

Н.И. Безухов

**Сборник задач по теории упругости и
пластичности**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
Н11

Н11 **Н.И. Безухов**
Сборник задач по теории упругости и пластичности / Н.И. Безухов – М.: Книга по Требованию, 2023. – 286 с.

ISBN 978-5-458-28947-4

Книга представляет собою учебник по курсу теории упругости и пластичности применительно к программам высших технических учебных заведений. В книге дано слитное изложение основ теории упругости, теории пластичности и теории ползучести. Учебник может быть использован как на тех факультетах и специальностях, где указанные основы в учебном плане представлены самостоятельной технической дисциплиной, так и на тех факультетах, где основы теории упругости и пластичности проходятся слитно с курсом сопротивления материалов. В последнем случае исключаются некоторые главы и разделы книги, о чем указано в предисловии.

ISBN 978-5-458-28947-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящий сборник задач составлен применительно к действующим во втузах программам по курсу теории упругости и пластичности.

Автор, работая над сборником, имел в виду две цели: во-первых, дать возможность студентам самостоятельно проверить полученные ими теоретические знания и приобрести навыки для применения этих знаний в конкретных задачах инженерной практики; во-вторых, помочь преподавателям не только в организации и проведении практических занятий в аудитории, но и при выборе задач для самостоятельного решения студентами дома.

Задачи, которые могут быть рекомендованы в качестве домашних контрольных работ (курсовые задания, расчетно-графические отчетные работы) отмечены номером с литером (например, 91^a); они являются однотипными, одинаковой сложности и даны в количестве, позволяющем обеспечить ими небольшую учебную группу. Такое выделение, как показывает опыт методической работы во втузах и, особенно, в заочных институтах, значительно облегчает для преподавателей организацию выдачи указанных контрольных заданий.

В сборнике имеются в небольшом числе и задачи, частично выходящие по своему содержанию за рамки учебных программ; они могут быть использованы для семинарских и самостоятельных занятий студентами, проявляющими особый интерес к проблемам теории упругости и пластичности. Эти задачи отмечены в сборнике звездочками.

Тематика задач в сборнике взята из различных областей инженерной практики, как-то: строительной, меха-

нической, технологической, чтобы сборник задач мог оказаться полезным для втузов перечисленных специальностей; этим отчасти объясняется и сравнительно большое количество задач в сборнике.

В целях унификации обозначений, а также по причине несомненного удобства иметь в сборнике некоторые справочные сведения, главнейшие формулы и т. п. каждому разделу задачника предпосланы краткие сведения из теории.

Задачи частично заимствованы из отдельных источников (ссылки на них указаны номером в скобках, соответствующим порядковому номеру источников, перечисленных в конце книги), остальные предложены автором на основании его личного опыта преподавания.

В заключение автор приносит сердечную благодарность всем лицам, оказавшим ему помощь при составлении настоящего сборника. Автор, особенно признателен Л. М. Качанову и В. В. Соколовскому, сделавшим по рукописи много ценных замечаний и предложений.

Автор

ОБОЗНАЧЕНИЯ ЧАСТО ВСТРЕЧАЮЩИХСЯ ВЕЛИЧИН

x, y, z — декартовы координаты точки тела в недеформированном состоянии;

r, θ, z — то же, цилиндрические координаты;

u, v, w — проекции на неподвижные координатные оси (x, y, z) действительного смещения рассматриваемой точки тела; в случае цилиндрических координат соответственно: u — проекция на радиус, v — проекция на тангенциальное направление и w — проекция на ось z тела вращения;

u_r, u_θ, u_z — другие обозначения в цилиндрических координатах проекций действительного смещения точки;

p_v — полное напряжение в точке по площадке, имеющей внешнюю нормаль v ;

p_{xv}, p_{yv}, p_{zv} — проекции на координатные оси (x, y, z) полного напряжения p_v :

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2,$$

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ — нормальные напряжения, имеющие направления, параллельные координатным осям x, y, z , и действующие по трем взаимно-перпендикулярным площадкам, проведенным через данную точку.

для которых внешние нормали соответственно параллельны осям x, y, z ;

τ_{xy}, τ_{xz} — касательные напряжения, имеющие направление, параллельное оси x , и действующие на площадках, с нормальными по осям y или z ;

τ_{yx}, τ_{yz} — то же, параллельные оси y и действующие на площадках с нормальными по осям x или z ;

τ_{zx}, τ_{zy} — то же, параллельные оси z и действующие на площадках с нормальными по осям x и y ;

$T_n = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$ — тензор напряжений для данной точки, т. е. совокупность компонентов напряжений, действующих на трех взаимно-перпендикулярных площадках;

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ — главные напряжения для данной точки, т. е. нормальные напряжения на площадках, на которых отсутствуют касательные напряжения, причем $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$;

$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}$ — главные касательные напряжения; действуют на площадках, которые делят пополам двугранные углы между площадками главных напряжений σ_1 и σ_2 *);

$\tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}$ — то же, на площадках, биссекторных к направлениям σ_2 и σ_3 ;

* *) Здесь, и ниже, индексы в обозначениях главных касательных напряжений являются условными, не связанными с направлениями этих напряжений и нормальными к площадкам, на которых они действуют (как это предусматривается для компонентов тензора напряжений). Другие авторы (см. Соколовский В. В. [6]) вводят иные обозначения, освобожденные от указанной условности, как то τ_3, τ_2, τ_1 .

- $\tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$ — то же, на площадках, биссекторных к направлениям σ_3 и σ_1 ;
- $\sigma_{\text{ср}} = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)$ — среднее напряжение, оно же — нормальное напряжение на октаэдрических площадках, т. е. на площадках, равнонаклоненных к главным площадкам, проходящих через рассматриваемую точку;
- $\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}$ — касательное напряжение на октаэдрических площадках;
- $\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}$ — интенсивность напряжения (иначе — приведенное, расчетное напряжение);
- $\sigma^{\text{I}}, \sigma^{\text{II}}, \sigma^{\text{III}}$ — инварианты (первый, второй, третий) тензора напряжений; характеристики напряженного состояния, не зависящие от выбора координатной системы;
- $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z$ — относительные удлинения (в декартовых координатах) по направлению осей x, y, z (деформации первого рода);
- $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ — относительные сдвиги (в декартовых координатах) (деформации второго рода); индексы указывают координатные плоскости, на которые проектируются соответствующие сдвиги;
- $2\epsilon_{xy}, 2\epsilon_{yz}, 2\epsilon_{zx}$ — другие обозначения относительных сдвигов;
- $T_{\text{деф}} = \begin{pmatrix} \epsilon_x & \epsilon_{xy} & \epsilon_{xz} \\ \epsilon_{yx} & \epsilon_y & \epsilon_{yz} \\ \epsilon_{zx} & \epsilon_{zy} & \epsilon_z \end{pmatrix}$ — тензор деформации, т. е. совокупность компонентов деформации бесконечно малого объема (в форме параллелепипеда) в окрестности заданной точки;
- $\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3$ — главные удлинения для данной точки;

$\gamma_{\max} = \epsilon_1 - \epsilon_3$ — наибольший сдвиг для данной точки;

$\epsilon_{\text{ср}} = \frac{1}{3} (\epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z)$ — среднее удлинение (октаэдрическое), т. е. удлинение в направлениях, нормальных к октаэдрическим площадкам;

$\gamma_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2 + (\epsilon_2 - \epsilon_3)^2 + (\epsilon_3 - \epsilon_1)^2}$ — октаэдрический сдвиг, т. е. изменение в процессе деформации прямого двугранного угла между площадками, на которых действуют напряжения $\tau_{\text{окт}}$;

$\theta = 3\epsilon_{\text{ср}}$ — относительная объемная деформация;

$\epsilon_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \gamma_{\text{окт}}$ — интенсивность деформации;

$\epsilon^{\text{I}}, \epsilon^{\text{II}}, \epsilon^{\text{III}}$ — инварианты (первый, второй, третий) тензора деформации, характеристики деформированного состояния, не зависящие от выбора координатной системы;

E, G — модули упругости первого рода (модуль Юнга) и второго рода (модуль сдвига);

μ — коэффициент Пуассона;

$\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$ — постоянная Ляме;

$\left. \begin{aligned} l &= \cos(x, \nu) \\ m &= \cos(y, \nu) \\ n &= \cos(z, \nu) \end{aligned} \right\}$ — направляющие косинусы;

$\nabla^2 () = \frac{\partial^2 ()}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 ()}{\partial z^2}$ — лапласиан второго рода — обозначение лапласовой операции второго рода над функцией ().

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ МЕХАНИКИ СПЛОШНОЙ СРЕДЫ

Краткие сведения из теории

1. Напряженное состояние в точке тела при заданном нагружении определяется тензором напряжений (см. обозначения, стр. 8). Для любой наклонной (по отношению к координатным осям) площадки, проходящей через данную точку, проекции на координатные оси (x, y, z) полного напряжения записываются:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n, \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n, \end{aligned} \right\} \quad (1.01)$$

а проекция на нормаль к площадке (т. е. нормальное напряжение σ_v) и другая проекция, лежащая на самой площадке (т. е. касательное напряжение τ_v), равны

$$\left. \begin{aligned} \sigma_v &= \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy} lm + 2\tau_{yz} mn + 2\tau_{zx} nl, \\ \tau_v^2 &= p_v^2 - \sigma_v^2, \end{aligned} \right\} \quad (1.02)$$

где

$$p_v^2 = p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2.$$

2. Главные напряжения $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ в точке тела при заданном нагружении определяются как корни кубического уравнения

$$\sigma^3 - \sigma^2 \sigma^I + \sigma \sigma^{II} - \sigma^{III} = 0, \quad (1.03)$$

где коэффициенты уравнения (инварианты тензора напряжений)

$$\left. \begin{aligned} \sigma^I &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \quad \sigma^{II} = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ \sigma^{III} &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.04)$$

Контролем правильности решения кубического уравнения могут служить соотношения, вытекающие из инвариантности коэффициентов уравнения

$$\sigma^I = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3, \quad \sigma^{II} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1, \quad \sigma^{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3.$$

На площадках, равнонаклоненных к главным площадкам (октаэдрические площадки), имеются напряжения

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3), \quad \tau_{\text{окт}} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}, \end{aligned} \quad (1.05)$$

или через компоненты тензора напряжений

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z), \quad \tau_{\text{окт}} = \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \end{aligned} \quad (1.06)$$

Касательное октаэдрическое напряжение через относительные максимумы касательных напряжений записывается:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2},$$

где

$$\tau_{12} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \pm \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \pm \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}. \quad (1.07)$$

Наибольшее и наименьшее касательные напряжения для данной точки соответственно

$$\tau_{\text{max}} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2}.$$

3. Для элемента тела в виде бесконечно малого параллелепипеда дифференциальные уравнения равновесия

(движения) в декартовых координатах записываются:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X\rho &= 0 & \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y\rho &= 0 & \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \right), \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z\rho &= 0 & \left(\text{или } \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1.08)$$

(в другой системе координат уравнения равновесия имеют другой вид, а именно (1.16) или (1.17)).

К этим уравнениям присоединяются остающиеся без изменения как в статической, так и в динамической задаче соотношения

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}, \quad \tau_{zx} = \tau_{xz}.$$

4. Деформированное состояние в окрестности данной точки определяется тензором деформаций (см. обозначения, стр. 9).

Все необходимые формулы в теории деформации можно записать по аналогии с соответствующими формулами в теории напряжений.

Так, относительное удлинение какого-нибудь отрезка, проходящего через заданную точку, имеющего направляющие косинусы l, m, n , запишется через шесть компонентов деформации той же точки следующим образом:

$$\varepsilon_v = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + 2\varepsilon_{xy} lm + 2\varepsilon_{yz} mn + 2\varepsilon_{zx} nl, \quad (1.09)$$

т. е. аналогично формуле для нормального напряжения на площадке с нормалью v .

Для определения главных удлинений в точке служит уравнение

$$\varepsilon^3 - \varepsilon^2 \varepsilon^I + \varepsilon \varepsilon^{II} - \varepsilon^{III} = 0, \quad (1.10)$$

где инварианты тензора деформации

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon^I &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z, \quad \varepsilon^{II} = \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \varepsilon_{xy}^2 - \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_{zx}^2, \\ \varepsilon^{III} &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + 2\varepsilon_{xy} \varepsilon_{yz} \varepsilon_{zx} - \varepsilon_x \varepsilon_{yz}^2 - \varepsilon_y \varepsilon_{zx}^2 - \varepsilon_z \varepsilon_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Удлинения в направлении, нормальном к октаэдрической площадке, и октаэдрический сдвиг

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\text{окт}} &= \frac{1}{3} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3), \quad \gamma_{\text{окт}} = \\ &= \frac{2}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2}.\end{aligned}\quad (1.12)$$

5. Компоненты деформации в декартовых координатах выражаются через компоненты перемещений:

$$\left. \begin{aligned}\varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{xy} = 2\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}; \\ \gamma_{yz} &= 2\varepsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = 2\varepsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\end{aligned}\right\} \quad (1.13)$$

(в другой системе координат дифференциальные соотношения имеют другой вид, см. (1.18), (1.19)).

6. Компоненты деформации связаны условиями совместности или неразрывности деформации:

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x};\end{aligned}\right\} \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.\end{aligned}\right\} \quad (1.15)$$

7. В цилиндрической системе координат $r\theta z$ дифференциальные уравнения равновесия имеют вид

$$\left. \begin{aligned}\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} &= 0, \\ \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{zr}}{r} &= 0.\end{aligned}\right\} \quad (1.16)$$