

**М.Я. Выгодский**

**Справочник по высшей  
математике**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2  
ББК 74.27  
М11

М11 **М.Я. Выгодский**  
Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский – М.: Книга по Требо-  
ванию, 2013. – 872 с.

**ISBN 978-5-458-25457-1**

**ISBN 978-5-458-25457-1**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

[www.samizday.ru/reprint](http://www.samizday.ru/reprint)



|        |                                                                            |     |
|--------|----------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 90   | Взаимная связь коллинеарных векторов (деление вектора на вектор)           | 124 |
| § 91   | Проекция точки на ось                                                      | 124 |
| § 92   | Проекция вектора на ось                                                    | 125 |
| § 93   | Основные теоремы о проекциях вектора                                       | 127 |
| § 94   | Прямоугольная система координат в пространстве                             | 129 |
| § 95   | Координаты точки                                                           | 130 |
| § 96   | Координаты вектора                                                         | 131 |
| § 97   | Выражения вектора через компоненты и через координаты                      | 132 |
| § 98   | Действия над векторами, заданными своими координатами                      | 132 |
| § 99   | Выражение вектора через радиус-векторы его начала и конца                  | 133 |
| § 100  | Длина вектора. Расстояние между двумя точками                              | 133 |
| § 101  | Угол между осью координат и вектором                                       | 134 |
| § 102  | Признак коллинеарности (параллельности) векторов                           | 135 |
| § 103  | Деление отрезка в данном отношении                                         | 135 |
| § 104  | Скалярное произведение двух векторов                                       | 136 |
| § 104а | Физический смысл скалярного произведения                                   | 137 |
| § 105  | Свойства скалярного произведения                                           | 138 |
| § 106  | Скалярные произведения основных векторов                                   | 139 |
| § 107  | Выражение скалярного произведения через координаты сомножителей            | 140 |
| § 108  | Условие перпендикулярности векторов                                        | 141 |
| § 109  | Угол между векторами                                                       | 141 |
| § 110  | Правая и левая системы трех векторов                                       | 142 |
| § 111  | Векторное произведение двух векторов                                       | 143 |
| § 112  | Свойства векторного произведения                                           | 145 |
| § 113  | Векторные произведения основных векторов                                   | 146 |
| § 114  | Выражение векторного произведения через координаты сомножителей            | 147 |
| § 115  | Компланарные векторы                                                       | 149 |
| § 116  | Смешанное произведение                                                     | 149 |
| § 117  | Свойства смешанного произведения                                           | 150 |
| § 118  | Определитель третьего порядка                                              | 151 |
| § 119  | Выражение смешанного произведения через координаты сомножителей            | 154 |
| § 120  | Признак компланарности в координатной форме                                | 154 |
| § 121  | Объем параллелепипеда                                                      | 155 |
| § 122  | Двойное векторное произведение                                             | 156 |
| § 123  | Уравнение плоскости                                                        | 156 |
| § 124  | Особые случаи положения плоскости относительно системы координат           | 157 |
| § 125  | Условие параллельности плоскостей                                          | 158 |
| § 126  | Условие перпендикулярности плоскостей                                      | 159 |
| § 127  | Угол между двумя плоскостями                                               | 159 |
| § 128  | Плоскость, проходящая через данную точку параллельно данной плоскости      | 160 |
| § 129  | Плоскость, проходящая через три точки                                      | 160 |
| § 130  | Отрезки на осях                                                            | 161 |
| § 131  | Уравнение плоскости в отрезках                                             | 161 |
| § 132  | Плоскость, проходящая через две точки перпендикулярно к данной плоскости   | 162 |
| § 133  | Плоскость, проходящая через данную точку перпендикулярно к двум плоскостям | 163 |
| § 134  | Точка пересечения трех плоскостей                                          | 163 |
| § 135  | Взаимное расположение плоскости и пары точек                               | 165 |
| § 136  | Расстояние от точки до плоскости                                           | 165 |
| § 137  | Полярные параметры плоскости                                               | 166 |
| § 138  | Нормальное уравнение плоскости                                             | 167 |
| § 139  | Приведение уравнения плоскости к нормальному виду                          | 168 |

|                                                                                                           |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 140. Уравнения прямой в пространстве .....                                                              | 170 |
| § 141. Условие, при котором два уравнения первой степени<br>представляют прямую .....                     | 171 |
| § 142. Пересечение прямой с плоскостью .....                                                              | 172 |
| § 143. Направляющий вектор .....                                                                          | 174 |
| § 144. Углы между прямой и осями координат .....                                                          | 175 |
| § 145. Угол между двумя прямыми .....                                                                     | 175 |
| § 146. Угол между прямой и плоскостью .....                                                               | 176 |
| § 147. Условия параллельности и перпендикулярности прямой<br>и плоскости .....                            | 177 |
| § 148. Пучок плоскостей .....                                                                             | 177 |
| § 149. Проекция прямой на координатные плоскости .....                                                    | 179 |
| § 150. Симметричные уравнения прямой .....                                                                | 180 |
| § 151. Приведение уравнений прямой к симметричному виду ...                                               | 182 |
| § 152. Параметрические уравнения прямой .....                                                             | 183 |
| § 153. Пересечение плоскости с прямой, заданной параметрически                                            | 184 |
| § 154. Уравнения прямой, проходящей через две данные точки .                                              | 185 |
| § 155. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку<br>перпендикулярно к данной прямой .....        | 185 |
| § 156. Уравнение прямой, проходящей через данную точку пер-<br>пендикулярно к данной плоскости .....      | 185 |
| § 157. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и<br>данную прямую .....                        | 186 |
| § 158. Уравнение плоскости, проходящей через данную точку и<br>параллельной двум данным прямым .....      | 187 |
| § 159. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую<br>и параллельной другой данной прямой .....   | 187 |
| § 160. Уравнение плоскости, проходящей через данную прямую<br>и перпендикулярной к данной плоскости ..... | 188 |
| § 161. Уравнения перпендикуляра, опущенного из данной точки<br>на данную прямую .....                     | 188 |
| § 162. Длина перпендикуляра, опущенного из данной точки на<br>данную прямую .....                         | 190 |
| § 163. Условие, при котором две прямые пересекаются или лежат<br>в одной плоскости .....                  | 191 |
| § 164. Уравнения общего перпендикуляра к двум данным пря-<br>мым .....                                    | 192 |
| § 165. Кратчайшее расстояние между двумя прямыми .....                                                    | 194 |
| § 165а. Правые и левые пары прямых .....                                                                  | 195 |
| § 166. Преобразование координат .....                                                                     | 197 |
| § 167. Уравнение поверхности .....                                                                        | 198 |
| § 168. Цилиндрические поверхности, у которых образующие па-<br>раллельны одной из осей координат .....    | 198 |
| § 169. Уравнения линий .....                                                                              | 200 |
| § 170. Проекция линии на координатную плоскость .....                                                     | 201 |
| § 171. Алгебраические поверхности и их порядок .....                                                      | 203 |
| § 172. Сфера .....                                                                                        | 204 |
| § 173. Эллипсоид .....                                                                                    | 204 |
| § 174. Однополостный гиперболоид .....                                                                    | 208 |
| § 175. Двуполостный гиперболоид .....                                                                     | 210 |
| § 176. Конус второго порядка .....                                                                        | 211 |
| § 177. Эллиптический параболоид .....                                                                     | 213 |
| § 178. Гиперболический параболоид .....                                                                   | 214 |
| § 179. Перечень поверхностей второго порядка .....                                                        | 216 |
| § 180. Прямолинейные образующие поверхностей второго по-<br>рядка .....                                   | 219 |
| § 181. Поверхности вращения .....                                                                         | 220 |
| § 182. Определители второго и третьего порядка .....                                                      | 221 |
| § 183. Определители высших порядков .....                                                                 | 224 |
| § 184. Свойства определителей .....                                                                       | 226 |

|                                                                                  |     |
|----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 185. Практический прием вычисления определителей .....                         | 229 |
| § 186. Применение определителей к исследованию и решению системы уравнений ..... | 231 |
| § 187. Два уравнения с двумя неизвестными .....                                  | 232 |
| § 188. Два уравнения с тремя неизвестными .....                                  | 233 |
| § 189. Однородная система двух уравнений с тремя неизвестными .....              | 235 |
| § 190. Три уравнения с тремя неизвестными .....                                  | 237 |
| § 190а. Система $n$ уравнений с $n$ неизвестными .....                           | 240 |

## ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 191. Вводные замечания .....                                              | 243 |
| § 192. Рациональные числа .....                                             | 244 |
| § 193. Действительные (вещественные) числа .....                            | 244 |
| § 194. Числовая ось .....                                                   | 246 |
| § 195. Переменные и постоянные величины .....                               | 246 |
| § 196. Функция .....                                                        | 247 |
| § 197. Способы задания функции .....                                        | 249 |
| § 198. Область определения функции .....                                    | 251 |
| § 199. Промежуток .....                                                     | 253 |
| § 200. Классификация функций .....                                          | 254 |
| § 201. Основные элементарные функции .....                                  | 255 |
| § 202. Обозначение функции .....                                            | 256 |
| § 203. Предел последовательности .....                                      | 257 |
| § 204. Предел функции .....                                                 | 259 |
| § 205. Определение предела функции .....                                    | 260 |
| § 206. Предел постоянной величины .....                                     | 261 |
| § 207. Бесконечно малая величина .....                                      | 261 |
| § 208. Бесконечно большая величина .....                                    | 262 |
| § 209. Связь между бесконечно большими и бесконечно малыми величинами ..... | 263 |
| § 210. Ограниченные величины .....                                          | 263 |
| § 211. Расширение понятия предела .....                                     | 264 |
| § 212. Основные свойства бесконечно малых величин .....                     | 265 |
| § 213. Основные теоремы о пределах .....                                    | 266 |
| § 214. Число $e$ .....                                                      | 268 |
| § 215. Предел $\frac{\sin x}{x}$ при $x \rightarrow 0$ .....                | 269 |
| § 216. Эквивалентные бесконечно малые величины .....                        | 269 |
| § 217. Сравнение бесконечно малых величин .....                             | 271 |
| § 217а. Приращение переменной величины .....                                | 273 |
| § 218. Непрерывность функции в точке .....                                  | 273 |
| § 219. Свойства функций, непрерывных в точке .....                          | 274 |
| § 219а. Односторонний предел; скачок функции .....                          | 275 |
| § 220. Непрерывность функции на замкнутом промежутке .....                  | 276 |
| § 221. Свойства функций, непрерывных на замкнутом промежутке .....          | 276 |

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

|                                                       |     |
|-------------------------------------------------------|-----|
| § 222. Вводные замечания .....                        | 279 |
| § 223. Скорость .....                                 | 280 |
| § 224. Определение производной функции .....          | 281 |
| § 225. Касательная .....                              | 282 |
| § 226. Производные некоторых простейших функций ..... | 284 |
| § 227. Свойства производной .....                     | 285 |

|                                                                       |     |
|-----------------------------------------------------------------------|-----|
| § 228. Дифференциал .....                                             | 285 |
| § 229. Механическое истолкование дифференциала .....                  | 287 |
| § 230. Геометрическое истолкование дифференциала .....                | 287 |
| § 231. Дифференцируемые функции .....                                 | 288 |
| § 232. Дифференциалы некоторых простейших функций .....               | 290 |
| § 233. Свойства дифференциала .....                                   | 291 |
| § 234. Инвариантность выражения $f'(x) dx$ .....                      | 291 |
| § 235. Выражение производной через дифференциалы .....                | 292 |
| § 236. Функция от функции (сложная функция) .....                     | 293 |
| § 237. Дифференциал сложной функции .....                             | 293 |
| § 238. Производная сложной функции .....                              | 294 |
| § 239. Дифференцирование произведения .....                           | 295 |
| § 240. Дифференцирование частного (дроби) .....                       | 296 |
| § 241. Обратная функция .....                                         | 297 |
| § 242. Натуральные логарифмы .....                                    | 298 |
| § 243. Дифференцирование логарифмической функции .....                | 300 |
| § 244. Логарифмическое дифференцирование .....                        | 301 |
| § 245. Дифференцирование показательной функции .....                  | 302 |
| § 246. Дифференцирование тригонометрических функций .....             | 303 |
| § 247. Дифференцирование обратных тригонометрических функций .....    | 304 |
| § 247а. Несколько поучительных примеров .....                         | 305 |
| § 248. Дифференциал в приближенных вычислениях .....                  | 307 |
| § 249. Применение дифференциала к оценке погрешности формул .....     | 309 |
| § 250. Дифференцирование неявных функций .....                        | 311 |
| § 251. Параметрическое задание линии .....                            | 313 |
| § 252. Параметрическое задание функции .....                          | 315 |
| § 253. Циклоида .....                                                 | 316 |
| § 254. Уравнение касательной к плоской линии .....                    | 318 |
| § 254а. Касательные к кривым второго порядка .....                    | 319 |
| § 255. Уравнение нормали .....                                        | 320 |
| § 256. Производные высших порядков .....                              | 321 |
| § 257. Механический смысл второй производной .....                    | 322 |
| § 258. Дифференциалы высших порядков .....                            | 322 |
| § 259. Выражение высших производных через дифференциалы .....         | 325 |
| § 260. Высшие производные от функций, заданных параметрически .....   | 326 |
| § 261. Высшие производные неявных функций .....                       | 326 |
| § 262. Правило Лейбница .....                                         | 328 |
| § 263. Теорема Ролля .....                                            | 329 |
| § 264. Теорема Лагранжа о среднем значении .....                      | 330 |
| § 265. Формула конечных приращений .....                              | 333 |
| § 266. Обобщенная теорема о среднем значении (Коши) .....             | 334 |
| § 267. Раскрытие неопределенностей вида $\frac{0}{0}$ .....           | 336 |
| § 268. Раскрытие неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ .....  | 339 |
| § 269. Неопределенные выражения других видов .....                    | 340 |
| § 270. Исторические сведения о формулах Тейлора .....                 | 342 |
| § 271. Формула Тейлора .....                                          | 346 |
| § 272. Применение формулы Тейлора к вычислению значений функции ..... | 348 |
| § 273. Возрастание и убывание функции .....                           | 346 |
| § 274. Признаки возрастания и убывания функции в точке .....          | 357 |
| § 274а. Признаки возрастания и убывания функции в промежутке .....    | 358 |
| § 275. Максимум и минимум .....                                       | 359 |
| § 276. Необходимое условие максимума и минимума .....                 | 360 |



|      |                                                     |     |
|------|-----------------------------------------------------|-----|
| 277. | Первое достаточное условие максимума и минимума     | 361 |
| 278. | Правило разыскания максимумов и минимумов           | 362 |
| 279. | Второе достаточное условие максимума и минимума     | 365 |
| 280. | Разыскание наибольших и наименьших значений функции | 368 |
| 281. | Выпуклость плоских кривых, точка перегиба           | 374 |
| 282. | Стороны выпуклости                                  | 375 |
| 283. | Правило для разыскания точек перегиба               | 376 |
| 284. | Асимптоты                                           | 377 |
| 285. | Разыскание асимптот, параллельных координатным осям | 378 |
| 286. | Разыскание асимптот, не параллельных оси ординат    | 380 |
| 287. | Приемы построения графиков                          | 383 |
| 288. | Решение уравнений. Общие замечания                  | 386 |
| 289. | Решение уравнений. Способ хорд                      | 388 |
| 290. | Решение уравнений. Способ касательных               | 390 |
| 291. | Комбинированный метод хорд и касательных            | 392 |

## ИНТЕГРАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

|         |                                                                      |     |
|---------|----------------------------------------------------------------------|-----|
| 292.    | Вводные замечания                                                    | 395 |
| 293.    | Первообразная функция                                                | 397 |
| 294.    | Неопределенный интеграл                                              | 398 |
| 295.    | Геометрическое истолкование интегрирования                           | 400 |
| 296.    | Вычисление постоянной интегрирования по начальным данным             | 403 |
| 297.    | Свойства неопределенного интеграла                                   | 404 |
| 298.    | Таблица интегралов                                                   | 405 |
| 299.    | Непосредственное интегрирование                                      | 407 |
| 300.    | Способ подстановки (интегрирование через вспомогательную переменную) | 408 |
| 301.    | Интегрирование по частям                                             | 412 |
| 302.    | Интегрирование некоторых тригонометрических выражений                | 415 |
| 303.    | Тригонометрические подстановки                                       | 418 |
| 304.    | Рациональные функции                                                 | 420 |
| 304a.   | Исключение целой части                                               | 420 |
| 305.    | О приемах интегрирования рациональных дробей                         | 421 |
| 306.    | Интегрирование простейших рациональных дробей                        | 422 |
| 307.    | Интегрирование рациональных функций (общий метод)                    | 426 |
| 308.    | О разложении многочлена на множители                                 | 433 |
| 309.    | Об интегрируемости в элементарных функциях                           | 434 |
| 310.    | Некоторые интегралы, зависящие от радикалов                          | 435 |
| 311.    | Интеграл от биномиального дифференциала                              | 436 |
| § 312.  | Интегралы вида $\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}) dx$                  | 438 |
| § 313.  | Интегралы вида $\int R(\sin x, \cos x) dx$                           | 440 |
| § 314.  | Определенный интеграл                                                | 441 |
| § 315.  | Свойства определенного интеграла                                     | 445 |
| § 316.  | Геометрическое истолкование определенного интеграла                  | 447 |
| § 317.  | Механическое истолкование определенного интеграла                    | 448 |
| § 318.  | Оценка определенного интеграла                                       | 450 |
| § 318a. | Неравенство Буниковского                                             | 451 |
| § 319.  | Теорема о среднем интегрального исчисления                           | 451 |
| § 320.  | Определенный интеграл как функция верхнего предела                   | 453 |
| § 321.  | Дифференциал интеграла                                               | 455 |
| § 322.  | Интеграл дифференциала. Формула Ньютона—Лейбница                     | 457 |
| § 323.  | Вычисление определенного интеграла с помощью неопределенного         | 459 |

|                                                                  |     |
|------------------------------------------------------------------|-----|
| 324. Определенное интегрирование по частям .....                 | 461 |
| 325. Способ подстановки в определенном интеграле .....           | 462 |
| 326. О несобственных интегралах .....                            | 466 |
| 327. Интегралы с бесконечными пределами .....                    | 467 |
| 328. Интеграл от функции, имеющей разрыв .....                   | 472 |
| 329. О приближенном вычислении интеграла .....                   | 475 |
| 330. Формулы прямоугольников .....                               | 478 |
| 331. Формула трапеций .....                                      | 480 |
| 332. Формула Симпсона (параболических трапеций) .....            | 481 |
| 333. Площади фигур, отнесенных к прямоугольным координатам ..... | 483 |
| 334. Схема применения определенного интеграла .....              | 485 |
| 335. Площади фигур, отнесенных к полярным координатам .....      | 487 |
| 336. Объем тела по поперечным сечениям .....                     | 489 |
| 337. Объем тела вращения .....                                   | 490 |
| 338. Длина дуги плоской линии .....                              | 491 |
| 339. Дифференциал дуги .....                                     | 493 |
| 340. Длина дуги и ее дифференциал в полярных координатах .....   | 494 |
| 341. Площадь поверхности вращения .....                          | 496 |

### ОСНОВНЫЕ СВЕДЕНИЯ О ПЛОСКИХ И ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ЛИНИЯХ

|                                                                                   |     |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 342. Кривизна .....                                                               | 498 |
| 343. Центр, радиус и круг кривизны плоской линии .....                            | 499 |
| 344. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны плоской линии .....          | 500 |
| 345. Эволюта плоской линии .....                                                  | 504 |
| 346. Свойства эволюты плоской линии .....                                         | 505 |
| 347. Развертка (эвольвента) плоской линии .....                                   | 506 |
| 348. Параметрическое задание пространственной линии .....                         | 507 |
| 349. Винтовая линия .....                                                         | 509 |
| 350. Длина дуги пространственной линии .....                                      | 510 |
| 351. Касательная к пространственной линии .....                                   | 511 |
| 352. Нормальная плоскость .....                                                   | 513 |
| 353. Вектор-функция скалярного аргумента .....                                    | 514 |
| 354. Предел вектор-функции .....                                                  | 515 |
| 355. Производная вектор-функции .....                                             | 516 |
| 356. Дифференциал вектор-функции .....                                            | 517 |
| 357. Свойства производной и дифференциала вектор-функции .....                    | 518 |
| 358. Соприкасающаяся плоскость .....                                              | 520 |
| 359. Главная нормаль. Сопутствующий трехгранник .....                             | 522 |
| 360. Взаимное расположение линии и плоскости .....                                | 523 |
| 361. Основные векторы сопутствующего трехгранника .....                           | 524 |
| 362. Центр, ось и радиус кривизны пространственной линии .....                    | 525 |
| 363. Формулы для кривизны, радиуса и центра кривизны пространственной линии ..... | 526 |
| 364. О знаке кривизны .....                                                       | 528 |
| 365. Кручение .....                                                               | 529 |

### РЯДЫ

|                                                |     |
|------------------------------------------------|-----|
| 366. Вводные замечания .....                   | 532 |
| 367. Определение ряда .....                    | 532 |
| 368. Сходящиеся и расходящиеся ряды .....      | 533 |
| 369. Необходимое условие сходимости ряда ..... | 535 |
| 370. Остаток ряда .....                        | 537 |

|                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 371. Простейшие действия над рядами .....                                     | 539 |
| § 372. Положительные ряды .....                                                 | 540 |
| § 373. Сравнение положительных рядов .....                                      | 541 |
| § 374. Признак Даламбера для положительного ряда .....                          | 543 |
| § 375. Интегральный признак сходимости .....                                    | 545 |
| § 376. Знакопеременный ряд. Признак Лейбница .....                              | 547 |
| § 377. Абсолютная и условная сходимость .....                                   | 548 |
| § 378. Признак Даламбера для произвольного ряда .....                           | 550 |
| § 379. Перестановка членов ряда .....                                           | 550 |
| § 380. Группировка членов ряда .....                                            | 551 |
| § 381. Умножение рядов .....                                                    | 553 |
| § 382. Деление рядов .....                                                      | 556 |
| § 383. Функциональный ряд .....                                                 | 557 |
| § 384. Область сходимости функционального ряда .....                            | 558 |
| § 385. О равномерной и неравномерной сходимости .....                           | 560 |
| § 386. Определение равномерной и неравномерной сходимости .....                 | 562 |
| § 387. Геометрическое истолкование равномерной и неравномерной сходимости ..... | 563 |
| § 388. Признак равномерной сходимости; правильные ряды ....                     | 564 |
| § 389. Непрерывность суммы ряда .....                                           | 565 |
| § 390. Интегрирование рядов .....                                               | 566 |
| § 391. Дифференцирование рядов .....                                            | 570 |
| § 392. Степенной ряд .....                                                      | 571 |
| § 393. Промежуток и радиус сходимости степенного ряда .....                     | 572 |
| § 394. Разыскание радиуса сходимости .....                                      | 573 |
| § 395. Область сходимости ряда, расположенного по степеням $x - x_0$ .....      | 575 |
| § 396. Теорема Абеля .....                                                      | 576 |
| § 397. Действия со степенными рядами .....                                      | 576 |
| § 398. Дифференцирование и интегрирование степенного ряда .....                 | 579 |
| § 399. Ряд Тейлора .....                                                        | 581 |
| § 400. Разложение функции в степенной ряд .....                                 | 582 |
| § 401. Разложение элементарных функций в степенные ряды ...                     | 585 |
| § 402. Применение рядов к вычислению интегралов .....                           | 589 |
| § 403. Гиперболические функции .....                                            | 591 |
| § 404. Обратные гиперболические функции .....                                   | 594 |
| § 405. Происхождение наименований гиперболических функций .....                 | 596 |
| § 406. О комплексных числах .....                                               | 597 |
| § 407. Комплексная функция действительного аргумента .....                      | 598 |
| § 408. Производная комплексной функции .....                                    | 600 |
| § 409. Возведение положительного числа в комплексную степень .....              | 601 |
| § 410. Формула Эйлера .....                                                     | 602 |
| § 411. Тригонометрический ряд .....                                             | 603 |
| § 412. Исторические сведения о тригонометрических рядах ....                    | 604 |
| § 413. Ортогональность системы функций $\cos nx$ , $\sin nx$ .....              | 605 |
| § 414. Формулы Эйлера—Фурье .....                                               | 607 |
| § 415. Ряд Фурье .....                                                          | 609 |
| § 416. Ряд Фурье для непрерывной функции .....                                  | 610 |
| § 417. Ряд Фурье для четной и нечетной функции .....                            | 614 |
| § 418. Ряд Фурье для разрывной функции .....                                    | 618 |

## ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ И ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ АРГУМЕНТОВ

|                                                            |     |
|------------------------------------------------------------|-----|
| § 419. Функция двух аргументов .....                       | 622 |
| § 420. Функция трех и большего числа аргументов .....      | 623 |
| § 421. Способы задания функций нескольких аргументов ..... | 624 |

|      |                                                                                          |     |
|------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 422. | Предел функции нескольких аргументов .....                                               | 627 |
| 423. | О порядке малости функции нескольких аргументов ....                                     | 628 |
| 424. | Непрерывность функции нескольких аргументов .....                                        | 630 |
| 425. | Частные производные .....                                                                | 631 |
| 426. | Геометрическое истолкование частных производных для случая двух аргументов .....         | 632 |
| 427. | Полное и частное приращение .....                                                        | 632 |
| 428. | Частный дифференциал .....                                                               | 633 |
| 429. | О выражении частной производной через дифференциал .....                                 | 634 |
| 430. | Полный дифференциал .....                                                                | 635 |
| 431. | Геометрическое истолкование полного дифференциала (случай двух аргументов) .....         | 636 |
| 432. | Инвариантность выражения $\int_x dx + \int_y dy + \int_z dz$ полного дифференциала ..... | 637 |
| 433. | Техника дифференцирования .....                                                          | 638 |
| 434. | Дифференцируемые функции .....                                                           | 639 |
| 435. | Касательная плоскость и нормаль к поверхности .....                                      | 640 |
| 436. | Уравнение касательной плоскости .....                                                    | 641 |
| 437. | Уравнения нормали .....                                                                  | 642 |
| 438. | Дифференцирование сложной функции .....                                                  | 643 |
| 439. | Замена прямоугольных координат полярными .....                                           | 644 |
| 440. | Формулы для производных сложной функции .....                                            | 644 |
| 441. | Полная производная .....                                                                 | 645 |
| 442. | Дифференцирование неявной функции нескольких переменных .....                            | 646 |
| 443. | Частные производные высших порядков .....                                                | 649 |
| 444. | Полные дифференциалы высших порядков .....                                               | 651 |
| 445. | Техника повторного дифференцирования .....                                               | 653 |
| 446. | Условное обозначение дифференциалов .....                                                | 653 |
| 447. | Формула Тейлора для функции нескольких аргументов .....                                  | 654 |
| 448. | Экстремум (максимум и минимум) функции нескольких аргументов .....                       | 656 |
| 449. | Правило разыскания экстремума .....                                                      | 657 |
| 450. | Достаточные условия экстремума (случай двух аргументов) .....                            | 659 |
| 451. | Двойной интеграл .....                                                                   | 660 |
| 452. | Геометрическое истолкование двойного интеграла .....                                     | 661 |
| 453. | Свойства двойного интеграла .....                                                        | 662 |
| 454. | Оценка двойного интеграла .....                                                          | 663 |
| 455. | Вычисление двойного интеграла (простейший случай) .....                                  | 663 |
| 456. | Вычисление двойного интеграла (общий случай) .....                                       | 667 |
| 457. | Функция точки .....                                                                      | 670 |
| 458. | Выражение двойного интеграла через полярные координаты .....                             | 671 |
| 459. | Площадь куска поверхности .....                                                          | 675 |
| 460. | Тройной интеграл .....                                                                   | 677 |
| 461. | Вычисление тройного интеграла (простейший случай) .....                                  | 678 |
| 462. | Вычисление тройного интеграла (общий случай) .....                                       | 679 |
| 463. | Цилиндрические координаты .....                                                          | 681 |
| 464. | Выражение тройного интеграла через цилиндрические координаты .....                       | 681 |
| 465. | Сферические координаты .....                                                             | 682 |
| 466. | Выражение тройного интеграла через сферические координаты .....                          | 682 |
| 467. | Схема применения двойного и тройного интеграла .....                                     | 684 |
| 468. | Момент инерции .....                                                                     | 685 |
| 469. | Выражение некоторых физических и геометрических величин через двойные интегралы .....    | 687 |

|                                                                                              |     |
|----------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| § 470. Выражение некоторых физических и геометрических величин через тройные интегралы ..... | 689 |
| 471. Криволинейный интеграл .....                                                            | 691 |
| 472. Механический смысл криволинейного интеграла .....                                       | 693 |
| 473. Вычисление криволинейного интеграла .....                                               | 693 |
| 474. Формула Грина .....                                                                     | 695 |
| 475. Условие, при котором криволинейный интеграл не зависит от пути .....                    | 696 |
| § 476. Другая форма условия предыдущего параграфа .....                                      | 698 |

## ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

|                                                                                             |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| 477. Основные понятия .....                                                                 | 701 |
| 478. Уравнение первого порядка .....                                                        | 703 |
| 479. Геометрическое истолкование уравнения первого порядка .....                            | 703 |
| 480. Изоклины .....                                                                         | 706 |
| 481. Частное и общее решение уравнения первого порядка .....                                | 707 |
| 482. Уравнения с разделенными переменными .....                                             | 708 |
| 483. Разделение переменных. Особое решение .....                                            | 710 |
| 484. Уравнение в полных дифференциалах .....                                                | 711 |
| 484а. Интегрирующий множитель .....                                                         | 712 |
| 485. Однородное уравнение .....                                                             | 713 |
| 486. Линейное уравнение первого порядка .....                                               | 715 |
| 487. Уравнение Клеро .....                                                                  | 718 |
| 488. Огибающая .....                                                                        | 719 |
| 489. Об интегрируемости дифференциальных уравнений .....                                    | 721 |
| 490. Приближенное интегрирование уравнений первого порядка по методу Эйлера .....           | 721 |
| 491. Интегрирование дифференциальных уравнений с помощью рядов .....                        | 723 |
| 492. О составлении дифференциальных уравнений .....                                         | 725 |
| 493. Уравнение второго порядка .....                                                        | 729 |
| 494. Уравнение $n$ -го порядка .....                                                        | 731 |
| 495. Случай понижения порядка .....                                                         | 732 |
| 496. Линейное уравнение второго порядка .....                                               | 733 |
| 497. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами .....                  | 735 |
| 498. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами без правой части ..... | 736 |
| 498а. Связь между случаями 1 и 3 § 498 .....                                                | 739 |
| 499. Линейное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами с правой частью .....  | 740 |
| 500. Линейные уравнения любого порядка .....                                                | 746 |
| 501. Метод вариации постоянных .....                                                        | 748 |
| 502. Системы дифференциальных уравнений. Линейные системы .....                             | 749 |

## НЕКОТОРЫЕ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЕ КРИВЫЕ

|                                     |     |
|-------------------------------------|-----|
| 503. Строфоид .....                 | 751 |
| 504. Циссоида Дюкло .....           | 753 |
| 505. Декартов лист .....            | 755 |
| 506. Верзьева Аньези .....          | 758 |
| 507. Конхоида Никомеда .....        | 760 |
| 508. Улитка Паскаля; кардиоид ..... | 765 |

|                                         |     |
|-----------------------------------------|-----|
| 509. Линия Кассини .....                | 770 |
| 510. Лемниската Бернулли .....          | 775 |
| 511. Архимедова спираль .....           | 777 |
| 512. Эвольвента (развертка) круга ..... | 781 |
| 513. Логарифмическая спираль .....      | 784 |
| 514. Циклоиды .....                     | 791 |
| 515. Эпициклоиды и гипоциклоиды .....   | 805 |
| 516. Трактриса .....                    | 822 |
| 517. Цепная линия .....                 | 829 |

## ТАБЛИЦЫ

|                                                                        |     |
|------------------------------------------------------------------------|-----|
| I. Натуральные логарифмы .....                                         | 834 |
| II. Таблица для перехода от натуральных логарифмов к десятичным .....  | 838 |
| III. Таблица для перехода от десятичных логарифмов к натуральным ..... | 838 |
| IV. Показательная функция $e^x$ .....                                  | 839 |
| V. Таблица неопределенных интегралов .....                             | 841 |
| Алфавитный указатель .....                                             | 852 |