Ш.Х. Михелович

Теория чисел

2-е издание

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш.Х. Михелович
Ш11 Теория чисел: 2-е издание / Ш.Х. Михелович – М.: Книга по Требованию, 2024. – 336 с.

ISBN 978-5-458-27000-7

Книга "Теория чисел" написана в качестве учебного пособия по курсу теории чисел для физико-математических факультетов педагогических институтов и предназначается не только для студентов стационара, но и заочных факультетов. Поэтому изложение проводится по возможности в доступной форме, причём особое внимание уделяется разъяснению вводимых понятий. Материал книги в основном излагается в объёме, предусмотренном программой, и в той де последовательности. Несколько подробнее рассмотрены "Числовые функции". Это сделано потому, что эта область теории чисел, ярко свидетельствующая о большом вкладе в науку русской и советской математических школ теории чисел, очень богата интересными для учителя вопросами. В остальных материал, выходящий за рамки программы, даётся, как правило, обзорно.

ISBN 978-5-458-27000-7

Глава IV. Степенные вычеты

ПРЕДИСЛОВИЕ

ко второму изданию

А. Из предисловия к первому изданию целесообразно напомнить, что книга написана в качестве учебного пособия по курсу теории чисел для физико-математических факультетов педагогических институтов и предназначается не только для студентов стационара, но и заочных факультетов. Поэтому изложение проводится по возможности в доступной форме, причем особое внимание уделяется разъяснению вводимых понятий.

Материал книги в основном излагается в объеме, предусмотренном программой, и в той же последовательности.

Несколько подробнее рассмотрены «Числовые функции». Это сделано потому, что эта область теории чисел, ярко свидетельствующая о большом вкладе в науку русской и советской математических школ теории чисел, очень богата интересными для учителя вопросами. В остальном материал, выходящий за рамки программы, дается, как правило, обзорно.

Б. Во второе издание книги наряду с довольно многочисленными мелкими исправлениями и уточнениями внесен ряд более значительных изменений и дополнений.

1. Чтобы придать книге бóльшую полноту и расширить возможный круг читателей, в нее включена теория делимости (гл. I).

Добавлены некоторые сведения о сравнениях (гл. II, § 1, п. 2; гл. III, § 6, п. 2), степенных вычетах (гл. IV, § 1, п. 4), цепных дробях (гл. VI, § 2, п. 3 и п. 5Б), функции «целая часть» (гл. III, § 3, п. 2) и работах Л. Г. Шнирельмана (гл. VIII, § 4, п. 3).

Уточнена терминология цепных дробей. Дан краткий обзор цепных дробей общего вида (гл. VI, § 5).

Добавлен новый параграф об иррациональных числах (гл. VII, § 1) в соответствии с новой программой по теории чисел.

2. Переработано изложение некоторых вопросов (о максимальном числе решений сравнения (гл. III, § 6, п. 2), степенных вычетах (гл, IV, § 2), признаках делимости (гл. V, § 1), проблеме Варинга (гл. VIII, § 5, п. 1 Е)) и доказательств.

Отмечены достижения последних лет.

3. Книга дополнена 280 упражнениями, которые отнесены к соответствующим параграфам. Многие из них составлены за-

ново. Подчеркнута геометрическая интерпретация. Ко всем упражнениям даны ответы, а к более трудным также и указания.

Материал, изложенный в тексте книги, от задач не зависит; однако задачи в ряде случаев способствуют расширению кругозора читателя.

При работе над вторым изданием книги были использованы ценные советы и критические замечания доц. А. Н. Хованского.

Важные предложения по улучшению книги внесли рецензенты проф. А. М. Лопшиц, доц. В. И. Нечаев и доц. П. Н. Реморов.

Полезные замечания сделали студенты и преподаватели Даугавпилсского педагогического института, особенно доц. В. А. Юрик.

Всем указанным лицам приношу глубокую благодарность.

ВВЕДЕНИЕ [1]

§ 1. Предмет и основные разделы теории чисел

1. Предмет теории чисел

Теория чисел является наукой о числовых системах с их связями и законами. При этом в первую очередь уделяется внимание числам натурального ряда, которые являются основой для построения других числовых систем: целых, рациональных и иррациональных, действительных и комплексных.

Теория чисел изучает числа с точки зрения их строения и внутренних связей, рассматривает возможности представить одни числа через другие, более простые по своим свойствам, между тем строгое логическое обоснование понятия натурального числа и его обобщений, а также связанная с ним теория действий рассматриваются отдельно в основаниях арифметики.

Поскольку упомянутые вопросы изучаются в школьном курсе (или более подробно, например, на физико-математических факультетах педвузов в курсе элементарной математики), они объединяются под названием арифметики, хотя, как наука, арифметика отождествляется с теорией чисел.

Следует отметить, что в последнее время бурно развиваются новые области математики, требующие глубокого анализа дискретного, т. е. прерывного. В связи с этим возрастает интерес к теории чисел, большинство утверждений которой относятся к дискретной математике.

2. Основные разделы теории чисел

Проблемы и задачи, которые возникли в теории чисел, можно распределить на четыре основные группы:

1) решение диофантовых (или неопределенных) уравнений, т. е. решение в целых числах алгебраических уравнений с целыми коэффициентами или систем таких уравнений, у которых число неизвестных больше числа уравнений;

---

[1] Желательно, чтобы читатель после изучения основных глав еще раз вернулся к введению.

2) диофантовы приближения. В этом направлении теории чисел рассматриваются приближения действительных чисел рациональными числами, решение в целых числах разного рода неравенств $\left(\text{например, неравенства } |\alpha x - y| < \frac{1}{x}\text{, где } \alpha \text{ — иррациональное число}\right)$. К диофантовым приближениям относится также теория трансцендентных чисел (см. гл. VII). В ней занимаются исследованием арифметической природы разных классов иррациональных чисел относительно их принадлежности к трансцендентным числам или к алгебраическим иррациональностям;

3) вопросы распределения простых чисел в натуральном ряду и других числовых последовательностях.

К этой части теории чисел, в частности, относят проблему нахождения n-го простого числа;

4) аддитивные проблемы. Это проблемы касаются разложения целых (обычно больших) чисел на слагаемые определенного вида.

В теории чисел развились различные методы исследования для решения упомянутых задач, которые также берутся за основу для классификации ее направлений.

С точки зрения методов различают 4 главных направления:

а) элементарные методы теории чисел. К элементарным методам относят такие, которые в основном используют сведения из элементарной математики и самое большое — элементы анализа бесконечно малых.

Элементарными считают методы теории сравнений (см. § 1, гл. II), творцом которых является великий немецкий математик К. Ф. Гаусс (1777—1855), методы цепных дробей (см. § 3, гл. III), которые развили великий петербургский математик Л. Эйлер (1707—1783) и французский математик Ж. Лагранж (1736—1813), и многие другие. Следует иметь в виду, что элементарность метода не говорит еще о его простоте.

По созданию важных элементарных методов в теории чисел большие заслуги принадлежат великому русскому математику П. Л. Чебышеву [1] (1821—1894), французским математикам Ж. Лиувиллю (1809—1882) и Ш. Эрмиту (1822—1901), норвежским математикам А. Туэ (1863—1922) и В. Бруну, а также датскому математику А. Сельбергу.

Фундаментальный метод в аддитивной теории чисел создан советским математиком Л. Г. Шнирельманом (1905—1938);

б) аналитическая теория чисел. Аналитическая теория чисел применяет средства математического анализа, теорию функций действительного и комплексного переменного, теорию рядов, теорию вероятностей и другие разделы математики.

Основоположником этого направления является Л. Эйлер. Значительное влияние на развитие этой теории оказали работы Гаусса. В области действительного переменного аналитические методы были развиты немецким математиком Л. Дирихле (1805—

[1] По его собственному указанию, надо произносить: Чебышóв.

1859) и П. Л. Чебышевым. Большую роль в развитии аналитических методов, связанных с теорией функций комплексного переменного, сыграли работы немецкого математика Б. Римана (1826—1866). Очень важными оказались работы немецкого математика Г. Вейля (1885—1955) и русского математика Г. Ф. Вороного (1868—1908).

Больших успехов добились индийский математик С. Рамануджан (1887—1920), английские математики Г. Харди (1877—1947) и Дж. Литлвуд (род. в 1885 г.) и немецкий математик К. Зигель. Наиболее мощные методы созданы советскими математиками — академиком И. М. Виноградовым (род. в 1891 г.), а также чл.-корр. АН СССР А. О. Гельфондом (род. в 1906 г.) и академиком Ю. В. Линником (род. в 1915 г.);

в) алгебраическая теория чисел. Эта теория, исходящая из понятия алгебраического числа, создавалась в работах английского математика Дж. Валлиса (1616—1703), Ж. Лагранжа и Л. Эйлера. Особенно важны работы немецких ученых К. Гаусса, Э. Куммера (1810—1893), Р. Дедекинда (1831—1916), Л. Кронекера (1823—1891) и выдающихся русских ученых Е. И. Золотарева (1847—1878) и Г. Ф. Вороного.

Из современных зарубежных ученых необходимо отметить А. Вейля, Г. Хассе, К. Зигеля. Крупных успехов в этой области добились советские математики Н. Г. Чеботарев (1894—1947), Б. А. Венков (род. в 1900 г.), в особенности И. Р. Шафаревич (род. в 1923 г.);

г) геометрическая теория чисел. В этой теории применяются так называемые «пространственные решетки» или системы целочисленных точек, имеющих в качестве координат в заданной прямоугольной системе координат целые числа. Эта теория используется в геометрии и в кристаллографии, в теории чисел она связана с теорией квадратичных форм (т. е. однородных многочленов второй степени $ax^2 + bxy + cy^2$, где коэффициенты a, b, c — целые числа). При помощи сетки целых точек многим утверждениям теории чисел можно дать весьма наглядное толкование.

Основоположниками этой теории являются Г. Минковский (1864—1909), Г. Ф. Вороной и Ф. Клейн (1849—1925).

Геометрические методы успешно применяются советскими математиками, особенно Б. Н. Делоне (род. в 1890 г.) и Б. А. Венковым.

Отмеченные методы часто переплетаются между собой. Так, например, методы аналитической теории чисел применяются в алгебраической и геометрической теории чисел.

§ 2. Краткие сведения из истории развития теории чисел

1. От Пифагора до Ферма

Важные свойства целых чисел были установлены уже в древности. В Греции, в школе Пифагора (VI в. до н. э.), изучались вопросы делимости чисел, рассматривались различные категории чисел, например простые, составные, совершенные (т. е. числа, сумма собственных делителей которых равна этому же числу, например $6 = 1 + 2 + 3$), квадратные. Было также известно, что взаимно простые целые числа x, y, z, удовлетворяющие уравнению $x^2 + y^2 = z^2$, так называемые *пифагоровы числа*, получаются по формулам:

$$x = 2m \cdot n, \quad y = m^2 - n^2, \quad z = m^2 + n^2,$$

где m и n — целые числа, $m > n > 0$, $(m, n) = 1$[1], $m \cdot n$ — четное (см. п. 5, § 1, гл. VII).

В своих «Началах» Евклид (III в. до н. э.) дает алгоритм (так называемый *алгоритм Евклида*) для определения Н. О. Д. двух чисел, являющийся основой теории делимости, излагает основные свойства делимости целых чисел, доказывает теорему о том, что простые числа образуют бесконечное множество.

Эратосфен (III в. до н. э.), давший способ для выделения простых чисел из ряда натуральных чисел (решето Эратосфена) сделал дальнейший шаг в теории простых чисел.

Эратосфен занимался также *многоугольными числами*[2]. По-

---

1 Знаком (m, n) мы будем обозначать наибольший общий делитель (сокращенно Н.О.Д.) m и n.

2 Числами n-угольными называются числа вида S_1^n, S_2^n, ..., где k — е n-угольное число S_k^n, является суммой k членов арифметической прогрессии с первым членом $a_1 = 1$ и разностью $d = n - 2$. Таким образом, треугольные числа имеют вид

$$S_1^3 = 1, \quad S_2^3 = 1 + 2 = 3,$$

$$S_3^3 = 1 + 2 + 3 = 6, \ldots, S_k^3 = \frac{k(k+1)}{2}.$$

Им соответствуют треугольники, составленные из точек,

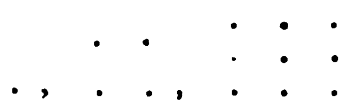
и т. д.

(поэтому и название «треугольные числа»).

Аналогично для 4-угольных чисел имеем разность $d = n - 2 = 2$, так что

$$S_1^4 = 1, \quad S_2^4 = 1 + 3 = 4, \ldots, \quad S_k^4 = 1 + 3 + \ldots + (2k - 1) = k^2.$$

Им соответствуют квадраты, составленные из точек,



и т. д.

Для $n > 2$ геометрическое истолкование несколько усложняется.