

Н. И. Мусхелишвили

**Некоторые основные задачи математической
теории упругости**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Н11

Н11 **Н. И. Мусхелишвили**
Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н. И. Мусхелишвили – М.: Книга по Требованию, 2014. – 708 с.

ISBN 978-5-458-50603-8

Некоторые основные задачи математической теории упругости. Основные уравнения. Плоская теория упругости. Кручение и изгиб.

ISBN 978-5-458-50603-8

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2014
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2014

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

считаю нужным обратить внимание читателя на новое изложение отделов I—III главы пятой (отдел IV — новый). В этих отделах не содержится принципиально новых по сравнению с предыдущим изданием результатов, однако способ их получения заменен иным, более отвечающим, как мне кажется, сущности дела. Отмечу, впрочем, что новый способ (на который оказали влияние работы И. Племеля по теории функций комплексного переменного, опубликованные задолго до выхода в свет первых изданий моей книги, но, к сожалению, не знакомые мне тогда) приводит к тем же самым приемам вычисления, что и применявшиеся мною раньше. Вследствие этого, а также вследствие меньшей, пожалуй, элементарности нового способа изложения, я не совсем уверен, что поступил хорошо, произведя упомянутую замену. Как бы то ни было, сопоставление нового и старого подходов может принести известную пользу.

Добавлю в заключение, что тщательно, по мере возможности, называя авторов тех или иных изложенных мною чужих результатов, я делаю то же самое по отношению к некоторым своим результатам, иногда даже второстепенным, приводимым в качестве примеров. Последнее я делаю не потому, что придаю этим результатам преувеличенное значение, а лишь во избежание недоумения, могущего возникнуть у читателя, не знакомого с предыдущими изданиями моей книги и встретившего заимствованные из нее места без четкого указания источника в некоторых других публикациях (главным образом зарубежных).

Для упрощения ссылок цитируемые произведения перечислены отдельным списком в конце книги, в алфавитном порядке. При ссылках называется автор и номер его произведения по этому списку, заключенный в квадратные скобки.

Первому изданию этой книги было предпослано не мало способствовавшее ее успеху предисловие покойного академика Алексея Николаевича Крылова, крупнейшие научные и общественные заслуги которого хорошо всем известны и к которому я всегда буду питать чувства глубокой благодарности и уважения.

Предисловие А. Н. Крылова воспроизводится ниже без всяких изменений. Я не смог и в этом издании выполнить пожелания, высказанного А. Н. Крыловым в конце его предисловия, относительно развития методов численного решения, не потому, конечно, что недооцениваю его справедливости, а просто потому, что, к большому моему сожалению, я не умею это сделать достаточно хорошо. Зато пожелание А. Н. Крылова с успехом выполнено другими авторами, о чем даны указания в тексте книги.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси,
ноябрь 1948 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Книга эта воспроизводит в значительно переработанном и дополненном виде содержание цикла лекций, прочитанных мною весной 1931 г. по приглашению Сейсмологического института Академии Наук СССР для научных сотрудников Института, а также лекций, прочитанных в 1932 г. для аспирантов Физико-математического института Академии Наук и Института математики и механики при Ленинградском университете. Лекции предназначались для лиц, в большинстве уже знакомых

с основами теории упругости, и должны были быть посвящены отдельным основным вопросам, выбор которых в значительной мере предоставлялся мне; я, естественно, остановился на вопросах, в области которых работал лично.

Таким образом, в этой книге излагаются только немногие главы теории упругости, но каждая из них представляет собой довольно законченное целое. Не останавливаясь здесь на содержании книги, представление о котором можно получить по оглавлению, считаю необходимым отметить только следующее.

Ввиду того, что затронутые в книге вопросы могут, как я надеюсь, представить некоторый интерес для более широкого круга лиц, в частности для лиц, работающих в области технических приложений теории упругости, я старался сделать изложение по возможности доступным и для читателей, знакомых только с основами дифференциального и интегрального исчисления и с элементами теории функций комплексного переменного. Так, например, вопросы, где применяются интегральные уравнения, выделены в отдельные параграфы, которые можно пропустить при чтении без ущерба для понимания остального; глава I, в которой изложены основы математической теории упругости в объеме, достаточном для понимания дальнейшего (и даже несколько большем), предназначена для читателей, не специалистов по теории упругости. С целью сделать изложение более доступным, я отказался от применения тензорного исчисления, которым пользовался в своих лекциях в Сейсмологическом институте; элементарные сведения о тензорах даны в Добавлении I. Добавления II и III посвящены некоторым элементарным вопросам математики, необходимым для понимания изложенного в книге и обычно недостаточно освещенным в элементарных курсах анализа.

Н. Мусхелишвили

Ленинград,
весна 1933 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ АКАДЕМИКА А. Н. КРЫЛОВА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ¹⁾

Упругость есть основное свойство всех тел природы. Это свойство приходится приписывать даже тому воображаемому эфиру, самое существование которого то признается, то отрицается физикой и вместе с тем столь широко используется практикой.

Так и упругость тел, можно сказать, инстинктивно использовалась со времен доисторических для всех построек, начиная от хижин дикарей до Колизея, величественных дворцов и храмов, для всех орудий и инструментов обыденной жизни, для всякого рода оружия. Как первобытный человек каменного века или современный папуас, изготавливая лук для своих стрел с кремневым или костяным наконечником, пользуется упругостью материала, так Виккерс и Армстронг пользуются тем же свойством при изготовлении 150-тонных 16-дюймовых пушек для броненосцев «Нельсон» и «Родней» или для укреплений Дувра. Разница лишь в том, что папуас делает свой лук на основаниях, выработанных бесчисленными поколениями как бы естественным подбором, а Виккерс и Армстронг — свою пушку на основании точного математического расчета, разработанного нашим академиком Гадолиным всего лет шестьдесят назад.

Таким образом, если практическое использование человеком свойства упругости тел продолжается неисчислимые века и тысячелетия, то первая попытка научного его обоснования насчитывает всего 295 лет и дана Галилеем, изложившим ее в своих знаменитых «Беседах», изданных в 1638 г.

Через сорок лет англичанин Гук дал разгадку своей анаграммы: *ceiĩnossttuv* — *ut tensio sic vis* («яко растяжение, тако сила»), заключающей основной закон, которому свойство упругости материалов подчинено.

Проходит еще 60 лет, и в Записках Петербургской Академии Наук появляются труды Даниила Бернулли и Эйлера, где даны те уравнения, которыми и по сей час пользуются при большей части практических расчетов.

Проходит еще 80 лет, пока французский инженер Навье ставит совершенно по-новому задачу об изучении упругости тел, дает общую ее теорию и составляет общие дифференциальные уравнения равновесия и движения их. Эта теория развивается далее знаменитыми математиками Коши и Пуассоном, но они сперва прилагают ее к изучению распространения колебаний в упругой среде, т. е. звука, ибо в то время они еще

¹⁾ Предисловие академика А. Н. Крылова перепечатано без изменений из первого издания. Так как А. Н. Крылов разбирает содержание книги по главам, следует отметить, что глава III первого издания, значительно дополненная, составляет предмет главы V настоящего, а глава IV первого издания соответствует главе VII настоящего.

не признавали волновой теории света; в своем же курсе механики, изданном для Политехнической школы, Пуассон развивает теорию Бернулли и Эйлера.

В это же время в Институте инженеров путей сообщения, за несколько лет перед тем в Петербурге основанном, состояли профессорами, в чине подполковников русской службы, французские инженеры Ламе и Клапейрон, которые начали развивать теорию Навье в смысле приложений ее к строительному делу, но вскоре после своего воцарения Николай I исключил их из русской службы и выслал на родину.

Здесь в 1852 г. Ламе и издал первое руководство по теории упругости под заглавием «*Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides*», ставшее классическим и не утратившее своего значения и поныне.

С развитием постройки железных дорог, металлических для них мостов, громадных зданий, с развитием машиностроения и железного судостроения, с учреждением лабораторий как для научного исследования упругих свойств материалов, так и для проверки обусловленных контрактами их качеств, пошло быстрое развитие учения об упругих свойствах материалов и надлежащем их использовании для строительной практики.

Развитие это пошло по двум направлениям: с одной стороны, разрабатывалась математическая теория упругости в том виде, как ее создал Навье и впервые изложил Ламе; с другой стороны, развивалась упрощенная теория, получившая название «Учение о сопротивлении материалов», исходя из тех методов, основы которых были положены Бернулли и Эйлером.

Замечательно, что первое практическое приложение формулы и выводы Ламе получили, по почину Гадолина, в проектировании стальных орудий, скрепленных кольцами, которые начал изготавливать Крупп, а вскоре после него и наш, тогда только что основанный, Обуховский завод.

Зачастую сама практика заставляла проверять выводы упрощенной теории выводами теории более строгой и точной, чтобы ближе подойти к действительности и убедиться, что упрощения не слишком далеко завели от истины и что ими не упущена из виду самая сущность дела.

Здесь во многих случаях толчок давали или знаменитые крушения гигантских железнодорожных мостов, казалось бы, правильно сконструированных и рассчитанных по всем правилам и нормам, или трещины и разрывы листов палубы на океанских пароходах, или случаи гибели некоторых длинных пассажирских быстроходных пароходов, которые после столкновения с небольшими судами ломались пополам и тонули, причем о переломе их можно было ясно судить по скрещению их мачт, прежде чем они окончательно погружались под воду.

Теория упругости часто приходила на помощь, давала точное количественное объяснение причин катастрофы, а раз причины становились известными, то не трудно было находить и средства для предотвращения вредных от этих причин последствий.

Лет тридцать назад возникло применение железобетона в строительном деле и стало быстро развиваться, приобретя теперь громадную важность. Здесь возникли новые задачи, перед многими из которых упрощенные методы Бернулли и Эйлера были бессильны; теория упругости получила ряд новых применений.

Отсюда ясно, насколько важно изучение этого предмета ныне, при нашем колоссальном строительстве и бесчисленном разнообразии форм его, поэтому книга Н. И. Мухелишвили отвечает насущной потребности.

В своем предисловии автор отсылает читателя для ознакомления с содержанием книги к оглавлению ее, но сухой перечень статей не дает достаточного представления не только о методе изложения, но даже и о самом содержании. Поэтому я постараюсь вкратце ознакомить с характером изложения, отметив прежде всего его оригинальность, благодаря которой получилась та сжатость, которая дозволила автору вместить в его небольшую книгу столь обширный и во многом совершенно новый материал и вместе с тем сохранить полную ясность изложения.

Книга проф. Мухелишвили включает четыре главы.

Глава I. Основны е у р а в н е н и я м е х а н и к и у п р у г о г о т е л а. Здесь на 75 страницах изложены все общие основания теории упругости, а именно: а) учение о напряженном состоянии тела; б) учение о деформации; в) связь между напряжением и деформацией; г) выведены дифференциальные уравнения равновесия упругого тела и поставлены две основные задачи: 1° определить состояние тела, когда даны силы, на него действующие; 2° определить состояние тела, когда даны смещения точек поверхности, ограничивающей тело.

Глава II. П л о с к а я з а д а ч а. О б щ и е ф о р м у л ы и п р о с т е й ш и е п р и л о ж е н и я. Здесь на 100 страницах изложены как постановка плоской задачи, так и главные методы решения ее. Решение достигается при помощи функции напряжений и комплексного представления ее, причем сперва излагается общая теория методов, а затем они развиваются практически на ряде примеров. Из этих примеров отметим: а) растяжение пластинки, ослабленной круговым отверстием; б) действие сосредоточенной силы, приложенной в точке неограниченной плоскости; в) действие сосредоточенной пары; г) рассмотрение напряжений в кольце, вызываемых заданными силами; д) изгиб кругового бруса; е) общая теория температурных деформаций и вызываемых ими напряжений.

Глава III. П р и м е н е н и е к о н ф о р м н о г о о т о б р а ж е н и я и к о м п л е к с н о г о и н т е г р и р о в а н и я к п л о с к о й з а д а ч е. Здесь на 108 страницах сперва излагаются теория и примеры конформного отображения и прилагаются к преобразованию уравнений плоской задачи и граничных в ней условий, после чего показывается общий метод решения основных задач и поясняется примером решение этих задач для сплошного эллипса.

Затем автор излагает теорию интегралов Коши и дает здесь новые и обобщенные формулы, которыми и пользуется в дальнейшем.

Показав общее решение основных задач для областей, ограниченных одним контуром, и приведение этого решения к уравнениям Фредгольма, автор дает решения многих примеров для областей разного вида, причем особенно важны рассмотренные им случаи решения основных задач для плоскости с вырезами эллиптической формы, а также и со вставками в виде кругового ядра, а затем он дает решение обеих основных задач для полуплоскости и для областей более общего вида.

Все эти решения получаются не случайными частными приемами, а применением общего метода, основанного на выведенных автором свойствах интеграла Коши.

При чтении этой главы я невольно вспомнил весеннее собрание Общества корабельных инженеров в 1898 г. На этом собрании проф. Хел-Шоу (Hele-Shaw) показал в первый раз свой прибор, которым проектируется на экран с удивительной отчетливостью струйное течение жидкости и показывается обтекание этими струями разного рода препятствий. На следующий год я опять был в Лондоне на весеннем собрании Общества. Между прочими докладами норвежский инженер Брун (Bruhn) прочитал доклад о влиянии вырезов и отверстий в палубах на общую крепость судов, а так как незадолго перед этим переломился от столкновения с парусником громадный пароход City of Rome в нескольких милях от Нью-Йорка и катастрофа эта была у всех свежа в памяти, то доклад Бруна был прослушан с особенным интересом. Для изучения этого влияния он взял продолговатый лист резины, разграфил его проведенными параллельно и перпендикулярно длинной стороне прямыми на квадраты, сделал в нем вырезы разной формы и, растянув этот лист в продольном его направлении, зачерчивал форму тех кривых, в которые обращались первоначальные прямые линии, начерченные на листе. По этим линиям получалась картина распределения деформаций, а значит и напряжений. Брун предлагал, делая подобные модели, изучать на них решение той плоской задачи, которая так блестяще решена аналитически Н. И. Мусхелишвили.

Случайно один из вырезов у Бруна был взят совершенно такой же формы, как одно из препятствий в опытах Хел-Шоу, показанных за год перед тем. Получилось почти полное тождество кривых Бруна и струйных линий Хел-Шоу.

Так как никто на это не обратил внимания, то я достал сообщения Общества за предыдущий год, попросил слова и объяснил, что это совпадение отнюдь не случайное, что способ Бруна есть механическое, а способ Хел-Шоу — гидродинамическое решение той же самой обобщенной задачи Дирихле и что нет надобности делать сложных моделей Бруна и сложных обмеров и зачерчиваний получаемых кривых, а стоит только соответствующей формы препятствие вставить в прибор Хел-Шоу и сделать снимок струйных линий, проектируя их на обыкновенную светочувствительную бумагу, — и вся картина деформаций будет получена автоматически. Такое сопоставление явлений из совершенно разных областей было совершенно неожиданно для собрания, и председательствующий в нем старый, в высшей степени опытный, инженер Бенжамен Мартель в своем заключительном слове с особенной благодарностью отметил сказанное мною.

Струйное течение теперь изучается многими способами, как представляющими видоизменение способа Хел-Шоу, так и другими, ибо оно имеет очень важное значение для аэродинамики. Может быть, была бы хорошая задача сопоставить такой «аэродинамический спектр» с теми решениями, которые даны Н. И. Мусхелишвили, и, исходя отсюда, разработать экспериментальный метод решения плоской задачи теории упругости.

Невольно приходит на ум и другой метод, столь блестяще разработанный академиком Н. Н. Павловским, — решение гидродинамической задачи, так сказать «электрическое», по определению эквипотенциальных линий и линий тока в проводящей пластинке, снабженной вырезами данной формы.

Все это представляет осуществление конформных преобразований, столь изящно в аналитической форме развитых Н. И. Мусхелишвили,

и показывает взаимную связь через общность дифференциальных уравнений между вопросами из самых, казалось бы, далеких друг от друга областей физики.

Здесь кстати вспомнить, что и самая функция напряжений введена в рассмотрение вопросов теории упругости знаменитым королевским астрономом сэром Дж. Биддель Эри, который, кажется, более 50 лет был директором Гринвичской обсерватории. В начале 1860-х годов он устраивал для нее новый большой меридианный круг с трубой, имевшей 8-дюймовый объектив. Ему пришлось считаться с гнутием трубы под влиянием веса объектива и окулярной части ее с разными приспособлениями, что на Парижской обсерватории вызвало недопустимые при таких точных наблюдениях, где речь идет о десятых долях секунды, погрешности, доходившие до двух секунд дуги.

Глава IV. К р у ч е н и е и и з г и б о д н о р о д н ы х и с о с т а в н ы х б р у с ь е в. Здесь дается превосходное изложение задачи Сен-Венана, а затем изучаются брусья из разнородного материала, столь важные для железобетонных сооружений, по совершенно новым методам, впервые развитым Н. И. Мухелишвили.

Даже при беглом чтении книги Н. И. Мухелишвили бросается в глаза оригинальность решений не только совершенно новых задач, им поставленных, но и задач, уже давно решенных другими авторами. Так, в главе I, в которой по существу ее содержания излагаются вещи, давно известные, автор многим вопросам придает более полное и отчетливое освещение, нежели это ранее делалось, а новый вывод условий совместности в форме Сен-Венана и Бельтрами—Мичелла принадлежит автору.

В главе II автору принадлежит новый строгий вывод формул Г. В. Колосова и ряда других формул, представляющих результаты в простой форме; обстоятельное исследование аналитического характера решения плоской задачи для многосвязной и для бесконечной областей дает здесь возможность обнаружить у многих других авторов ошибочные заключения.

Также имеет значение принадлежащее автору общее исследование вопроса о действии сосредоточенных сил и получение самого общего для них выражения, причем им также обнаруживаются ошибки многих авторов.

Установление связи температурных напряжений с многозначными смещениями также принадлежит Н. И. Мухелишвили.

Все примеры в этой главе впервые решены автором, а если и были решены ранее, то гораздо более сложными способами.

Глава III целиком принадлежит автору как по оригинальности и общности решенных в ней задач, так и по общности метода, для этого примененного, также принадлежащего автору. Насколько этот метод важен, видно по тому, что автор в § 68 ¹⁾ общее решение второй основной задачи для бесконечной плоскости с эллиптическим отверстием дает на двух страницах крупной печати. Частный случай этой задачи решен Л. Фепплом (L. Förpl) в «Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik», причем это решение занимает 5 больших страниц мельчайшей печати, которые, если бы их набрать нашим академическим шрифтом, заняли бы около 20 страниц; в § 69 ²⁾ в нескольких строках решен пример, от которого пример Феппла составляет простейший частный случай.

¹⁾ § 82 настоящего издания.

²⁾ § 82а настоящего издания.

В главе IV, как уже сказано, все относящееся к телам разнородным, начиная от самой постановки задачи, принадлежит Н. И. Мусхелишвили.

Из этого беглого очерка видно как богатое содержание, так разнообразие и важность рассмотренных в книге вопросов, оригинальность и общность методов, примененных к их решению.

Остается высказать пожелание, чтобы в будущих изданиях, которые, несомненно, понадобятся, автор пояснил общие выводы и формулы численными примерами и схемами расположения вычислений и указаниями о числе ординат или подразделений при выполнении квадратур по приближенным формулам для достижения в результатах точности, скажем, до $1/2\%$. Этим он окажет большую услугу инженерному делу, сделав свою прекрасную книгу более доступной тем лицам, которые его выводы будут применять к решению чисто практических вопросов строительного дела.

Академик А. Крылов

Н. И. Мусхелишвили

Некоторые
основные задачи
математической
теории
упругости

