М. Свами

Графы, сети и алгоритмы

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
М11

М. Свами

М11 Графы, сети и алгоритмы / М. Свами – М.: Книга по Требованию, 2023. – 450 с.

ISBN 978-5-458-33391-7

В книге специалистов из Канады и Индии излагаются основы теории графов и её применение к сетям с сосредоточенными параметрами в электро- и вычислительной технике. Рассматриваются вопросы цикломатики, связности, устойчивости, вложимости и раскраски графов, что позволяет определить чувствительность сети, а также разработать эффективные алгоритмы анализа и оптимизации графов.Для специалистов по электротехническим сетям и вычислительной технике.

ISBN 978-5-458-33391-7

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Серия Книжный Ренессанс
www.samizday.ru/reprint

тоде смешанных переменных анализа цепей и теоретико-графовое доказательство свойства неусиления резистивных цепей. В гл. 12 рассматриваются ряд результатов теории резистивных цепей и метод реализации цикломатических матриц и матриц сечений. В заключительной главе этой части выводятся топологические формулы для функций цепи. Эти формулы очевидным образом следуют из свойств матриц графа, рассматриваемых в части I. В части II обсуждаются также теорема Теллежена, имеющая теоретико-графовую природу, и ее применение для вычисления чувствительности цепей. Удивительно, что такая важная теорема столько лет была лишена какого-либо внимания.

Часть III, в которой рассматриваются графовые алгоритмы, состоит из двух глав: в гл. 14 рассматривается алгоритм анализа графов, в гл. 15 — алгоритмы, связанные с оптимизационными задачами на графах. Главное внимание уделяется теории, на основе которой осуществляется построение, доказательство правильности и анализ нескольких графовых алгоритмов. Среди прочих обсуждаются алгоритмы сводимости графов потоков, доминаторов, кратчайших путей, паросочетаний, оптимальных деревьев бинарного поиска, потоков в сетях и оптимальных ветвлений. Приводятся также анализ Хопкрофта и Карпа алгоритма двудольного паросочетания и анализ Эдмондса и Карпа помечивающего алгоритма Форда—Фалкерсона. Здесь виден глубокий вклад в теорию графов, сделанный специалистами по вычислительной технике. Из рассмотрения опущено обсуждение NP-полных задач, однако эта тема выходит за рамки книги.

Что касается необходимой подготовки для чтения книги, то аспиранты, интересующиеся математикой, почти не будут испытывать затруднения при чтении материала частей I и III. Изложение материала в части II предполагает, что студенты уже знакомы с основным курсом по теории электрических цепей.

Содержание книги может использоваться в рамках различных курсов. Некоторые возможные наименования перечислены ниже.

1. Курс «Теория графов» для студентов, специализирующихся в математике, электротехнике и вычислительной технике, может основываться на гл. 1—10 и разд. 15.7. Для студентов, специализирующихся в вычислительной технике, некоторые разделы гл. 6 можно опустить и добавить разд. 14.3 и 14.4 по алгоритмам поиска в глубину.

2. Курс «Графы и электрические цепи» для аспирантов, специализирующихся в электротехнике, может основываться на гл. 1—7 и 11—13 (кроме разд. 3.2 и 5.6—5.8).

3. Курс «Алгоритмическая теория графов» для студентов, специализирующихся в математике, электротехнике и вычислительной технике, может основываться на материале части III и связанным с ним материале части I. Студентам, специализирующимся в вычислительной технике, разд. 14.5 и 14.6 необходимо проработать особенно тщательно, включая обсуждение алгоритмов для задач манипулирования множествами, что окажется полезным при рассмотрении алгоритмов сводимости графов программы и доминаторов.

Основываясь на этой книге, авторы читали в Университете Конкордии (г. Монреаль, Канада) курс «Теория графов» для студентов, специализирующихся в математике и электротехнике, и курс «Графы и электрические цепи» для аспирантов, специализирующихся в математике. Последний курс читался также вторым автором (К. Тхуласираманом) в Индийском технологическом институте (г. Мадрас, Индия).

Второй автор (К. Тхуласираман) использовал некоторый материал части I в курсе «Комбинаторика и теория графов» и материал части III в курсе «Построение и анализ алгоритмов» для аспирантов Индийского технологического института в Мадрасе, специализирующихся в вычислительной технике.

Мы выражаем нашу искреннюю благодарность д-ру П. К. Раджану из Университета штата Северная Дакота в Фарго и г-ну Р. Яякумару из Индийского технологического института в Мадрасе, которые прочли бóльшую часть рукописи книги, отметили некоторые упущения и ошибки и высказали много предложений, оказавшихся полезными при доработке книги. Мы благодарны также проф. Индийского технологического института в Мадрасе В. Г. К. Мурти и К. Р. Мутукришнану, проф. В. Рамачандрану и д-ру Л. Ройтману из Университета Конкордии в Монреале, д-ру К. Санкара Рао из Университета штата Северная Дакота в Фарго, д-ру Х. Нараянману из Индийского технологического института в Бомбее и г-дам А. Мохану и П. Нарандрану, студентам Индийского технологического института в Мадрасе за чтение различных частей рукописи и полезные комментарии, д-ру С. А. Чаудуму, Университет Мадураи (Мадураи, Индия), за указание на более простые доказательства результатов теории графов, д-ру В. Бейписвара Рао, Индийский технологический институт в Мадрасе, за разрешение на использование части его неопубликованной работы и проф. В. Хваталу из Университета Мак-Гилла в Монреале, Г. Киши из Токийского технологического института, Л. Ловацу (Венгрия), Р. Е. Тарьяну из Стэнфордского университета (Стэнфорд, шт. Калифорния) и К. Р. Партасарати и его аспирантам из Индийского технологического института в Мадрасе за полезные комментарии и предложения.

К. Тхуласираман выражает благодарность за помощь проф. В. Г. К. Мурти, под замечательным руководством которого он начал свои исследования.

Мы благодарим Университет Конкордии в Монреале за его огромную поддержку. К. Тхуласираман выражает благодарность Индийскому технологическому институту в Мадрасе и Университету Конкордии за их поддержку и ободрение, которые сделали возможным его участие в написании книги.

Мы благодарим наших жен Лейлу Свами и Санту Тхуласираман и детей за их терпение и понимание в течение всего периода нашей работы.

Наконец, нам бы хотелось поблагодарить Глорию Миллер и Камалу Рамачандран за прекрасную перепечатку рукописи.

Монреаль, Канада
Мадрас, Индия
Сентябрь, 1980

М. Н. С. Свами
К. Тхуласираман

Часть I. Теория графов

1. Основные понятия

Начнем изложение материала с введения нескольких основных понятий теории графов. Установим ряд результатов, основанных на этих понятиях. Эти результаты, иллюстрируя введенные понятия, служат также для приобщения читателя к определенным методам, часто используемым в доказательствах теорем теории графов.

1.1. Основные определения

Граф $G=(V, E)$ состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых *вершинами*, и конечного множества элементов, называемых *ребрами*. Каждое ребро определяется парой вершин. Если ребра графа определяются упорядоченными парами вершин, то G называется *направленным* или *ориентированным* графом. В противном случае G называется *ненаправленным* или *неориентированным* графом. В первых четырех главах книги рассматриваются ненаправленные графы.

Для обозначения вершин графа будем использовать символы $v_1, v_2, v_3, \ldots$, а для обозначения ребер — $e_1, e_2, e_3, \ldots$. Вершины v_i и v_j, определяющие ребро e_l, называются *концевыми вершинами* ребра e_l. В этом случае ребро e_l обозначается как $e_l=(v_i, v_j)$. Заметим, что в множестве E допускается более чем одно ребро с одинаковыми концевыми вершинами. Все ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *параллельными*. Кроме того, концевые вершины ребра не обязательно различны. Если $e_l=(v_i, v_i)$, то ребро e_l называется *петлей*. Граф называется *простым*, если он не содержит петель и параллельных ребер. Граф G является графом *порядка* n, если множество его вершин состоит из n элементов.

Граф, не имеющий ребер, называется пустым. Граф, не имеющий вершин (и, следовательно, ребер), называется нуль-графом.

Графически граф может быть представлен диаграммой, в которой вершина изображена точкой или кружком, а ребро — отрезком линии, соединяющим точки или кружки, соответствующие концевым вершинам ребра. Например, если $V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$ и $E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$, такие, что $e_1=(v_1, v_2)$, $e_2=(v_1, v_4)$, $e_3=(v_5, v_6)$, $e_4=(v_1, v_2)$, $e_5=(v_5, v_5)$, тогда граф $G=(V, E)$ представляется так, как изображено на рис. 1.1. В этом графе e_1 и e_4 — параллельные ребра, e_5 — петля. Говорят, что ребро *инцидентно* своим концевым вершинам. Две вершины смежны, если они являются концевыми вершинами некоторого ребра. Если два ребра имеют общую концевую вершину, они называются смежными.

Например, в графе на рис. 1.1 ребро e_1 инцидентно вершинам v_1 и v_2; v_1 и v_4 являются смежными вершинами, а e_1 и e_2 — смежными ребрами.

Число инцидентных вершине v_i ребер называется *степенью* вершины и обозначается $d(v_i)$. Иногда степень вершины называется также ее *валентностью*. Вершина степени 1 называется *висячей вершиной*. Единственное ребро, инцидентное висячей вершине, называется *висячим*. Вершина степени 0 называется *изолированной*. По определению петля при вершине v_i добавляет 2 в степень соответствующей вершины. Величины $\delta(G)$ и $\Delta(G)$ обозначают минимальную и максимальную степени вершины в G соответственно.

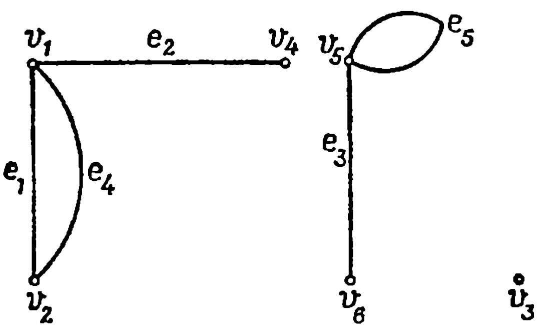

Рис. 1.1. Граф $G=(V, E)$.
$V=\{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6\}$;
$E=\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$.

В графе G на рис. 1.1 $d(v_1)=3$, $d(v_2)=2$, $d(v_3)=0$, $d(v_4)=1$, $d(v_5)=3$, $d(v_6)=1$.

Заметим, что v_3 — изолированная вершина, v_4 и v_6 — висячие вершины, e_2 — висячее ребро. Легко проверить, что сумма степеней вершин в данном графе G равна 10, тогда как число ребер равно 5. Таким образом, сумма степеней вершин графа G равна удвоенному числу ребер графа G и, следовательно, является четным числом. Более того, можно показать, что число вершин графа G нечетной степени также четно. Эти результаты свойственны не только графу на рис. 1.1. Они справедливы, как доказывается в следующих теоремах, для всех графов.

Теорема 1.1. Сумма степеней вершин графа G равна $2m$, где m — число ребер графа G.

Доказательство. Поскольку каждое ребро инцидентно двум вершинам, оно добавляет двойку к сумме степеней графа G. Следовательно, все ребра дают вместе сумму степеней $2m$.

Теорема 1.2. Число вершин нечетной степени в любом графе четно.

Доказательство. Пусть число вершин в графе G равно n. Не нарушая общности, предположим, что степени первых r вершин $v_1, v_2, \ldots, v_r$ четны, а степени оставшихся $n-r$ вершин нечетны. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} d(v_i) = \sum_{i=1}^{r} d(v_i) + \sum_{i=r+1}^{n} d(v_i). \tag{1.1}$$

По теореме 1.1 сумма в левой части выражения (1.1) четна. Первая сумма в правой части также четна, поскольку каждый член суммы четный. Следовательно, вторая сумма в правой части должна быть четной. Так как каждый член этой суммы нечетный, то число членов в сумме должно быть четным. Другими словами, число $n-r$ вершин нечетной степени должно быть четным.

1.2. Подграфы и дополнения

Рассмотрим граф $G=(V, E)$. $G'=(V', E')$ называется *подграфом* G, если V' и E' являются соответственно такими подмножествами V и E, что ребро (v_i, v_j) содержится в E' только в том случае, если v_i и v_j содержатся в V'. G' называется *собственным подграфом* G, если E' — собственное подмножество E или V' — собственное подмножество V. Если все вершины графа G присутствуют в подграфе G' графа G, тогда G' называется *остовным подграфом* G. Например,

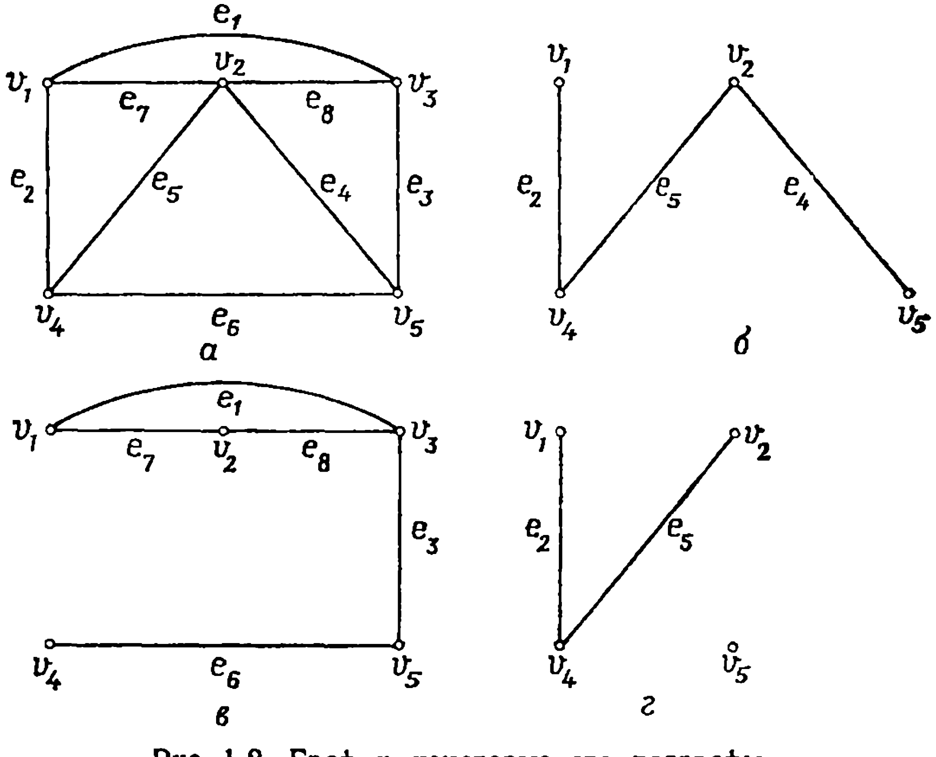

Рис. 1.2. Граф и некоторые его подграфы.
а)—граф G; б—подграф G'; в—подграф G''; г—подграф G'''.

рассмотрим показанный на рис. 1.2, *а* граф G. Граф G', изображенный на рис. 1.2, *б*, является подграфом G. Множество его вершин — $\{v_1, v_2, v_4, v_5\}$. Он является собственным подграфом G. Граф G'' на рис. 1.2, *в* является остовным подграфом G.

Некоторые из вершин подграфа могут быть изолированными. Например, показанный на рис. 1.2, *г* подграф G''' является подграфом с изолированной вершиной.

Если подграф $G'=(V', E')$ графа G не содержит изолированных вершин, тогда по определению подграфа каждая вершина V' является концевой вершиной некоторого ребра E. Таким образом, в этом случае E однозначно определяет V' и, следовательно, подграф G'. Подграф G' называется *порожденным подграфом графа G на множестве ребер E'* (или просто *реберно-порожденным подграфом* графа G) и обозначается как $\langle E' \rangle$.

Заметим, что множество вершин V' графа $\langle E' \rangle$ является наименьшим подмножеством V, содержащим все концевые вершины ребер в E'. Подграфы G' и G'' на рис. 1.2, *б*, *в* являются реберно-порожденными подграфами графа G на рис. 1.2, *а*, тогда как G''', показанный на рис. 1.2, *г*, не является реберно-порожденным подграфом.

Определим теперь вершинно-порожденный подграф. Пусть V' — подмножество множества вершин V графа $G=(V, E)$. Тогда подграф $G' = (V', E')$ называется *порожденным подграфом графа G на множестве вершин V'* (или просто *вершинно-порожденным подграфом графа G*), если E' является таким подмножеством E, что ребро $(v_i, v_j) \in E$ входит в E' тогда и только тогда, когда v_i и v_j входят в V'. Другими словами, если v_i и v_j принадлежат V', то каждое ребро E, имеющее в качестве концевых вершин v_i и v_j, должно входить в E'. Заметим, что в этом случае V' полностью определяет E' и, таким образом, подграф G'. Следовательно, вершинно-порожденный подграф $G'=(V', E')$ можно обозначить как $\langle V' \rangle$. Например, граф, представленный на рис. 1.3, является вершинно-порожденным подграфом графа G на рис. 1.2, *а*.

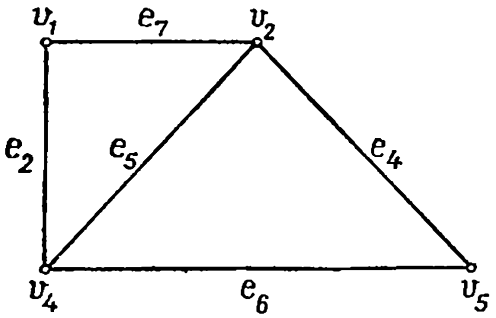

Рис. 1.3. Вершинно-порожденный подграф графа G, изображенного на рис. 1.2, *а*.

Заметим, что множество ребер E' вершинно-порожденного подграфа на множестве V' является таким наибольшим подмножеством E, что концевые вершины всех его ребер принадлежат V'.

Подграф G' графа G называется *максимальным подграфом* по отношению к некоторому свойству P, если G' обладает свойством P и G' не является собственным подграфом никакого другого подграфа графа G, обладающего свойством P.

Подграф G' графа G называется *минимальным подграфом графа G* по отношению к некоторому свойству P, если G' обладает свойством P и никакой подграф графа G, обладающий свойством P, не является собственным подграфом графа G'.

Максимальное и *минимальное подмножества* некоторого множества по отношению к свойству определяются аналогичным образом.

Например, множество вершин V' реберно-порожденного подграфа $\langle E' \rangle$ графа $G=(V, E)$ является минимальным подмножеством V, содержащим концевые вершины всех ребер E'. С другой стороны, множество ребер E' вершинно-порожденного подграфа $\langle V' \rangle$ явля-

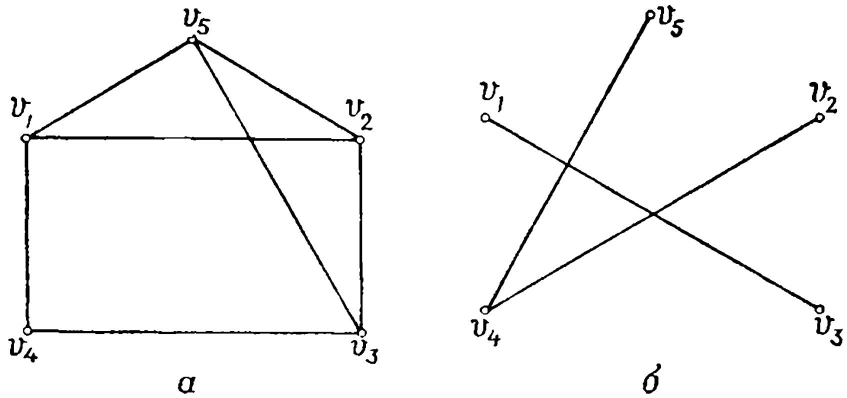

Рис. 1.4. Граф и его дополнение.
а—граф G; б—граф $\overline{G}$, дополняющий граф G.

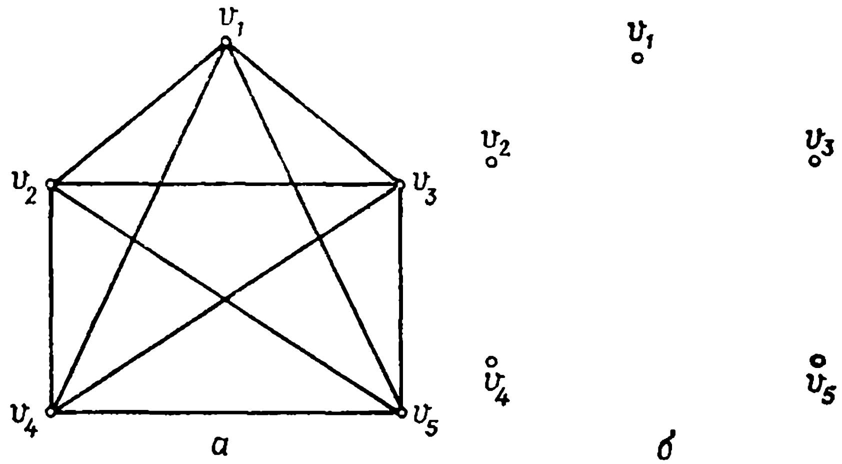

Рис. 1.5. Другой пример графа и его дополнения.
а—граф G; б—граф $\overline{G}$ дополняющий граф G.

ется таким максимальным подмножеством E, что концевые вершины всех его ребер принадлежат V'.

Позднее мы увидим, что «компонента» (разд. 1.4) графа G является максимальным «связным» подграфом графа G, а «остовное дерево» (гл. 2) связного графа G является минимальным «связным» остовным подграфом графа G.

Определим теперь понятие «дополнение графа».

Граф $\overline{G}=(V, E')$ называется дополнением простого графа $G=(V, E)$, если ребро (v_i, v_j) входит в E' в том и только в том случае, если оно не входит в E. Другими словами, две вершины v_i и v_j смежны в $\overline{G}$ тогда и только тогда, когда они не смежны в G. На рис. 1.4 представлены граф и его дополнение. В качестве другого примера рассмотрим граф, изображенный на рис. 1.5, *а*. В этом графе между каждой парой вершин имеется ребро. Следовательно, в дополнении $\overline{G}$ графа G вообще не будет ребер, т. е. $\overline{G}$ будет содержать только изолированные вершины. Граф $\overline{G}$ изображен на рис. 1.5, *б*.

Пусть $G'=(V', E')$ является подграфом графа $G=(V, E)$. Подграф $G''=(V, E-E')$ графа G называется дополнением G' в G. Например, подграф G'' на рис. 1.2 является дополнением G' в графе G.

Следующий пример иллюстрирует некоторые из рассмотренных понятий.

Предположим, что мы хотим доказать следующее утверждение:

В любой группе из шести человек трое либо обоюдно знакомы, либо обоюдно незнакомы.

Представляя людей вершинами графа, а наличие знакомства между ними — ребрами, соединяющими соответствующие вершины, можно увидеть, что приведенное выше утверждение можно сформулировать следующим образом:

В любом простом графе G с шестью вершинами имеются три либо попарно смежные, либо попарно несмежные вершины.

Используя определение дополнения графа, замечаем, что это утверждение эквивалентно следующему:

Для любого графа G с шестью вершинами справедливо, что G или $\overline{G}$ содержит три попарно смежные вершины.

Для доказательства этого проделаем следующее. Рассмотрим произвольную вершину v простого графа G с шестью вершинами. Заметим, что, если v не смежна с тремя вершинами в G, она должна быть смежна с тремя вершинами в $\overline{G}$. Поэтому, не нарушая общности, допустим, что v смежна в G с некоторыми тремя вершинами v_1, v_2, v_3. Если две из этих вершин, например v_1 и v_2, смежны в G, то вершины v, v_1 и v_2 попарно смежны в G, и утверждение доказано.

Если в G никакие две из трех вершин v_1, v_2 и v_3 не смежны, тогда они попарно несмежны. Следовательно, по определению дополнения вершины v_1, v_2 и v_3 попарно смежны в $\overline{G}$, и утверждение снова доказано.

1.3. Маршруты, цепи, пути и циклы

Маршрут в графе $G=(V, E)$ представляет собой конечную чередующуюся последовательность вершин и ребер $v_0, e_1, v_1, e_2, \ldots, v_{k-1}, e_k, v_k$, начинающуюся и кончающуюся на вершинах, причем v_{i-1} и v_i являются концевыми вершинами ребра e_i, $1 \leqslant i \leqslant k$. С другой стороны, маршрут можно рассматривать как конечную последовательность таких вершин $v_0, v_1, v_2, \ldots, v_k$, что (v_{i-1}, v_i), $1 \leqslant i \leqslant k$,— ребро графа G. Такой маршрут обычно называется v_0—v_k-маршрутом, а v_0 и v_k — *концевыми* или *терминальными вершинами* маршрута. Все другие вершины маршрута называются *внутренними*. Заметим, что ребра и вершины в маршруте могут появляться более одного раза.

Маршрут называется *открытым*, если его концевые вершины различны, в противном случае он называется *замкнутым*.

В графе на рис. 1.6 последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_9, v_5, e_7, v_3, e_{11}, v_6 является открытым маршрутом, а последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1 — замкнутым.

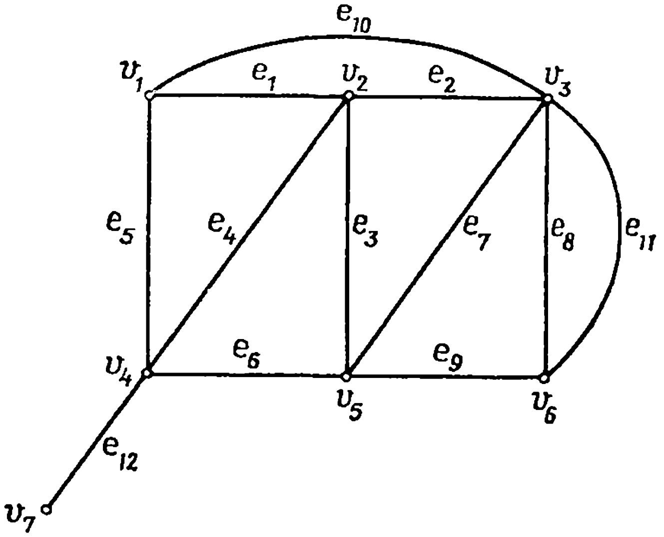

Рис. 1.6. Граф G.

Маршрут называется *цепью*, если все его ребра различны. Цепь называется *открытой*, если ее концевые вершины различны, в противном случае она называется *замкнутой*. На рис. 1.6 цепь v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_8, v_6, e_{11}, v_3 — открытая, а v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_7, v_5, e_3, v_2, e_4, v_4, e_5, v_1 — замкнутая.

Открытая цепь называется *путем*, если все ее вершины различны.

Замкнутая цепь называется *циклом*, если различны все ее вершины, за исключением концевых.

Например, на рис. 1.6 последовательность v_1, e_1, v_2, e_2, v_3 является путем, а последовательность v_1, e_1, v_2, e_3, v_5, e_6, v_4, e_5, v_1 — циклом.

Ребро графа G называется *циклическим*, если в графе G существует цикл, содержащий ребро. В противном случае ребро называется *нециклическим*. На рис. 1.6 все ребра, за исключением e_{12}, циклические.

Число ребер в пути называется *длиной пути*. Аналогично определяется *длина цикла*.

Необходимо указать следующие свойства путей и циклов.

1. Степень каждой неконцевой вершины пути равна 2, концевые вершины имеют степень, равную 1.

2. Каждая вершина цикла имеет степень 2 или другую четную степень. Обращение этого утверждения, а именно то, что ребра подграфа, в котором каждая вершина имеет четную степень, образуют цикл,— неверно. Более общий вопрос обсуждается в гл. 3.

3. Число вершин в пути на единицу больше числа ребер, тогда как в цикле число ребер равно числу вершин.

1.4. Связность и компоненты графа

Важным понятием в теории графов является связность. Две вершины v_i и v_j называются *связанными* в графе G, если в нем существует путь $v_i - v_j$. Вершина связана сама с собой.

Граф G называется *связным*, если в нем существует путь между каждой парой вершин. Например, граф, представленный на рис. 1.6, связный.

Рассмотрим несвязный граф $G=(V, E)$. Тогда множество вершин V графа G можно разбить [1] на такие подмножества $V_1, V_2, \ldots V_p$, что вершинно-порожденные подграфы $\langle V_i \rangle$, $i=1, 2, \ldots, p$, связны, и никакая вершина подмножества V_i не связана ни с какой

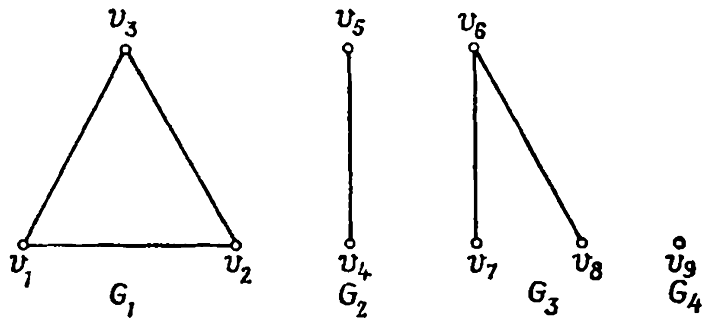

Рис. 1.7. Граф G с компонентами G_1, G_2, G_3 и G_4.

вершиной подмножества V_j, $j \neq i$. Подграфы $\langle V_i \rangle$, $i=1, 2, \ldots, p$, называются *компонентами* графа G. Легко видеть, что компонентой графа G является максимально связный подграф графа G, т. е. компонента графа G не является собственным подграфом любого другого связного подграфа графа G.

Например, граф G на рис. 1.7 не связен. Его четыре компоненты G_1, G_2, G_3, G_4 имеют множества вершин $\{v_1, v_2, v_3\}$, $\{v_4, v_5\}$, $\{v_6, v_7, v_8\}$, $\{v_9\}$ соответственно.

Отметим, что изолированную вершину также следует рассматривать как компоненту, поскольку по определению вершина связана сама с собой. Кроме того, следует отметить, что если граф G

[1] Говорят, что множество V *разбито* на подмножества $V_1, V_2, \ldots, V_p$, если $V_1 \cup V_2 \cup \ldots \cup V_p = V$ и $V_i \cap V_j = \varnothing$ для любого i и j, $i \neq j$. $\{V_1, V_2, \ldots, V_p\}$ называется *разбиением* V.