применения	278
1. Однородное и неоднородное уравнения для среднего значения (278) — 2. Обращение теорем о среднем значении (280). — 3. Уравнение Пуассона для потенциала объемного распределения массы (287). — 4. Теоремы о среднем значении для других эллиптических дифференциальных уравнений (289).	
§ 4. Краевая задача	293
1. Предварительные замечания. Непрерывная зависимость решения от краевых значений и от области (293). — 2. Решение краевой задачи с помощью альтернирующего процесса (296). — 3. Метод интегральных уравнений для областей с достаточно гладкой границей (302). — 4. Дальнейшие замечания по поводу краевой задачи (306).	
§ 5. Краевые задачи для более общих эллиптических дифференциальных уравнений; единственность решений	308
1. Линейные дифференциальные уравнения (308). — 2. Квазилинейные дифференциальные уравнения (310). — 3. Теорема Реллиха о дифференциальном уравнении Монжа-Ампера (311).	

- § 6. Решение эллиптических дифференциальных уравнений методом интегральных уравнений** 314
 1. Построение решений. Основные решения (314). — 2. Краевая задача (318).

Дополнения к главе IV

1. Обобщение краевой задачи. Теоремы Винера (321). — 2. Нелинейные дифференциальные уравнения (323).
Литература к главе IV 327

Глава V

Гиперболические дифференциальные уравнения с двумя независимыми переменными

- § 1. Характеристики квазилинейных дифференциальных уравнений** 329
 1. Определение характеристик (329). — 2. Характеристики на интегральных поверхностях (334). — 3. Характеристики как линии разрыва. Фронт волны (335).
§ 2. Характеристики дифференциальных уравнений общего вида. 338
 1. Общее дифференциальное уравнение второго порядка. (338). — 2. Дифференциальные уравнения высших порядков (341). — 3. Системы дифференциальных уравнений (343). — 4. Инвариантность характеристик относительно любого точечного преобразования (344). — 5. Примеры из гидродинамики (345).
§ 3. Единственность и область зависимости 347
 1. Основные понятия, связанные с волновыми процессами (347). — 2. Доказательства единственности (348).
§ 4. Метод Римана 352
 1. Формула Римана (352). — 2. Дополнительные замечания. Характеристическая задача Коши (356). — 3. Пример. Телеграфное уравнение (358).
§ 5. Решение дифференциального уравнения $u_{xy} = f(x, y, u, u_x, u_y)$ методом итераций Пикара 359
 1. Предварительные замечания (359). — 2. Решение задачи Коши (361). — 3. Единственность решения задачи Коши (363). — 4. Непрерывная и дифференцируемая зависимость от параметров (364). — 5. Область зависимости решения (365).
§ 6. Обобщения и применение к системам первого порядка . . . 366
 1. Системы дифференциальных уравнений второго порядка с одинаковой линейной главной частью (366). — 2. Канонические гиперболические системы первого порядка (367).
§ 7. Общее квазилинейное уравнение второго порядка 368
 1. Полная система характеристических дифференциальных уравнений (368). — 2. Решение задачи Коши (374).
§ 8. Общее уравнение $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ 376
 1. Квазилинейные системы с одинаковой главной частью (376). — 2. Решение задачи Коши в общем случае (377).

Дополнения к главе V

- § 1. Введение комплексных величин. Переход от гиперболического случая к эллиптическому с помощью комплексных переменных** 381

§ 2. Аналитический характер решений в эллиптическом случае	282
1. Предварительное замечание из области теории функций (282). — 2. Аналитический характер решений уравнения $\Delta u = f(x, y, u, p, q)$ (283). — 3. Замечание относительно общего случая дифференциального уравнения $F(x, y, u, p, q, r, s, t) = 0$ (387).	
§ 3. Дальнейшие замечания к теории характеристик в случае двух независимых переменных	387
§ 4. Особая роль уравнения Монжа-Ампера	389

Глава VI

Гиперболические дифференциальные уравнения со многими независимыми переменными

§ 1. Характеристическое уравнение	392
1. КвазILINEЙНЫЕ дифференциальные уравнения второго порядка (393). — 2. LINEЙНЫЕ дифференциальные уравнения. Характеристические лучи (397).	
§ 2. Характеристические многообразия как поверхности разрывов. Фронт волны	403
1. Разрывы второго порядка (403). — 2. Фронт волны линейного дифференциального уравнения как геометрическое место разрывов высших порядков (407). — 3. Поведение дифференциального уравнения на характеристическом многообразии. Распространение разрывов вдоль лучей (410). — 4. Физическая интерпретация. Граница тени (413). — 5. Конус характеристических лучей. Связь с метрикой риманова пространства (413). — 6. Построение фронта волны по способу Гюйгенса. Конус лучей и направление распространения волны (416). — 7. Конус лучей и конус нормалей (417). — 8. Пример. Волновое уравнение Пуассона в трехмерном пространстве (419).	
§ 3. Характеристики дифференциальных уравнений высших порядков	421
1. LINEЙНЫЕ дифференциальные уравнения высших порядков (421). — 2. Системы дифференциальных уравнений. Уравнения гидродинамики (424). 3. Дальнейшие примеры. Кристаллооптика (427).	
§ 4. Теоремы единственности и область зависимости для задач Коши	429
1. Волновое уравнение (429). — 2. Дифференциальное уравнение $u_{tt} - \Delta u + \frac{\lambda}{t} u_t = 0$ (уравнение Дарбу) (432). — 3. Уравнения Максвелла для эфира (433). — 4. Теорема единственности и область зависимости для дифференциальных уравнений кристаллооптики (434). — 5. Замечания об области зависимости и области влияния. Необходимость условия выпуклости области зависимости (436).	
§ 5. Гиперболические линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	437
1. Построение решения (440). — 2. Метод спуска (444). — 3. Исследование решения. Принцип Гюйгенса (446). — 4. Проверка решения (452). — 5. Интегрирование неоднородного уравнения (455). — 6. Проблема излучения (457). — 7. Задача Коши для уравнения $\Delta u + c^2 u = u_{tt}$ и телеграфного уравнения (463).	

6 . Метод средних значений. Волновое уравнение и уравнение Дарбу	465
1. Дифференциальное уравнение Дарбу для средних значений (466).—2. Связь с волновым уравнением и решение волнового уравнения (467).—3. Задача излучения для волнового уравнения (470).—4. Теорема Фридрихса (471).	
§ 7. Ультрагиперболические дифференциальные уравнения и общие линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	473
1. Общая теорема о среднем значении Асджерсона (473).—2. Другое доказательство теоремы о среднем значении (477).—3. Применение теоремы о среднем значении к волновому уравнению (477).—4. Решения характеристической задачи Коши для волнового уравнения (478).—5. Другие применения. Теорема о среднем значении для софокусных эллипсоидов (480).	
§ 8. О негиперболических задачах Коши	482
1. Нахождение функции по ее средним значениям на сфере (482).—2. Применение к задаче Коши (485).	
§ 9. Решение задачи Коши методом Адамара	489
1. Предварительные замечания. Основное решение. Общий метод (490).—2. Общее волновое уравнение для случая, когда число измерений пространства $m = 2$ (497).—3. Общее волновое уравнение для случая $m = 3$ (502).	
§ 10. Некоторые замечания о понятии волны и проблеме излучения	509
1. Общие замечания. Проходящие волны, распространяющиеся без искажений (509).—2. Сферические волны (512). 3. Излучение и принцип Гюйгенса (513).	

Дополнения к главе VI

§ 1. Дифференциальные уравнения кристаллооптики	516
1. Поверхности нормалей и лучей кристаллооптики (516).—2. Форма поверхности нормалей (517).—3. Поверхность лучей (520).—4. Приведение системы дифференциальных уравнений к одному дифференциальному уравнению шестого или четвертого порядка (522).—5. Явный вид решения, получающийся методом Фурье (524).—6. Исследование разрешающего ядра $K(x, t)$ (525).—7. Приложение к оптике. Коническая рефракция (527).	
§ 2. Области зависимости для задач высших порядков	528
§ 3. Обобщенный принцип Гюйгенса и продолжаемые начальные условия	531
§ 4. Замена дифференциальных уравнений интегральными соотношениями. Обобщение понятия характеристик	532

Глава VII

Применение вариационных методов к решению краевых задач и задач о собственных значениях

§ 1. Введение	537
1. Принцип Дирихле для круга (537).—2. Общая постановка задачи (540).—3. Линейные функциональные пространства с квадратичной метрикой. Определения (542).—4. Краевые условия (546).	

§ 2. Первая краевая задача	547
1. Постановка задачи (547).—2. Формула Грина. Основное неравенство между D и H . Единственность (548).—3. Минимизирующие последовательности и решение краевой задачи (550).	
§ 3. Задача о собственных значениях с нулевыми краевыми значениями	552
1. Интегральные неравенства (552).—2. Первая задача о собственных значениях (555).—3. Собственные значения и собственные функции высших порядков. Полнота (556).	
4. Характер приближения к краевым значениям в случае двух независимых переменных	559
§ 5. Построение предельных функций и свойства сходимости интегралов E, D и H	562
1. Построение предельных функций (562).—2. Свойства сходимости интегралов D и H (570).	
§ 6. Краевые условия второго и третьего рода. Краевая задача	573
1. Формула Грина и краевые условия (573).—2. Формулировка краевой задачи и вариационной задачи. Краевая задача III (575).—3. Ограничение класса допустимых областей (576).—4. Эквивалентность вариационной задачи и краевой задачи. Единственность (577).—5. Решение вариационной задачи и краевой задачи (578).	
§ 7. Задача о собственных значениях для краевых условий второго и третьего рода	578
§ 8. Исследование областей, рассматриваемых при краевых условиях второго и третьего рода	581
1. Области типа $\mathfrak{N}$ (581).—2. Необходимость ограничительных условий для рассматриваемых областей (586).	
§ 9. Дополнения к задаче	588
1. Функция Грина для Δu (588).—2. Особенность типа биполя (590).—3. Поведение на границе решения уравнения $\Delta u \neq 0$ с двумя независимыми переменными при краевом условии второго рода (591).—4. Непрерывная зависимость от области (591).—5. Распространение теории на неограниченные области G (592).—6. Применение вариационного метода к дифференциальным уравнениям четвертого порядка. Поперечные деформации и колебания пластинок (593).—7. Первая краевая задача и соответствующая задача о собственных значениях в плоской теории упругости (595).—8. Другой метод построения предельной функции (598).	
§ 10. Задача Плато	600
1. Постановка задачи и общая схема решения (601).—2. Доказательство вариационных условий (604).—3. Существование решения вариационной задачи (606).	
Дополнительная литература	610
Примечания переводчиков	611
Предметный и именной указатели	613

Этот том, в основном независимый от предыдущего, содержит систематическую теорию дифференциальных уравнений с частными производными, рассматриваемую с точки зрения математической физики. В последней, седьмой, главе приводятся на основе прямых методов вариационного исчисления доказательства существования решений для краевых задач и задач о собственных значениях эллиптических дифференциальных уравнений—в том объеме, в каком эти задачи встречались в предшествующем изложении.

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Начнем с предварительного обзора основных понятий и постановки проблем.

Основную задачу теории дифференциальных уравнений с частными производными можно формулировать следующим образом. Дано соотношение

$$F(x, y, \dots; u; u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, \dots) = 0, \quad (1)$$

где F есть функция переменных $x, y, \dots; u; u_x, u_y, \dots; u_{xx}, u_{xy}, \dots$. Требуется определить такую функцию $u(x, y, \dots)$ независимых переменных $x, y, \dots$, чтобы выражение F исчезало тождественно относительно этих переменных, если подставить в него вместо u эту функцию $u(x, y, \dots)$ и далее соответственно:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, & u_y &= \frac{\partial u}{\partial y}, \dots, \\ u_{xx} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & u_{xy} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \dots, \\ &\dots & &\dots \end{aligned}$$

Такая функция $u(x, y, \dots)$ называется *решением*, иногда также «*интегралом*» дифференциального уравнения с частными производными (1). Задача состоит не только в том, чтобы находить отдельные («частные») решения, но и в том, чтобы получить совокупность решений; ставится также задача и о выделении индивидуальных решений с помощью дополнительных условий, присоединяемых к дифференциальному уравнению (1).

Дифференциальное уравнение (1) с частными производными обращается в обыкновенное дифференциальное уравнение, если число независимых переменных равно единице. Порядок наивысшей производной, встречающейся в дифференциальном уравнении, называется *порядком* дифференциального уравнения.

Мы часто будем ограничивать независимые переменные $x, y, \dots$ определенной областью пространства $x, y, \dots$; также и функцию F мы будем рассматривать в ограниченной области пространства $x, y, \dots, u, u_x, u_y, \dots$; это последнее означает, что в положенной в основу области изменения переменных $x, y, \dots$ допускаются лишь такие функции $u(x, y, \dots)$, для которых выполняются соответствующие ограничения, наложенные на аргументы функции F . Мы делаем раз навсегда оговорку, что все наши рассуждения всегда относятся лишь к некоторым областям, которые надо выбирать, применительно к обстоятельствам, достаточно тесными. Точно так же мы раз навсегда предполагаем, что рассматриваемые функции $F, u, \dots$ непрерывны и имеют непрерывные производные всех встречающихся порядков, если только не оговорено определенно что-либо другое¹⁾.

Если функция F линейна относительно величин $u, u_x, u_y, \dots, u_{xx}, u_{xy}, \dots$ с коэффициентами, зависящими только от независимых переменных $x, y, \dots$, то дифференциальное уравнение называется *линейным*. Если выражение F линейно хотя бы относительно производных высшего, скажем, n -го, встречающегося порядка с коэффициентами, которые могут зависеть не только от $x, y, \dots$, но еще и от u и от производных функции u до $(n-1)$ -го порядка, то дифференциальное уравнение называется *квазилинейным*.

Мы будем заниматься большей частью линейными или, самое большее, квазилинейными дифференциальными уравнениями; более общие дифференциальные уравнения мы часто будем приводить к этим типам.

Для многих наших исследований достаточно будет рассматривать лишь случай двух независимых переменных. Тогда можно решение $u(x, y)$ дифференциального уравнения (1) истолковать геометрически как Поверхность, «интегральную поверхность» в пространстве x, y, u .

§ 1. Представление о многообразии решений

1. Примеры. У обыкновенного дифференциального уравнения порядка n совокупность решений (за исключением, быть может «особых» решений) дается функцией независимой переменной x , зависящей, кроме того, еще от n произвольных постоянных; обратно, для всякого семейства функций, зависящего от n параметров

$$u = \varphi(x; c_1, \dots, c_n),$$

¹⁾ Это относится, в частности, и к системе конечных уравнений. В этом случае рассуждения относятся к окрестности такой точки, в которой, например, соответствующий функциональный определитель не исчезает, без того, чтобы это особо подчеркивалось каждый раз.