

А.Н. Крылов

**О расчете балок, лежащих на
упругом основании**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 53
ББК 22.3
А11

А11 **А.Н. Крылов**
О расчете балок, лежащих на упругом основании / А.Н. Крылов – М.: Книга по Требованию,
2024. – 156 с.

ISBN 978-5-458-58000-7

ISBN 978-5-458-58000-7

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг — не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель — вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания — решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ОГЛАВЛЕНИЕ

§§		Стр.
	Предисловие ко 2-му изданию	5
	Введение	7

ГЛАВА I

Расчет балок постоянного сечения

1.	Основное дифференциальное уравнение. Метода Шведлера решения его. Недостатки этой методы при прерывной нагрузке	9
2.	Приведение прерывной нагрузки к непрерывной	13
3.	Решение основного уравнения по методу Коши	16
4.	Составление частных решений однородного уравнения обладающих единичною матрицею	20
5.	Приведение частного решения неоднородного уравнения к простейшему виду	25
6.	Различные виды прерывной нагрузки	28
7, 8.	Виды частного интеграла для различных случаев прерывной нагрузки	30
9.	Случай сосредоточенных сил	36
10.	Производные частного интеграла при нагрузке прерывной и сосредоточенной	39
11.	Определение постоянных произвольных общего интеграла по граничным условиям	42
12.	Случай симметричной нагрузки	45
13.	Пример — железнодорожная шпала, расчет его по общим формулам	46
14.	Производство проверки результатов расчета	55
15, 16, 17.	Расчет балок постоянного сечения пользуясь разложением в ряды по фундаментальным функциям	62
18.	Пример — балка подпертая в обоих концах	66
19, 20.	Усиление быстроты сходимости рядов расположенных по фундаментальным функциям	68
21.	Пример — балка подпертая в обоих концах	74
22, 23.	Метода последовательных приближений. Сходимость их. Численный пример	76
24.	Характеристические числа и фундаментальные функции. Таблицы их	87

ГЛАВА II

Расчет балок переменного сечения

25. Составление основного дифференциального уравнения	92
26. Метода последовательных приближений для балки переменного профиля по постоянной ширине опорной панели	94
27. Определение постоянных произвольных по граничным условиям	97
28. Метода численного интегрирования основного дифференциального уравнения при переменном профиле и переменной ширине опорной панели	101
29. Критический обзор разных методов расчета. Выбор в каждом частном случае наиболее выгодного метода	112

ПРИБАВЛЕНИЕ

О расчете перекрестных связей и набора судового днища

1, 2. Постановка вопроса	115
3. Расчет судового набора, когда в трюме пиллерсов нет. Составление и развитие характеристического уравнения	116
4. Расчет судового набора когда в трюме есть пиллерсы	130
Таблицы тригонометрических и гиперболических функций и их производений по парно	135

ПРЕДИСЛОВИЕ КО 2-му ИЗДАНИЮ

Первое издание этой книги быстро разошлось, в виду чего Редакционно-Издательский Совет Академии Наук постановил выпустить второе ее издание, дополнив его таблицами приложенными к книге Хаяси, на что Государственное Техническое Издательство любезно выразило свое согласие.

Первоначальный текст оставлен без изменений, лишь в прибавлении при расчете набора судового днища применена к составлению характеристического уравнения метода изложенная в моей статье: «О численном решении уравнения, которым определяются частоты малых колебаний материальных систем», ибо эта метода всего проще и быстрее ведет к цели.

А. Крылов.

ВВЕДЕНИЕ

Расчет балок, лежащих на упругом основании, разбирается весьма подробно и обстоятельно в изданном Государственным техническим издательством сочинении проф. Кеиши Хаяси под заглавием «Теория расчета балок на упругом основании».

Хаяси излагает обычные методы решения этого вопроса, причем в случае прерывной нагрузки или сосредоточенных сил, он подразделяет балку на отдельные участки по местам разрывов нагрузки или приложения сосредоточенных сил, и таким образом вместо одной непрерывной балки ему приходится рассматривать столько балок, сколько таких участков. Вследствие этого кроме граничных условий, выражающих род закрепления концов балки, ему необходимо составлять для каждой точки соединения двух участков по четыре уравнения, выражающих условия «сопряжения» этих участков балки. Так, например, для балки нагруженной тремя силами ему надо рассматривать четыре участка, и для определения шестнадцати произвольных постоянных, вводимых интегрированием, составить шестнадцать уравнений с шестнадцатью неизвестными со сложными при них коэффициентами. Отсюда ясно к каким сложным выкладкам, даже для простейших нагрузок, приводит эта обычная метода.

В этой статье я прежде всего развиваю общую методу решения поставленного вопроса, при которой, какова бы нагрузка ни была, балку на отдельные участки подразделять не надо, условий сопряжения составлять не надо и вместо многочисленных уравнений для определения постоянных произвольных таковых приходится определять во всех случаях нагрузки две и только две по условиям закрепления одного из концов балки. Это вносит во все выкладки простоту и симметрию.

Развив эту «точную» методу и пояснив ее численным примером, я показываю «приближенные» методы, которые обобщаются на случай балок переменного и притом какого угодно сечения. Методу эту поясню

также численным примером, чтобы показать, что «приближение» может быть доведено до любой степени точности.

На применимость формул к численным вычислениям, без чего вопрос не может считаться решенным, я обращаю особенное внимание, ибо рассматриваемый вопрос в связи с нашим громадным и самым разнообразным строительством как раз теперь получил не маловажное практическое значение.

Статья подразделена на две главы, в первой из которых рассматриваются балки постоянного сечения, во второй — балки переменного сечения, относя сюда и те случаи, когда балка состоит из нескольких частей, на каждой из которых ее сечение постоянное.

В прибавлении я прилагаю методу изложенную в первой главе к расчету перекрестных связей вообще и в частности набора судового днища.

ГЛАВА I

Расчет балок постоянного сечения

§ 1. Расчет балки постоянного сечения, лежащей на упругом основании, приводится, как известно со времен Эйлера, к интегрированию уравнения

$$(1) \quad EI \frac{d^4 y}{dx^4} + Ky = F(x),$$

в котором E — модуль упругости материала балки, I — момент инерции площади ее поперечного сечения, K — отнесенное на погонную единицу длины (1 см) сопротивление грунта оседанию, когда оседание равно 1, $F(x)$ — внешняя нагрузка балки, отнесенная на погонную единицу длины, y — прогиб балки, в точке коей абсцисса равна x . Абсциссы считаются от одного из концов балки, длина которой равна l .

Величина y кроме уравнения (1) должна удовлетворять граничным условиям, относящимся к роду закрепления концов балки, соответствующих значениям $x = 0$ и $x = l$.

Эти условия выражаются следующим образом: при $x = 0$ или при $x = l$ должно быть:

$$(2) \quad \begin{cases} \text{а) для конца заделанного: } y = 0 \text{ и } y' = 0 \\ \text{б) для конца подпертого: } y = 0 \text{ и } y'' = 0 \\ \text{в) для конца свободного: } y'' = 0 \text{ и } y''' = 0. \end{cases}$$

Для решения уравнения (1) и составления таблиц для разных частных случаев Хаяси полагает, согласно Шведлеру,

$$(3) \quad L = \sqrt[4]{\frac{4EI}{K}} \text{ и } \frac{x}{L} = \xi;$$

он приводит таким образом уравнение (1) к виду

$$(4) \quad \frac{d^4 y}{d\xi^4} + 4y = f(\xi)$$

и указывает составление его общего интеграла, но как мы увидим ниже эту основную выкладку до конца не доводит.

Для уравнения (4) характеристическое уравнение есть

$$(5) \quad s^4 + 4 = 0$$

и корни его суть:

$$(6) \quad \begin{cases} s_1 = -s_4 = 1 + i \\ s_2 = -s_3 = 1 - i, \end{cases}$$

причем как обыкновенно $i = \sqrt{-1}$. Соответственно этому Хаяси представляет общий интеграл уравнения (4) в виде

$$(7) \quad y = Z_1 e^{s_1 \xi} + Z_2 e^{s_2 \xi} + Z_3 e^{-s_2 \xi} + Z_4 e^{-s_1 \xi},$$

причем Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 суть функции переменной ξ , для определения которых Хаяси пишет известные уравнения лагранжевой методы изменения постоянных произвольных, а именно:

$$(8) \quad \begin{cases} e^{s_1 \xi} Z_1' + e^{s_2 \xi} Z_2' + e^{-s_2 \xi} Z_3' + e^{-s_1 \xi} Z_4' = 0 \\ e^{s_1 \xi} Z_1' - e^{s_2 \xi} Z_2' - e^{-s_2 \xi} Z_3' + e^{-s_1 \xi} Z_4' = 0 \\ s_1 e^{s_1 \xi} Z_1' + s_2 e^{s_2 \xi} Z_2' - s_2 e^{-s_2 \xi} Z_3' - s_1 e^{-s_1 \xi} Z_4' = 0 \\ -s_2 e^{s_1 \xi} Z_1' - s_1 e^{s_2 \xi} Z_2' + s_1 e^{-s_2 \xi} Z_3' + s_2 e^{-s_1 \xi} Z_4' = \frac{2}{K} f(x). \end{cases}$$

Но этой системы в общем виде он не решает, ограничиваясь рассмотрением некоторых простейших частных видов функции $f(x)$, т. е. действующей на балку нагрузки. Заметим здесь же, что ниже мы показываем, что для нахождения общего интеграла уравнения (4) нет надобности прибегать к лагранжевой методе, и этот общий интеграл находится весьма просто для любой функции $f(x)$ прерывной или непрерывной и даже для сосредоточенных сил, причем нет надобности прибегать к уравнениям сопряжения. Между

тем при обычном изложении этого вопроса Хаяси, а значит и всеми авторами, на которых он ссылается, не получающими выражения общего интеграла уравнения (4) при произвольной функции $f(x)$, приходится для каждой точки, где нагрузка претерпевает разрыв или где приложена сосредоточенная сила, составлять «условия сопряжения» различных участков, на которые этими точками длина балки подразделяется. Это приводит к необходимости решать для определения постоянных произвольных большое число уравнений первой степени со многими неизвестными, именно по четыре для каждого участка.

Чтобы это стало ясным, возьмем простейший случай: балки подпертой по концам и нагруженной сосредоточенной силой P , приложенной в точке, абсцисса коей $x = a$.

В этом случае, следуя Хаяси, балка подразделяется на два участка: 1-ый от $x = 0$ до $x = a$ и 2-ой от $x = a$ до $x = l$.

Так как распределенной по длине балки нагрузки нет, то $f(x) = 0$, и уравнения ее упругого равновесия будут:

для 1-го участка:

$$(9) \quad y_1^{IV} + 4y_1 = 0,$$

для 2-го участка

$$(10) \quad y_2^{IV} + 4y_2 = 0.$$

Пусть

$$\frac{l}{L} = \lambda, \quad \frac{a}{L} = \alpha.$$

Общий интеграл уравнения (9) по освобождении от мнимых знаков, как его обыкновенно пишут, будет

$$(11) \quad y_1 = (A_1 e^{\xi} + A_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (A_3 e^{\xi} + A_4 e^{-\xi}) \sin \xi$$

и для уравнения (10)

$$(12) \quad y_2 = (B_1 e^{\xi} + B_2 e^{-\xi}) \cos \xi + (B_3 e^{\xi} + B_4 e^{-\xi}) \sin \xi.$$

Так как конец $\xi = 0$ принадлежит первому участку, а конец $\xi = \lambda$ — второму, то граничные условия будут:

$$(13) \quad \begin{cases} y_1(0) = 0 & \text{и} & y_1''(0) = 0 \\ y_2(\lambda) = 0 & \text{и} & y_2''(\lambda) = 0. \end{cases}$$

Условия «сопряжения» обоих участков в точке $\xi = \alpha$ в этом случае будут

$$(14) \quad \begin{cases} y_1(\alpha) = y_2(\alpha); \quad y_1'(\alpha) = y_2'(\alpha); \quad y_1''(\alpha) = y_2''(\alpha) \\ \text{и} \quad y_1'''(\alpha) + \frac{P}{EI} = y_2'''(\alpha). \end{cases}$$

Очевидно, что в развернутом виде уравнения (13) и (14) будут уравнениями первой степени с *восемью* неизвестными $A_1 \dots B_4$, с довольно сложными при них коэффициентами, заключающими тригонометрические и показательные функции аргументов λ и α .

Если бы наша балка была нагружена например двумя сосредоточенными силами P_1 и P_2 , приложенными в точках $x = a$ и $x = b$, коим соответствуют значения

$$(15) \quad \xi_1 = \frac{a}{L} = \alpha \quad \text{и} \quad \xi_2 = \frac{b}{L} = \beta,$$

то пришлось бы, следуя Хаяси, рассматривать три участка:

$$(16) \quad \begin{cases} \text{1-ый от } \xi = 0 \text{ до } \xi = \alpha; & \text{2-ой от } \xi = \alpha \text{ до } \xi = \beta; \\ & \text{3-й от } \xi = \beta \text{ до } \xi = \lambda, \end{cases}$$

и три неизвестных функции y_1 , y_2 и y_3 , каждая из которых включает по четыре произвольных постоянных, для определения которых придется составить *двенадцать* уравнений с этими двенадцатью неизвестными, а именно: четыре уравнения для граничных условий, четыре для сопряжения в точке $\xi = \alpha$, и четыре для сопряжения в точке $\xi = \beta$.

Само собою понятно насколько сложно было бы общее решение такой системы и к каким громоздким формулам оно бы привело.

Примеры подобных систем и сложных формул даже для простейших случаев нагрузки можно видеть в книге Хаяси.

Такие системы и формулы ему приходится составлять и решать для каждого частного случая нагрузки. Между тем мы покажем, что для балки постоянного сечения условий сопряжения составлять незачем и для *всех* случаев нагрузки вопрос об определении постоянных произвольных приводится к решению системы *двух* уравнений первой степени с *двумя* неизвестными, значит самая сложная и длинная часть выкладок Хаяси отпадает целиком.