В.А. Гусев

Математика

Справочные материалы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
В11

В.А. Гусев
В11 Математика: Справочные материалы / В.А. Гусев – М.: Книга по Требованию, 2013. – 416 с.

ISBN 978-5-458-34899-7

В книге дано краткое изложение основных разделов школьных курсов алгебра и начала анализа, геометрии. Книга окажет помощь в систематизации и обобщения знаний по математике.В справочнике вы найдёте основной материал всех разделов школьного курса математики: математические понятия, определения, аксиомы, теоремы, свойства и т.д. Кроме того, в справочнике имеется много подробного разобранных задач и примеров, но заметим, что в их решении используется иногда не только материала того пункта, к которому относится пример или задача, но и материал из других разделов.

ISBN 978-5-458-34899-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

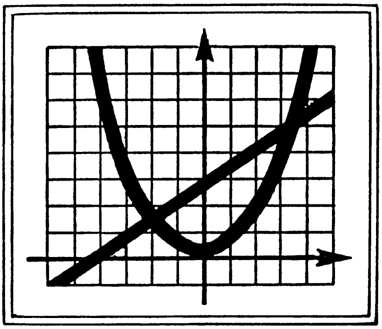
Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

АЛГЕБРА
И НАЧАЛА АНАЛИЗА



ГЛАВА VI. НЕРАВЕНСТВА

§ 17. Решение неравенств с переменной

§ 18. Доказательство неравенств

ГЛАВА VII. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

§ 19. Числовые последовательности

§ 20. Предел функции

§ 21. Производная и ее применения

§ 22. Первообразная и интеграл

ГЛАВА I. ЧИСЛА

§ 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел. Числа 1, 2, 3, 4, 5, ..., использующиеся для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е. $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$.

Вообще если a — цифра тысяч, b — цифра сотен, c — цифра десятков и d — цифра единиц, то имеем $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \times \times 10 + d$. Используется также сокращенная запись $\overline{abcd}$ (написать $abcd$ нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел a, b, c, d). Аналогично запись $\overline{abcde}$ означает число

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e, \text{ причем } a \neq 0.$$

2. Арифметические действия над натуральными числами. Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если m, n — натуральные числа, то $p = m + n$ тоже натуральное число, m и n — *слагаемые, p — сумма;* $p = mn$ тоже натуральное число, m, n — *множители, p — произведение.*

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

1^0. $\boldsymbol{a + b = b + a}$ (*переместительное* свойство сложения).

2^0. $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$ (*сочетательное* свойство сложения).

3^0. $\boldsymbol{ab = ba}$ (*переместительное* свойство умножения).

4^0. $\boldsymbol{(ab)\,c = a\,(bc)}$ (*сочетательное* свойство умножения).

5^0. $\boldsymbol{a\,(b + c) = ab + ac}$ (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например, $7 - 4 = 3$ — натуральное число, тогда как $4 - 7 = -3$ — не натуральное число; $21 : 7 = 3$ — натуральное число, тогда как $11 : 2 = 5{,}5$ — не натуральное число.

Если m, n, k — натуральные числа, то при $m-n=k$ говорят, что m — *уменьшаемое*, n — *вычитаемое*, k — *разность*; при $m:n=k$ говорят, что m — *делимое*, n — *делитель*, k — *частное*, число m называют также *кратным* числа n, а число n — *делителем* числа m. Если m — кратное числа n, то существует натуральное число k, такое, что $m=kn$.

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется *значением выражения*.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: сначала выполняются действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28\cdot 93+(1927-1873)\cdot 31):6-710,$$

то порядок действий таков:

$$(28\overset{1}{\cdot}93\overset{4}{+}(1927\overset{2}{-}1873)\overset{3}{\cdot}31)\overset{5}{:}6\overset{6}{-}710.$$

3. Деление с остатком. Если натуральное число m не делится на натуральное число n, т. е. не существует такого натурального числа k, что $m=nk$, то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е. $43=18\cdot 2+7$. В общем случае *если* m — *делимое*, n — *делитель* ($m>n$), p — *частное* и r — *остаток, то*

$$m=np+r, \tag{1}$$

где $r<n$. Здесь m, n, p, r — натуральные числа (исключение составляет случай, когда m делится на n без остатка и $r=0$). Например, если $n=3$, а $r=2$, то получаем $m=3p+2$. Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

П р и м е р. Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

Р е ш е н и е. Выполним деление «углом»:

```
_36421 |25
 25     |1456
 ---
_114
 100
 ---
 _142
  125
  ---
  _171
   150
   ---
    21
```

Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать: $36\,421 = 25 \cdot 1456 + 21$.

4. Признаки делимости. В некоторых случаях, не производя деления натурального числа m на натуральное число n, можно ответить на вопрос: выполнимо деление m на n без остатка или нет? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью различных признаков делимости.

Т.1.1. Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число *(теорема о делимости суммы)*.

Не следует, однако, думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма $37 + 19$ делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Заметим, однако, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

Т.1.2. Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число *(теорема о делимости произведения)*.

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$ делится на 5, так как 105 делится на 5.

Т.1.3. Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 *(признак делимости на* 2).

Т.1.4. Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 *(признак делимости на* 5).

Т.1.5. Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 *(признак делимости на* 10).

Т.1.6. Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (*признак делимости на* 4).

Доказательство проведем для пятизначного числа $\overline{abcde}$. Имеем $\overline{abcde} = a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$. Так как 100, 1000 и 10 000 делятся на 4, то делится на 4 и сумма $10\,000a + 1000b + 100c$. Значит, если двузначное число $d \cdot 10 + e$ делится на 4, то и $\overline{abcde}$ делится на 4; если же $10d + e$ не делится на 4, то и $\overline{abcde}$ не делится на 4.

Например, число 15 436 делится на 4, так как число 36 делится на 4. Число 372 514 не делится на 4, так как 14 не делится на 4.

Т.1.7. Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (*признак делимости на* 3).

Доказательство проведем для четырехзначного числа $\overline{abcd}$. Имеем $\overline{abcd}=1000a+100b+10c+d=(999a+a)+(99b+b)+(9c+c)+d=$ $=(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$.

Числа 9, 99, 999 делятся на 3, поэтому $999a+99b+9c$ делится на 3, и сумма $(999a+99b+9c)+(a+b+c+d)$ будет делиться на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма цифр $a+b+c+d$.

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 сумма цифр этого числа $2+7+4+2=15$. Число 17 941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

Т.1.8. Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (*признак делимости на* 9).

5. Разложение натурального числа на простые множители. Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно называется *простым;* если число имеет более двух делителей, то оно называется *составным.*

Так, число 19 простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом, не учитывая порядок сомножителей: $19=1\cdot 19$; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом: $35=1\cdot 35=5\cdot 7$.

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

Т.1.9. Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и только одним способом.

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для числа 360 эта запись будет выглядеть следующим образом: