Г.Ф. Вороной

Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
Г11

Г.Ф. Вороной
Г11 Об одном обобщении алгорифма непрерывных дробей / Г.Ф. Вороной – М.: Книга по Требованию, 2023. – 221 с.

ISBN 978-5-518-00973-8

ISBN 978-5-518-00973-8

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

Bachmann показалъ, что этотъ вопросъ находится въ тѣсной связи съ вопросомъ о степени приближенія къ числамъ $\frac{\mu}{\lambda}$ и $\frac{\nu}{\lambda}$ дробей $\frac{P'_i}{P_i}$ и $\frac{P''_i}{P_i}$, опредѣляемыхъ при помощи алгориѳма Jacobi. Въ статьѣ: „Zur Theorie von Jacobi's Kettenbruch Algorithmen" (Journal f. d. Mathematik. Bd. 75, S. 25), а также въ книгѣ: „Vorlesungen über die Natur der Irrationalzahlen" (Leipzig, 1892. S. 136—151) Bachmann доказываетъ слѣдующее предложеніе.

Предположимъ, что, начиная съ формы $X + X'\rho + X''\rho^2$, гдѣ $\rho = \sqrt[3]{A}$, составленъ при помощи алгориѳма Jacobi безконечный рядъ формъ, представленныхъ въ нормальномъ видѣ. Для того, чтобы эти формы, начиная съ нѣкоторой, періодически повторялись, необходимо и достаточно, чтобы числа P_i, P'_i и P''_i $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ удовлетворяли неравенствамъ

$$\left|\frac{P'_i}{P_i} - \rho\right| < \frac{k}{P_i\sqrt{P_i}} \quad \text{и} \quad \left|\frac{P''_i}{P_i} - \rho^2\right| < \frac{k}{P_i\sqrt{P_i}},$$

гдѣ k нѣкоторое конечное число.

Въ тѣхъ случаяхъ, когда при помощи алгориѳма Jacobi получается рядъ періодически повторяющихся формъ, произведеніе соотвѣтствующихъ подстановокъ опредѣляетъ подстановку, которая не измѣняетъ нѣкоторой формы

$$X + X'\varphi + X''\psi,$$

т. е. эту форму преобразуетъ въ форму

$$XE + X'E\varphi + X''E\psi.$$

Если такую подстановку обозначить

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \alpha' & \beta' & \gamma' \\ \alpha'' & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1,$$

то число E, опредѣляемое равенствомъ

$$E = \alpha + \alpha'\varphi + \alpha''\psi,$$

есть алгебраическая единица, зависящая отъ корня того же уравненія, отъ корня котораго зависятъ числа φ и ψ.

Подстановка, не измѣняющая формы и не тождественная, весьма часто бываетъ очевидна, когда составлено нѣсколько формъ при помощи алгориѳма Jacobi, а между тѣмъ вычисленія по способу Jacobi нужно продолжать еще долго и даже часто остается неизвѣстнымъ, будутъ ли формы повторяться періодически или нѣтъ.

Jahresbericht über das Königliche Realgymnasium zu Wiesbaden. 1874. S. 22) приведено много примѣровъ, подтверждающихъ періодичность алгориѳма Jacobi.

Одно изъ обобщеній алгориѳма непрерывныхъ дробей, представляющее только нѣкоторое измѣненіе алгориѳма Euler'а, принадлежитъ Poincaré. Въ замѣткѣ: „Sur une généralisation des fractions continues" (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, T. 99. p. 1014) Poincaré предлагаетъ слѣдующій алгориѳмъ для преобразованія формы $X\lambda + X'\mu + X''\nu$.

Форма должна быть представлена въ такомъ видѣ, чтобы существовали неравенства

$$0 < \lambda \leqq \mu \leqq \nu.$$

Затѣмъ форма $X\lambda + X'\mu + X''\nu$ преобразуется подстановкой

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Полученная форма снова приводится къ виду $X\lambda_1 + X'\mu_1 + X''\nu_1$, гдѣ

$$0 < \lambda_1 \leqq \mu_1 \leqq \nu_1 \text{ и т. д.}$$

Poincaré даетъ геометрическое объясненіе, какъ алгориѳму непрерывныхъ дробей, такъ и предлагаемому имъ обобщенію.

Еще одна попытка обобщенія непрерывныхъ дробей въ этомъ направленіи принадлежитъ Hurwitz'у. Въ статьѣ: „Ueber die angenäherte Darstellung der Zahlen durch rationale Brüche" (Mathematische Annalen, Bd. 44, S. 417) Hurwitz разсматриваетъ особые ряды раціональныхъ дробей, называемые рядами Farey *), и дѣлаетъ попытку обобщить свойства этихъ рядовъ для полученія раціональныхъ дробей $\frac{u}{w}$ и $\frac{v}{w}$, приближающихся къ двумъ даннымъ числамъ, но не даетъ алгориѳма для полученія такихъ дробей **).

Алгориѳмы Euler'а, Jacobi и Poincaré представляютъ лишь формальныя обобщенія алгориѳма непрерывныхъ дробей и оказываются непригодными для рѣшенія тѣхъ основныхъ вопросовъ теоріи алгебраическихъ чиселъ кубической области, которые для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области рѣшаются при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

---

*) Литературныя указанія относительно рядовъ Farey приведены въ этой статьѣ Hurwitz'а. См. также: J. Hermes „Anzahl der Zerlegungen einer ganzen rationalen Zahl in Summanden" (Mathematische Annalen, Bd. 45, S. 371) и K. Th. Vahlen: „Ueber Näherungswerthe und Kettenbrüche" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 115, S. 221). Въ статьѣ: „Ueber die Reduction der binären quadratischen Formen" (Mathematische Annalen, Bd. 45, S. 85) Hurwitz прилагаетъ ряды Farey къ приведенію бинарныхъ квадратичныхъ формъ, какъ опредѣленныхъ, такъ и неопредѣленныхъ.

**) F. Klein въ замѣткѣ: „Ueber die geometrische Auffassung der gewöhnlichen Kettenbruchentwicklung" (Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathem. Klasse, 1895, S. 357) въ общихъ чертахъ дѣлаетъ указанія на возможность обобщенія непрерывныхъ дробей при помощи геометрическихъ соображеній. Указанія эти столь общаго характера, что мы затрудняемся вывести изъ нихъ какія нибудь опредѣленныя заключенія.

Lejeune Dirichlet въ замѣчательной статьѣ: „Verallgemeinerung eines Satzes aus der Lehre von den Kettenbrüchen nebst einigen Anwendungen auf die Theorie der Zahlen" (Dirichlet's Werke, Bd. I, Berlin, 1889, S. 633) предложилъ первое обобщеніе непрерывныхъ дробей, которое для общей теоріи алгебраическихъ чиселъ имѣетъ такое же значеніе, какое имѣютъ непрерывныя дроби для алгебраическихъ чиселъ квадратичной области.

Kronecker въ статьяхъ: „Sur les unités complexes" (Comptes rendus des séances de l'Académie de Paris, T. 96, p. 93, 148 et 216) и „Additions au mémoire sur les unités complexes" (C. R. T. 99. p. 766) дополнилъ и обобщилъ результаты, полученные Dirichlet*).

Ограничиваясь тремя перемѣнными X, X' и X'', результаты, полученные Dirichlet, можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

I) *Если система* $(1, \varphi, \psi)$ *неприводимая, то можно найти безчисленное множество системъ цѣлыхъ раціональныхъ значеній перемѣнныхъ* X, X' *и* X'', *удовлетворяющихъ неравенству*

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < \frac{1}{s^2}, \tag{1}$$

гдѣ s *наибольшее изъ чиселъ* $|t'|$ *и* $|t''|$.

II) *Если равенства* $X+X'\varphi+X''\psi=0$ *и* $X+X'\varphi'+X''\psi'=0$ *не возможны одновременно ни при какихъ цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ* X, X' *и* X'', *то можно найти безчисленное множество системъ цѣлыхъ раціональныхъ значеній перемѣнныхъ* X, X' *и* X'', *удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ*

$$|t+t'\varphi+t''\psi| < \frac{A}{\sqrt{s}} \quad \text{и} \quad |t+t'\varphi'+t''\psi'| < \frac{B}{\sqrt{s}}, \tag{2}$$

гдѣ s *наибольшее изъ чиселъ* $|t'|$ *и* $|t''|$; A *и* B *нѣкоторыя конечныя числа.*

Съ увеличеніемъ числа системъ значеній X, X' и X'' число дѣйствій для ихъ опредѣленія на основаніи принципа Dirichlet безпредѣльно увеличивается, и потому въ практическомъ отношеніи этотъ способъ оказывается неудобнымъ.

Системы чиселъ X, X' и X'', удовлетворяющихъ, какъ неравенству (1), такъ и неравенствамъ (2), можно находить также на основаніи принципа Hermite'a.

Въ письмахъ къ Jacobi**) Hermite разсматриваетъ положительныя квадратичныя формы вида

---

*) См. также: L. Kronecker „Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen" (Sitzungsberichte der Academie der Wissenschaften zu Berlin, 1884, S. 1179).

**) См. „Extraits de lettres de M. Ch. Hermite à M. Jacobi sur différents objets de la théorie des nombres" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 40, S. 261). См. также статью Hermite'a: „Sur l'introduction des variables continues dans la théorie des nombres" (Journal f. d. Mathematik Bd. 41, S. 191).

$$(X+X'\varphi+X''\psi)^2+\frac{1}{\Delta}(X'^2+X''^2) \text{ и } (X+X'\varphi+X''\psi)^2+(X+X'\varphi'+X''\psi')^2+\frac{1}{\Delta}X''^2$$

съ перемѣннымъ параметромъ Δ. Если опредѣлять послѣдовательно для различныхъ значеній параметра Δ системы значеній перемѣнныхъ, которымъ соотвѣтствуютъ minima этихъ квадратичныхъ формъ, то получаемыя такимъ образомъ системы значеній X, X' и X'' будутъ удовлетворять соотвѣтственно неравенству (1) и неравенствамъ (2).

Совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ получаются послѣдовательные minima квадратичныхъ формъ съ перемѣннымъ параметромъ, составляетъ алгориомъ Hermite'а.

Какъ принципъ Dirichlet, такъ и принципъ Hermite'а имѣютъ каждый свое самостоятельное значеніе и прилагаются къ различнымъ вопросамъ теоріи чиселъ *).

Прекрасное изложеніе примѣненій принципа Dirichlet къ общей теоріи алгебраическихъ чиселъ можно найти къ книгѣ: „Vorlesungen über Zahlentheorie von Lejeune Dirichlet" (Supplement XI, § 181 и 183. Vierte Auflage, Braunschweig, 1894).

Е. Золотаревъ въ сочиненіи: „Объ одномъ неопредѣленномъ уравненіи третьей степени" (С. Петербургъ, 1869 г.) примѣнилъ принципъ Hermite'а къ разысканію алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія $\rho^3=A$ **).

Для разысканія алгебраическихъ единицъ на основаніи принципа Hermite'а весьма важно имѣть способъ, который давалъ бы *всѣ* послѣдовательные minima формы при непрерывномъ измѣненіи параметра, способъ же, предложенный Золотаревымъ для полученія послѣдовательныхъ minima формъ, нуждается въ дополненіи (впрочемъ нисколько не измѣняющемъ сущности этого способа) для того, чтобы при помощи видоизмѣненнаго способа получались всѣ послѣдовательные minima формъ.

Charve въ сочиненіи: De la réduction des formes quadratiques ternaires positives et de leur application aux irrationnelles du troisième degré" (Suppl. au T. IX. des Annales Scient. de l'École Normale Supérieure, 1880) примѣнилъ принципъ Hermite'а къ вычисленію алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени, какъ съ отрицательнымъ, такъ и съ положительнымъ дискриминантомъ. Для этой цѣли Charve воспользо-

---

*) См. напримѣръ, статьи: H. Minkowski „Ueber die positiven quadratischen Formen und über kettenbruchähnlichen Algorithmen" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 107, S. 278) и „Théorèmes arithmétiques" (C. R. T. 112. p. 209).

**) См. также: Е. Золотаревъ „Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ съ приложеніемъ къ интегральному исчисленію" (С.-Петербургъ, 1874, § 29).

вался способомъ приведенія положительныхъ тройничныхъ квадратичныхъ формъ, предложеннымъ Selling'омъ *).

Для опредѣленія алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ, Charve разсматриваетъ формы съ однимъ перемѣннымъ параметромъ. Опредѣляя для каждаго значенія параметра приведенную квадратичную форму эквивалентную данной, Charve получаетъ безконечный рядъ приведенныхъ формъ и доказываетъ, что подстановки, при помощи которыхъ получаются всѣ эти приведенныя формы, повторяются періодически. При помощи этихъ подстановокъ Charve находитъ подстановку, опредѣляющую основную алгебраическую единицу.

Недостатокъ способа Charve'а состоитъ въ томъ, что онъ вычисляетъ приведенныя формы не для того, чтобы получить послѣдовательные minima данной формы (какъ это дѣлаетъ Золотаревъ), а для того, чтобы получить полную систему приведенныхъ формъ, изъ которыхъ получаются всѣ остальныя приведенныя формы при помощи періодически повторяющихся подстановокъ. Между тѣмъ значеніе принципа Hermite'а заключается въ томъ, что каждой алгебраической единицѣ соотвѣтствуетъ при нѣкоторомъ значеніи параметра minimum разсматриваемой Charve'омъ квадратичной формы. Упуская изъ виду главную цѣль полученія приведенныхъ формъ, Charve безъ нужды усложняетъ вычисленія, и вслѣдствіе этого очень часто оказывается, что среди вычисленныхъ приведенныхъ формъ находится форма, minimum которой опредѣляетъ основную алгебраическую единицу, а между тѣмъ по способу Charve'а вычисленія нужно продолжать еще дальше, пока не получится полная система приведенныхъ формъ, изъ которой выводятся всѣ остальныя формы при помощи періодически повторяющихся подстановокъ.

Существенный недостатокъ принципа Hermite'а въ практическомъ отношеніи заключается въ томъ, что съ измѣненіемъ параметра одни коэффиціенты формъ быстро увеличиваются, другіе уменьшаются, такъ что оказывается необходимымъ или замѣнять полученныя формы новыми, вычисленными съ бóльшею точностью (какъ это дѣлаетъ Charve), или же преобразовывать формы, умножая ихъ коэффиціенты на нѣкоторыя алгебраическія числа. Послѣ такого преобразованія всѣ коэффиціенты формы приходится вычислять снова, что весьма затрудняетъ ходъ вычисленій.

Для опредѣленія алгебраическихъ единицъ, зависящихъ отъ корня уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, Charve разсматриваетъ формы съ двумя перемѣнными параметрами, но вопроса о разысканіи основной си-

*) См. Selling: „Ueber die binären und ternären quadratischen Formen" (Journal f. d. Mathematik, Bd. 77, S. 143)

стемы единицъ касается лишь поверхностно и, по нашему мнѣнію, не даетъ способа для его рѣшенія.

Полагая въ основаніе нашихъ изслѣдованій особенную точку зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей, мы предлагаемъ новое его обобщеніе.

Къ новой точкѣ зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей приходимъ, разсматривая въ отдѣлѣ I настоящаго сочиненія значенія коваріантныхъ формъ

$$\omega = X\lambda + X'\mu \quad \text{и} \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' \tag{3}$$

при цѣлыхъ раціональныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X'. Предполагая, что системы (λ, μ) и (λ', μ') неприводимыя, мы изъ системъ (ω, ω') значеній коваріантныхъ формъ (3) при всевозможныхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' не равныхъ нулю одновременно выдѣляемъ системы, представляющія относительные minima этихъ формъ, при помощи слѣдующаго опредѣленія *).

Если при нѣкоторыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ X и X' коваріантныя формы (3) *получаютъ такія значенія ω_0 и ω'_0, что нельзя найти цѣлыхъ раціональныхъ чиселъ t и t', удовлетворяющихъ одновременно неравенствамъ*

$$|t\lambda + t'\mu| < |\omega_0| \quad и \quad |t\lambda' + t'\mu'| < |\omega'_0|,$$

то числа ω_0 и ω'_0 мы называемъ относительными minima'ми коваріантныхъ формъ (3) *или, символически, системы формъ*

$$\begin{bmatrix} \lambda, & \mu \\ \lambda', & \mu' \end{bmatrix}.$$

Системы (ω, ω') и $(-\omega, -\omega')$ не считаемъ различными, разсматриваемъ же совокупность (S) всѣхъ системъ, представляющихъ относительные minima и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$.

Всѣ системы совокупности (S) мы располагаемъ въ безконечный рядъ

$$\ldots(\omega_{-1}, \omega'_{-1}), \quad (\omega_0, \omega'_0), \quad (\omega_1, \omega'_1), \ldots \tag{I}$$

удовлетворяющій условіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} \cdots > \omega_{-1} > \omega_0 > \omega_1 > \cdots \\ \cdots < |\omega'_{-1}| < |\omega'_0| < |\omega'_1| < \cdots \end{array}\right\}.$$

Систему $(\omega_{k+1}, \omega'_{k+1})$, слѣдующую въ этомъ ряду за системой (ω_k, ω'_k), мы называемъ 1-й системой смежной съ (ω_k, ω'_k), а систему $(\omega_{k-1}, \omega'_{k-1})$—2-й системой смежной съ (ω_k, ω'_k).

Оказывается, что всѣ системы ряда (I) могутъ быть получены изъ каждыхъ двухъ смежныхъ системъ ряда (I) при помощи алгориѳма непрерывныхъ дробей.

*) Ср. Е. Золотаревъ: „Объ одномъ неопредѣленномъ уравненіи и т. д." (стр. 66).

Это замѣчательное свойство системъ ряда (I) даетъ возможность установить новую точку зрѣнія на алгориѳмъ непрерывныхъ дробей.

Алгориѳмъ непрерывныхъ дробей составляетъ совокупность дѣйствій, при помощи которыхъ по даннымъ двумъ смежнымъ системамъ ряда (I) *опредѣляются: какъ система, слѣдующая въ этомъ ряду за данными системами, такъ и имъ предшествующая* *).

Такимъ образомъ открывается путь къ обобщенію алгориѳма непрерывныхъ дробей.

Способъ для полученія системъ значеній коваріантныхъ формъ (3) смежныхъ съ данной системой, принадлежащей къ совокупности (S), вытекаетъ изъ слѣдующей основной теоремы отдѣла I.

Если системы (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные тіпіта коваріантныхъ формъ* (3) *при значеніяхъ перемѣнныхъ*

$$X = p_0,\ X' = p'_0 \quad и \quad X = p_1,\ X' = p'_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ системой* (ω_0, ω'_0), *то опредѣлитель*

$$\begin{vmatrix} p_0 & p'_1 \\ p'_0 & p'_1 \end{vmatrix}$$

по численной величинѣ равенъ единицѣ.

Эта теорема даетъ возможность вычислять послѣдовательно всѣ системы ряда (I), когда извѣстны двѣ какія нибудь смежныя системы этого ряда.

Для полученія двухъ какихъ нибудь смежныхъ системъ ряда (I) мы пользуемся свойствами приведенныхъ системъ коваріантныхъ формъ.

Систему коваріантныхъ формъ (3) *мы называемъ приведенной системой 1-го рода, если* (λ, λ') *и* (μ, μ') *принадлежатъ къ совокупности* (S) *и при томъ* (μ, μ') *есть 1-я система смежная съ* (λ, λ'); *если* (μ, μ') *есть 2-я система смежная съ* (λ, λ'), *то систему формъ* (3) *называемъ приведенной системой 2-го рода.*

Коэффиціенты системы коваріантныхъ формъ, представленной въ нормальномъ видѣ

$$\begin{bmatrix} 1, & \varphi \\ 1, & \varphi' \end{bmatrix},$$

удовлетворяютъ условіямъ

$$0 < \varphi < 1 \quad и \quad \varphi' < -1, \tag{4}$$

---

*) Эти свойства системъ ряда (I) представляютъ обобщеніе свойствъ послѣдовательныхъ minima линейной формы $X + X'\varphi$ при цѣлыхъ значеніяхъ перемѣнныхъ, на которыя первый обратилъ вниманіе Lagrange. См. „Additions aux éléments d'Algèbre d'Euler" (Oeuvres de Lagrange publiées par Serret, T. VII, p. 45).

когда эта система приведенная 1-го рода, и условіямъ

$$\varphi > 1 \quad \text{и} \quad 0 > \varphi' > -1, \tag{5}$$

когда эта система приведенная 2-го рода.

Мы пришли такимъ образомъ къ неравенствамъ, которымъ удовлетворяютъ корни $\rho = -\varphi$ и $\rho' = -\varphi'$ уравненія

$$a\rho^2 + 2b\rho + c = 0, \tag{6}$$

когда неопредѣленная квадратичная форма

$$aX^2+2bXX'+cX'^2 = a(X+X'\varphi)(X+X'\varphi')$$

удовлетворяетъ условіямъ приведенія Gauss'а *). Корни уравненія (6) удовлетворяютъ неравенствамъ (5), если $b > 0$, и неравенствамъ (4), если $b < 0$.

Въ отдѣлѣ II мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda+X'\mu+X''\nu \quad \text{и} \quad \omega' = X(l'+l''i)+X'(m'+m''i)+X''(n'+n''i) \tag{7}$$

и на эти системы формъ распространяемъ всѣ опредѣленія, предложенныя нами въ отдѣлѣ I.

Такъ же, какъ и въ отдѣлѣ I, мы разсматриваемъ совокупность (S) всѣхъ системъ (ω, ω'), представляющихъ относительные minima коваріантныхъ формъ (7) и удовлетворяющихъ условію $\omega > 0$. Всѣ эти системы мы располагаемъ въ рядъ

$$\ldots (\omega_{-1}, \omega'_{-1}), \ (\omega_0, \omega'_0), \ (\omega_1, \omega'_1) \ldots \tag{I}$$

послѣдовательныхъ относительныхъ minima коваріантныхъ формъ (7).

Для полученія системъ этого ряда смежныхъ съ данной системой мы пользуемся слѣдующей основной теоремой отдѣла II.

Если системы (ω_0, ω'_0) *и* (ω_1, ω'_1) *представляютъ относительные minima коваріантныхъ формъ* (7) *при значеніяхъ перемѣнныхъ*

$$X = p_0,\ X' = p'_0,\ X'' = p''_0 \quad \text{и} \quad X = p_1,\ X' = p'_1,\ X'' = p''_1$$

и система (ω_1, ω'_1) *есть первая система смежная съ* (ω_0, ω'_0), *то числа*

$$p'_0p''_1 - p''_0p'_1, \quad p''_0p_1 - p_0p''_1 \quad \text{и} \quad p_0p'_1 - p'_0p_1$$

не имѣютъ общаго дѣлителя.

Вопросъ о разысканіи системъ смежныхъ съ данной сводится, на основаніи этой теоремы, къ преобразованію системы коваріантныхъ формъ при помощи подстановокъ вида

*) См. Gauss: „Disquisitiones arithmeticae" (§ 183) и Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie" (§ 74, vierte Auflage).

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1 \quad \text{и} \quad \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

Предлагаемый нами алгориѳмъ для опредѣленія коэффиціентовъ подстановки

$$\begin{vmatrix} 1 & \beta & \gamma \\ 0 & \beta' & \gamma' \\ 0 & \beta'' & \gamma'' \end{vmatrix} = \pm 1$$

состоитъ въ сущности изъ двухъ алгориѳмовъ; первымъ опредѣляется: 1-я система смежная съ данной; вторымъ — 2-я система смежная съ данной.

Оба эти алгориѳма формулированы въ §§ 28 и 33.

Въ отдѣлѣ II мы выводимъ условія необходимыя и достаточныя для того, чтобы системы коваріантныхъ формъ были эквивалентны, и примѣняемъ полученные результаты къ системамъ формъ, зависящимъ отъ корней уравненія 3-й степени съ отрицательнымъ дискриминантомъ. Мы доказываемъ, что при преобразованіи такихъ системъ съ помощью предложенныхъ нами алгориѳмовъ всегда получается рядъ періодически повторяющихся приведенныхъ системъ.

Въ этомъ же отдѣлѣ мы даемъ способъ для полученія основной алгебраической единицы и способъ для опредѣленія числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ разсматриваемой кубической области.

Въ отдѣлѣ III мы разсматриваемъ коваріантныя формы

$$\omega = X\lambda + X'\mu + X''\nu, \quad \omega' = X\lambda' + X'\mu' + X''\nu' \quad \text{и} \quad \omega'' = X\lambda'' + X'\mu'' + X''\nu''.$$

Понятіе объ относительныхъ minima'хъ этихъ формъ, совокупности (S) системъ, представляющихъ относительные minima, о смежныхъ системахъ этой совокупности и т. д. мы устанавливаемъ, обобщая опредѣленія, предложенныя въ отдѣлахъ I и II.

Преобразуя при помощи даннаго нами въ отдѣлѣ III. алгориѳма (§ 52) систему коваріантныхъ формъ, коэффиціенты которой зависятъ отъ корней уравненія 3-й степени съ положительнымъ дискриминантомъ, мы доказываемъ, что такимъ образомъ всегда получается рядъ періодически повторяющихся приведенныхъ системъ. Изъ разсмотрѣнія двухъ рядовъ приведенныхъ системъ мы выводимъ способъ для полученія основной системы алгебраическихъ единицъ и для опредѣленія числа классовъ не эквивалентныхъ идеаловъ разсматриваемой области.

Извѣстно, что при разысканіи основной системы единицъ этой кубической области по способу Dirichlet приходится находить minimum нѣкотораго опредѣлителя, составленнаго изъ логариѳмовъ модулей двухъ какихъ нибудь независимыхъ единицъ *).

---

*) См. Lejeune Dirichlet: „Zahlentheorie“ (§ 183, S. 601. Vierte Auflage).

Предлагаемый нами способъ полученія основной системы единицъ, по нашему мнѣнію, представляетъ интересъ, помимо практическаго удобства, еще въ томъ отношенія, что для полученія основной системы единицъ по этому способу оказывается ненужнымъ разысканіе наименьшаго значенія опредѣлителя Dirichlet.

Настоящее сочиненіе было совершенно закончено и начато печатаніемъ, когда въ Варшавѣ былъ полученъ № 2 13-го тома журнала: Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure.

Въ этомъ номерѣ помѣщена статья: H. Minkowski „Généralisation de la théorie des fractions continues" (p. 41).

Minkowski разсматриваетъ въ этой статьѣ главнымъ образомъ коваріантныя формы, которыя мы разсматриваемъ въ отдѣлѣ III. Свои изслѣдованія Minkowski облекаетъ въ геометрическую форму, при чемъ основной задачей ставитъ опредѣленіе параллелепипедовъ особаго рода, которые онъ называетъ „parallelépipèdes extrêmes".

Не трудно убѣдиться въ томъ, что совокупность такихъ параллелепипедовъ опредѣляетъ совокупность системъ относительныхъ minima, которую мы называемъ совокупностью (S). Если положить въ основаніе понятіе о смежныхъ системахъ, установленное нами въ отдѣлѣ III, но прибавить условіе, что системы смежны взаимно, то окажется, что Minkowski даетъ способъ для полученія различныхъ системъ смежныхъ съ данной. Алгориѳмъ, который предлагаетъ Minkowski, существенно отличается отъ алгориѳма, предлагаемаго нами, такъ какъ Minkowski опредѣляетъ тѣ системы, которыя мы не считаемъ смежными съ данной.

Въ заключеніе замѣтимъ, что всѣ почти предложенія Minkowski въ своей статьѣ даетъ безъ доказательствъ.

Г. Вороной.

Варшава, 24-го Мая 1896 года.