

**В.А. Гусев**

**Математика**  
**Справочные материалы**

**Москва**  
**«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
В11

В11 **В.А. Гусев**  
Математика: Справочные материалы / В.А. Гусев – М.: Книга по Требованию,  
2013. – 416 с.

**ISBN 978-5-458-34899-7**

В книге дано краткое изложение основных разделов школьных курсов алгебра и начала анализа, геометрии. Книга окажет помощь в систематизации и обобщения знаний по математике. В справочнике вы найдёте основной материал всех разделов школьного курса математики: математические понятия, определения, аксиомы, теоремы, свойства и т.д. Кроме того, в справочнике имеется много подробного разобранных задач и примеров, но заметим, что в их решении используется иногда не только материала того пункта, к которому относится пример или задача, но и материал из других разделов.

**ISBN 978-5-458-34899-7**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

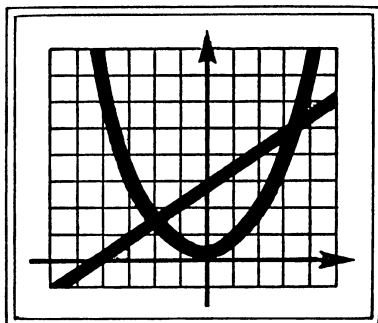


Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



# АЛГЕБРА И НАЧАЛА АНАЛИЗА



## ГЛАВА I. ЧИСЛА

### § 1. Натуральные числа

1. Запись натуральных чисел	11
2. Арифметические действия над натуральными числами	—
3. Деление с остатком	12
4. Признаки делимости	13
5. Разложение натурального числа на простые множители	14
6. Наибольший общий делитель нескольких натуральных чисел	15
7. Наименьшее общее кратное нескольких натуральных чисел	16
8. Употребление букв в алгебре. Переменные	17

### § 2. Рациональные числа

9. Обыкновенные дроби. Правильные и неправильные дроби. Смешанные числа	17
10. Равенство дробей. Основное свойство дроби. Сокращение дробей	18
11. Приведение дробей к общему знаменателю	19
12. Арифметические действия над обыкновенными дробями	20
13. Десятичные дроби	22
14. Арифметические действия	

над десятичными дробями	24
15. Проценты	26
16. Обращение обыкновенной дроби в бесконечную десятичную периодическую дробь	27
17.* Обращение бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную дробь	28
18. Координатная прямая	30
19. Множество рациональных чисел	31

### § 3. Действительные числа

20. Иррациональные числа	31
21. Действительные числа. Числовая прямая	32
22. Обозначения некоторых числовых множеств	33
23. Сравнение действительных чисел	—
24. Свойства числовых неравенств	34
25. Числовые промежутки	35
26. Модуль действительного числа	36
27. Формула расстояния между двумя точками координатной прямой	37
28. Правила действий над действительными числами	—
29. Свойства арифметических действий над действительными числами	38



30. Пропорции . . . . .	38
31. Целая часть числа. Дробная часть числа . . . . .	39
32. Степень с натуральным показателем . . . . .	—
33. Степень с нулевым показателем. Степень с отрицательным целым показателем . . . . .	—
34. Стандартный вид положительного действительного числа . . . . .	40
35. Определение арифметического корня. Свойства арифметических корней . . . . .	—
36. Корень нечетной степени из отрицательного числа . . . . .	41
37. Степень с дробным показателем . . . . .	42
38. Свойства степеней с рациональными показателями . . . . .	—
39. Приближенные значения чисел. Абсолютная и относительная погрешности . . . . .	43
40. Десятичные приближения действительного числа по недостатку и по избытку . . . . .	44
41.* Правило извлечения квадратного корня из натурального числа . . . . .	45
42. Понятие о степени с иррациональным показателем . . . . .	47
43. Свойства степеней с действительными показателями . . . . .	—
<b>§ 4. Комплексные числа</b>	
44. Понятие о комплексном числе . . . . .	47
45. Арифметические операции над комплексными числами . . . . .	48
46. Алгебраическая форма комплексного числа . . . . .	49
47. Отыскание комплексных корней уравнений . . . . .	52
<b>ГЛАВА II. АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ВЫРАЖЕНИЯ</b>	
<b>§ 5. Основные понятия</b>	
48. Виды алгебраических выражений . . . . .	53
49. Допустимые значения переменных. Область определения алгебраического выражения . . . . .	—
50. Понятие тождественного преобразования выражения. Тождество . . . . .	54

<b>§ 6. Целые рациональные выражения</b>	
51. Одночлены и операции над ними . . . . .	55
52. Многочлены. Приведение многочленов к стандартному виду . . . . .	56
53. Формулы сокращенного умножения . . . . .	57
54. Разложение многочленов на множители . . . . .	58
55. Многочлены от одной переменной . . . . .	60
56. Разложение квадратного трехчлена на линейные множители . . . . .	—
57. Разложение на множители двучлена $x^2 - a^2$ . . . . .	61
58. Возведение двучлена в натуральную степень (бином Ньютона) . . . . .	—
<b>§ 7. Дробные рациональные выражения</b>	
59. Рациональная дробь и ее основное свойство . . . . .	62
60. Сокращение рациональных дробей . . . . .	63
61. Приведение рациональных дробей к общему знаменателю . . . . .	—
62. Сложение и вычитание рациональных дробей . . . . .	64
63. Умножение и деление рациональных дробей . . . . .	65
64. Возведение рациональной дроби в целую степень . . . . .	66
65. Преобразование рациональных выражений . . . . .	67
<b>§ 8. Иррациональные выражения</b>	
66. Простейшие преобразования арифметических корней (радикалов) . . . . .	68
67. Тождество $\sqrt{a^2} =  a $ . . . . .	69
68. Преобразование иррациональных выражений . . . . .	70
<b>ГЛАВА III. ФУНКЦИИ И ГРАФИКИ</b>	
<b>§ 9. Свойства функций</b>	
69. Определение функции . . . . .	71
70. Аналитическое задание функции . . . . .	—
71. Табличное задание функции . . . . .	73



72. Числовая плоскость. Координатная плоскость, оси координат . . . . .	73
73. График функции, заданной аналитически . . . . .	—
74. Четные и нечетные функции . . . . .	75
75. График четной функции. График нечетной функции . . . . .	76
76. Периодические функции . . . . .	77
77. Монотонные функции . . . . .	—
<b>§ 10. Виды функций</b>	
78. Постоянная функция . . . . .	78
79. Прямая пропорциональность . . . . .	—
80. Линейная функция . . . . .	80
81. Взаимное расположение графиков линейных функций . . . . .	82
82. Обратная пропорциональность . . . . .	—
83. Функция $y = x^2$ . . . . .	84
84. Функция $y = x^3$ . . . . .	—
85. Степенная функция с натуральным показателем . . . . .	—
86. Степенная функция с целым отрицательным показателем . . . . .	85
87. Функция $y = \sqrt{x}$ . . . . .	86
88. Функция $y = \sqrt[3]{x}$ . . . . .	87
89. Функция $y = \sqrt[n]{x}$ . . . . .	—
90. Степенная функция с положительным дробным показателем . . . . .	88
91. Степенная функция с отрицательным дробным показателем . . . . .	—
92. Функция $y = [x]$ . . . . .	89
93. Функция $y = \{x\}$ . . . . .	—
94. Показательная функция . . . . .	90
95. Обратная функция. График обратной функции . . . . .	91
96. Логарифмическая функция . . . . .	93
97. Число $e$ . Функция $y = e^x$ . Функция $y = \ln x$ . . . . .	94
98. Определение тригонометрических функций . . . . .	95
99. Знаки тригонометрических функций по четвертям . . . . .	96
100. Исследование тригонометрических функций на четность, нечетность . . . . .	97
101. Периодичность тригонометрических функций . . . . .	—
102. Свойства и график функции $y = \sin x$ . . . . .	98
103. Свойства и график функции $y = \cos x$ . . . . .	99
104. Свойства и график функции $y = \operatorname{tg} x$ . . . . .	100
105. Свойства и график функции	

$y = \operatorname{ctg} x$ . . . . .	100
106.* Функция $y = \operatorname{arcsin} x$ . . . . .	—
107.* Функция $y = \operatorname{arccos} x$ . . . . .	102
108.* Функция $y = \operatorname{arctg} x$ . . . . .	103
109.* Функция $y = \operatorname{arcctg} x$ . . . . .	104

## § 11. Преобразования графиков

110. Построение графика функции $y = mf(x)$ . . . . .	105
111. Графики функций $y = ax^2$ , $y = ax^3$ . . . . .	107
112. Построение графика функции $y = f(x - m) + n$ . . . . .	—
113. График квадратичной функции . . . . .	108
114. Способы построения графика квадратичной функции . . . . .	109
115. Построение графика функции $y = f(kx)$ . . . . .	111
116. Сжатие и растяжение графиков тригонометрических функций . . . . .	113
117. График гармонического колебания $y = A \sin(\omega x + \alpha)$ . . . . .	114

## ГЛАВА IV. ТРАНСЦЕНДЕНТНЫЕ ВЫРАЖЕНИЯ

### § 12. Преобразование выражений, содержащих переменную под знаком логарифма

118. Понятие трансцендентного выражения . . . . .	116
119. Определение логарифма положительного числа по данному основанию . . . . .	117
120. Свойства логарифмов . . . . .	—
121. Переход к новому основанию логарифма . . . . .	118
122. Логарифмирование и потенцирование . . . . .	119
123. Десятичный логарифм. Характеристика и мантисса десятичного логарифма . . . . .	120

### § 13. Формулы тригонометрии и их использование для преобразования тригонометрических выражений

124. Тригонометрические выражения . . . . .	121
125. Формулы сложения и вычитания аргументов . . . . .	—
126. Формулы приведения . . . . .	123
127. Соотношения между тригонометрическими функциями	



ми одного и того же аргумента . . . . .	123
128. Формулы двойного угла . . . . .	125
129. Формулы понижения степени . . . . .	126
130. Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение . . . . .	127
131. Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму . . . . .	128
132.* Преобразование выражения $a \cos t + b \sin t$ к виду $A \sin(t + \alpha)$ . . . . .	—
133.* Примеры преобразований выражений, содержащих обратные тригонометрические функции . . . . .	129

## ГЛАВА V. УРАВНЕНИЯ И СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

### § 14. Уравнения с одной переменной

134. Определение уравнения. Корни уравнения . . . . .	131
135. Равносильность уравнений . . . . .	—
136. Линейные уравнения . . . . .	132
137. Квадратные уравнения . . . . .	133
138. Неполные квадратные уравнения . . . . .	134
139. Теорема Виета . . . . .	—
140. Системы и совокупности уравнений . . . . .	135
141. Уравнения, содержащие переменную под знаком модуля . . . . .	136
142. Понятие следствия уравнения. Посторонние корни . . . . .	137
143. Уравнения с переменной в знаменателе . . . . .	138
144. Область определения уравнения . . . . .	139
145. Рациональные уравнения . . . . .	141
146. Решение уравнения $p(x) = 0$ методом разложения его левой части на множители . . . . .	—
147. Решение уравнений методом введения новой переменной . . . . .	142
148. Биквадратные уравнения . . . . .	143
149. Решение задач с помощью составления уравнений . . . . .	—
150. Иррациональные уравнения . . . . .	147
151. Показательные уравнения . . . . .	149
152. Логарифмические уравнения . . . . .	—
153. Примеры решения показательно-логарифмических уравнений . . . . .	151

154. Простейшие тригонометрические уравнения . . . . .	152
155. Методы решения тригонометрических уравнений . . . . .	153
156.* Универсальная подстановка (для тригонометрических уравнений) . . . . .	156
157.* Метод введения вспомогательного аргумента (для тригонометрических уравнений) . . . . .	157
158. Графическое решение уравнений . . . . .	158
159.* Уравнения с параметром . . . . .	160

### § 15. Уравнения с двумя переменными

160. Решение уравнения с двумя переменными . . . . .	163
161. График уравнения с двумя переменными . . . . .	—
162. Линейное уравнение с двумя переменными и его график . . . . .	—

### § 16. Системы уравнений

163. Системы двух уравнений с двумя переменными. Равносильные системы . . . . .	164
164. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом подстановки . . . . .	166
165. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом сложения . . . . .	—
166. Решение систем двух уравнений с двумя переменными методом введения новых переменных . . . . .	167
167. Графическое решение систем двух уравнений с двумя переменными . . . . .	169
168. Исследование системы двух линейных уравнений с двумя переменными . . . . .	170
169.* Решение систем двух уравнений с двумя переменными методами умножения и деления . . . . .	171
170. Системы показательных и логарифмических уравнений . . . . .	173
171.* Системы тригонометрических уравнений с двумя переменными . . . . .	—
172. Системы трех уравнений с тремя переменными . . . . .	175



173. Решение задач с помощью составления систем уравнений . . . . . 176

## ГЛАВА VI. НЕРАВЕНСТВА

### § 17. Решение неравенств с переменной

174. Основные понятия, связанные с решением неравенств с одной переменной . . . 178
175. Графическое решение неравенств с одной переменной 179
176. Линейные неравенства с одной переменной . . . . . —
177. Системы неравенств с одной переменной . . . . . 180
178. Совокупность неравенств с одной переменной . . . . . 181
179. Дробно-линейные неравенства . . . . . 182
180. Неравенства второй степени 183
181. Графическое решение неравенств второй степени . . 185
182. Неравенства с модулями 187
183. Решение рациональных неравенств методом промежутков . . . . . 189
184. Показательные неравенства 191
185. Логарифмические неравенства . . . . . —
- 186.\* Иррациональные неравенства . . . . . 193
187. Решение тригонометрических неравенств . . . . . 195
188. Неравенства и системы неравенств с двумя переменными . . . . . 196

### § 18. Доказательство неравенств

189. Метод оценки знака разности . . . . . 199
190. Синтетический метод доказательства неравенств . . . . . —
191. Доказательство неравенств методом от противного . . 200
- 192.\* Использование неравенств при решении уравнений . 201

## ГЛАВА VII. ЭЛЕМЕНТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

### § 19. Числовые последовательности

193. Определение последовательности . . . . . 201

194. Способы задания последовательности . . . . . 202
195. Возрастание и убывание последовательности . . . . . —
196. Определение арифметической прогрессии . . . . . 203
197. Свойства арифметической прогрессии . . . . . 204
198. Определение геометрической прогрессии . . . . . 205
199. Свойства геометрической прогрессии . . . . . 206
200. Понятие о пределе последовательности . . . . . 207
201. Вычисление пределов последовательностей . . . . . 209
202. Сумма бесконечной геометрической прогрессии при  $|q| < 1$  . . . . . 210

### § 20. Предел функции

203. Предел функции  $y = f(x)$  при  $x \rightarrow \infty$ . Горизонтальная асимптота . . . . . 211
204. Вычисление пределов функций при  $x \rightarrow \infty$  . . . . . 213
205. Предел функции в точке. Непрерывные функции . . 214
206. Вертикальная асимптота 215
207. Вычисление пределов функций в точке . . . . . 216

### § 21. Производная и ее применения

208. Приращение аргумента. Приращение функции . . . . . 218
209. Определение производной . . . . . —
210. Формулы дифференцирования. Таблица производных . . . . . 220
211. Дифференцирование суммы, произведения, частного . . . . . —
212. Сложная функция и ее дифференцирование . . . . . 221
213. Физический смысл производной . . . . . 222
214. Вторая производная и ее физический смысл . . . . . 223
215. Касательная к графику функции . . . . . —
216. Применение производной к исследованию функций на монотонность . . . . . 226
217. Применение производной к исследованию функций на экстремум . . . . . 228
218. Отыскание наибольшего и



- наименьшего значений непрерывной функции на отрезке . . . . . 231
- 219.\* Отыскание наибольшего или наименьшего значения непрерывной функции на незамкнутом промежутке . 232
220. Задачи на отыскание наибольших или наименьших значений величин . . . 234
221. Применение производной для доказательства тождеств 237
222. Применение производной для доказательства неравенств . . . . . 238
223. Общая схема построения графика функции . . . 239
- § 22. Первообразная и интеграл**
224. Первообразная . . . . . 243
225. Таблица первообразных . . . —
226. Правила вычисления первообразных . . . . . 244
227. Интеграл . . . . . 246
228. Связь между интегралом и первообразной (формула Ньютона—Лейбница) . . 248
229. Правила вычисления интегралов . . . . . —
230. Использование интеграла для вычисления площадей плоских фигур . . . . . 249

## ГЛАВА I. ЧИСЛА

### § 1. Натуральные числа

1. **Запись натуральных чисел.** Числа 1, 2, 3, 4, 5, ... , используемые для счета предметов или для указания порядкового номера того или иного предмета среди однородных предметов, называются *натуральными*. Любое натуральное число в десятичной системе счисления записывается с помощью цифр 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Например, запись 2457 означает, что 2 — цифра тысяч, 4 — цифра сотен, 5 — цифра десятков и 7 — цифра единиц, т. е.  $2457 = 2 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 5 \cdot 10 + 7$ .

Вообще если  $a$  — цифра тысяч,  $b$  — цифра сотен,  $c$  — цифра десятков и  $d$  — цифра единиц, то имеем  $a \cdot 1000 + b \cdot 100 + c \cdot 10 + d$ . Используется также сокращенная запись  $\overline{abcd}$  (написать  $abcd$  нельзя, так как такая запись в соответствии с принятым в математике соглашением означает произведение чисел  $a, b, c, d$ ). Аналогично запись  $\overline{abcde}$  означает число

$$a \cdot 10\,000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e, \text{ причем } a \neq 0.$$

2. **Арифметические действия над натуральными числами.** Результатом сложения или умножения двух натуральных чисел всегда является натуральное число: если  $m, n$  — натуральные числа, то  $p = m + n$  тоже натуральное число,  $m$  и  $n$  — *слагаемые*,  $p$  — *сумма*;  $p = mn$  тоже натуральное число,  $m, n$  — *множители*,  $p$  — *произведение*.

Справедливы следующие свойства сложения и умножения натуральных чисел:

- 1<sup>0</sup>.  $a + b = b + a$  (*переместительное* свойство сложения).
- 2<sup>0</sup>.  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (*сочетательное* свойство сложения).
- 3<sup>0</sup>.  $ab = ba$  (*переместительное* свойство умножения).
- 4<sup>0</sup>.  $(ab)c = a(bc)$  (*сочетательное* свойство умножения).
- 5<sup>0</sup>.  $a(b + c) = ab + ac$  (*распределительное* свойство умножения относительно сложения).

В результате вычитания или деления натуральных чисел не всегда получается натуральное число: например,  $7 - 4 = 3$  — натуральное число, тогда как  $4 - 7 = -3$  — не натуральное число;  $21 : 7 = 3$  — натуральное число, тогда как  $11 : 2 = 5,5$  — не натуральное число.



Если  $m$ ,  $n$ ,  $k$  — натуральные числа, то при  $m - n = k$  говорят, что  $m$  — *уменьшаемое*,  $n$  — *вычитаемое*,  $k$  — *разность*; при  $m : n = k$  говорят, что  $m$  — *делимое*,  $n$  — *делитель*,  $k$  — *частное*, число  $m$  называют также *кратным* числа  $n$ , а число  $n$  — *делителем* числа  $m$ . Если  $m$  — кратное числа  $n$ , то существует натуральное число  $k$ , такое, что  $m = kn$ .

Из чисел с помощью знаков арифметических действий и скобок составляются *числовые выражения*. Если в числовом выражении выполнить указанные действия, соблюдая принятый порядок, то получится число, которое называется *значением выражения*.

Напомним порядок арифметических действий в числовом выражении: сначала выполняются действия в скобках; внутри любых скобок сначала выполняют умножение и деление, а потом сложение и вычитание. Например, если нужно найти значение выражения

$$(28 \cdot 93 + (1927 - 1873) \cdot 31) : 6 - 710,$$

то порядок действий таков:

$$(28 \cdot 93 + (1927 - 1873) \cdot 31) : 6 - 710.$$

**3. Деление с остатком.** Если натуральное число  $m$  не делится на натуральное число  $n$ , т. е. не существует такого натурального числа  $k$ , что  $m = nk$ , то рассматривают деление с остатком. Например, при делении числа 43 на число 18 в частном получается 2 и в остатке 7, т. е.  $43 = 18 \cdot 2 + 7$ . В общем случае если  $m$  — *делимое*,  $n$  — *делитель* ( $m > n$ ),  $p$  — *частное* и  $r$  — *остаток*, то

$$m = np + r, \quad (1)$$

где  $r < n$ . Здесь  $m$ ,  $n$ ,  $p$ ,  $r$  — натуральные числа (исключение составляет случай, когда  $m$  делится на  $n$  без остатка и  $r = 0$ ). Например, если  $n = 3$ , а  $r = 2$ , то получаем  $m = 3p + 2$ . Это формула чисел, которые при делении на 3 дают в остатке 2.

**Пример.** Найти частное и остаток от деления числа 36 421 на число 25.

**Решение.** Выполним деление «углом»:

$$\begin{array}{r} 36421 \overline{) 25} \\ - 25 \phantom{00} \\ \hline 114 \\ - 100 \\ \hline 142 \\ - 125 \\ \hline 171 \\ - 150 \\ \hline 21 \end{array}$$



Итак, частное 1456, а остаток 21. Воспользовавшись равенством (1), можем записать:  $36\ 421 = 25 \cdot 1456 + 21$ .

**4. Признаки делимости.** В некоторых случаях, не производя деления натурального числа  $m$  на натуральное число  $n$ , можно ответить на вопрос: выполнимо деление  $m$  на  $n$  без остатка или нет? Ответ на этот вопрос можно получить с помощью различных признаков делимости.

**T.1.1.** | Если каждое слагаемое делится на некоторое число, то и сумма делится на это число (*теорема о делимости суммы*).

Не следует, однако, думать, что если каждое слагаемое суммы не делится на какое-то число, то и сумма не делится на это число. Например, сумма  $37 + 19$  делится на 4, хотя ни 37, ни 19 не являются кратными числа 4. Заметим, однако, что если все слагаемые, кроме одного, делятся на некоторое число, то сумма не делится на это число.

**T.1.2.** | Если в произведении хотя бы один из сомножителей делится на некоторое число, то и произведение делится на это число (*теорема о делимости произведения*).

Например, не выполняя умножения, можно утверждать, что произведение  $105 \cdot 48 \cdot 93 \cdot 54$  делится на 5, так как 105 делится на 5.

**T.1.3.** | Натуральное число делится на 2 тогда и только тогда, когда его последняя цифра делится на 2 (*признак делимости на 2*).

**T.1.4.** | Натуральное число делится на 5 тогда и только тогда, когда его последняя цифра либо 0, либо 5 (*признак делимости на 5*).

**T.1.5.** | Натуральное число делится на 10 тогда и только тогда, когда его последняя цифра 0 (*признак делимости на 10*).

**T.1.6.** | Натуральное число, содержащее не менее трех цифр, делится на 4 тогда и только тогда, когда делится на 4 двузначное число, образованное последними двумя цифрами заданного числа (*признак делимости на 4*).

Доказательство проведем для пятизначного числа  $\overline{abcde}$ . Имеем  $\overline{abcde} = a \cdot 10\ 000 + b \cdot 1000 + c \cdot 100 + d \cdot 10 + e$ . Так как 100, 1000 и 10 000 делятся на 4, то делится на 4 и сумма  $10\ 000a + 1000b + 100c$ . Значит, если двузначное число  $d \cdot 10 + e$  делится на 4, то и  $\overline{abcde}$  делится на 4; если же  $10d + e$  не делится на 4, то и  $\overline{abcde}$  не делится на 4.



Например, число 15 436 делится на 4, так как число 36 делится на 4. Число 372 514 не делится на 4, так как 14 не делится на 4.

**T.1.7.** | Натуральное число делится на 3 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 3 (*признак делимости на 3*).

Доказательство проведем для четырехзначного числа  $\overline{abcd}$ . Имеем  $\overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d = (999a + a) + (99b + b) + (9c + c) + d = (999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$ .

Числа 9, 99, 999 делятся на 3, поэтому  $999a + 99b + 9c$  делится на 3, и сумма  $(999a + 99b + 9c) + (a + b + c + d)$  будет делиться на 3 тогда и только тогда, когда делится на 3 сумма цифр  $a + b + c + d$ .

Например, число 2742 делится на 3, так как делится на 3 сумма цифр этого числа  $2 + 7 + 4 + 2 = 15$ . Число 17 941 не делится на 3, так как сумма цифр этого числа равна 22, а 22 не делится на 3.

**T.1.8.** | Натуральное число делится на 9 тогда и только тогда, когда сумма его цифр делится на 9 (*признак делимости на 9*).

### 5. Разложение натурального числа на простые множители.

Если число имеет только два делителя (само число и единица), то оно называется *простым*; если число имеет более двух делителей, то оно называется *составным*.

Так, число 19 простое, ибо оно имеет только два делителя: 1 и 19; число 35 составное, оно имеет четыре делителя: 1, 5, 7, 35. Простое число 19 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел только одним способом, не учитывая порядок сомножителей:  $19 = 1 \cdot 19$ ; составное число 35 можно представить в виде произведения двух натуральных чисел более чем одним способом:  $35 = 1 \cdot 35 = 5 \cdot 7$ .

Заметим, что число 1 не относится ни к простым, ни к составным числам.

**T.1.9.** | Любое составное натуральное число можно разложить на простые множители, и только одним способом.

При разложении чисел на простые множители используют признаки делимости и применяют запись столбиком, при которой делитель располагается справа от вертикальной черты, а частное записывается под делимым. Так, для числа 360 эта запись будет выглядеть следующим образом: