

А.Я. Орлов

Теоретическая астрономия

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 52
ББК 22.6
А11

А11 **А.Я. Орлов**
Теоретическая астрономия / А.Я. Орлов – М.: Книга по Требованию, 2019. – 102 с.

ISBN 978-5-458-60377-5

ISBN 978-5-458-60377-5

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2019
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2019

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

Для других подобных же пары уравнений будем имѣть для координат η и ξ .

Но

$$\frac{d^2 X}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Y}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2 Z}{dt^2} = 0,$$

поэтому

$$\frac{d^2 (\xi_0 - X)}{dt^2} = \frac{d^2 x_0}{dt^2} = \frac{f m_1 (x_1 - x_0)}{r^3}, \quad \frac{d^2 (\xi_1 - X)}{dt^2} = \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{f m_0 (x_1 - x_0)}{r^3} \quad [\text{и т. д. для } \eta \text{ и } \xi].$$

В первом из этих уравнений выразим x_1, y_1, z_1 через x_0, y_0, z_0 ; во втором, наоборот, x_0, y_0, z_0 выразим через x_1, y_1, z_1 . Сдѣлав это, находим:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \frac{f m_1^3 x_0}{\mu^2 Q_0^3}, \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{f m_0^3 x_1}{\mu^2 Q_1^3} \quad [\text{и т. д. для } y_0 \text{ и } z_0, y_1 \text{ и } z_1].$$

Полагая для сокращенія

$$\frac{m_1^3}{\mu^2} = \mu_1 \quad \text{и} \quad \frac{m_0^3}{\mu^2} = \mu_0,$$

приходим к слѣдующим двум системам уравнений:

$$\frac{d^2 x_0}{dt^2} = - \frac{f \mu_1 x_0}{Q_0^3}, \quad \frac{d^2 y_0}{dt^2} = - \frac{f \mu_1 y_0}{Q_0^3}, \quad \frac{d^2 z_0}{dt^2} = - \frac{f \mu_1 z_0}{Q_0^3}, \quad (I) \quad \frac{d^2 x_1}{dt^2} = - \frac{f \mu_0 x_1}{Q_1^3}, \quad \frac{d^2 y_1}{dt^2} = - \frac{f \mu_0 y_1}{Q_1^3}, \quad \frac{d^2 z_1}{dt^2} = - \frac{f \mu_0 z_1}{Q_1^3}. \quad (II)$$

§ 4 Уравнения движенія относительно солнца. Возьмем теперь за начало координат точку с массой m_0 , т.-е. солнце, и пусть новыя координаты планеты с массой m_1 суть x, y, z , так что

$$x = \xi_1 - \xi_0, \quad y = \eta_1 - \eta_0, \quad z = \zeta_1 - \zeta_0.$$

Дифференціальныя уравненія абсолютнаго движенія точек с массами m_1 и m_0 могут быть написаны так:

$$\frac{d^2 \xi_1}{dt^2} = - \frac{f m_0 x}{r^3}, \quad \frac{d^2 \xi_0}{dt^2} = \frac{f m_1 x}{r^3} \quad [\text{и т. д. для } \eta \text{ и } \zeta].$$

Вычитая эти уравненія одно из другого, находим:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = - \frac{f \mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = - \frac{f \mu y}{r^3}, \quad \frac{d^2 z}{dt^2} = - \frac{f \mu z}{r^3}. \quad (III)$$

Сравнивая системы уравнений (I), (II) и (III), мы видим, что всѣ онѣ имѣют совершенно одинаковый вид. Поэтому в дальнѣйшем мы ограничимся разсмотрѣніем одной лишь системы (III); все сказанное о ней будет относиться и к системам (I) и (II), иужно лишь μ замѣнить на μ_1 и μ_0 .

§ 5. Интегралы площадей. Первая и вторая производныя от координат по времени мы будем обозначать для сокращенія соотвѣтственно через x', y', z' и x'', y'', z'' . Соотвѣтственно этому, уравненія движенія свѣтила относительно солнца можно написать так:

$$\frac{x''}{x} = \frac{y''}{y} = \frac{z''}{z} = - \frac{f \mu}{r^3},$$

откуда

$$yz'' - zy'' = \frac{d}{dt} (yz' - zy') = 0, \quad zx'' - xz'' = \frac{d}{dt} (zx' - xz') = 0, \quad xy'' - yx'' = \frac{d}{dt} (xy' - yx') = 0$$

и, слѣдовательно,

$$yz' - zy' = C_1, \quad zx' - xz' = C_2, \quad xy' - yx' = C_3.$$

Это суть интегралы площадей. Величины C_1, C_2, C_3 постоянныя произвольныя. Очевидное равенство

$$C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$$

показывает, что планета движется в плоскости, проходящей через центр солнца, для котораго $x = y = z = 0$.

§ 6. Интеграл живых сил. Так как движеніе оказывается плоским, то дальнѣйшее изслѣдованіе упрощается, если оси OX и OY расположить в плоскости движенія. Сдѣлаем это; тогда $C_1 = C_2 = 0$ и $C_3 = xy' - yx'$. Мы имѣем теперь только два уравненія движенія, а именно:

$$x'' = - \frac{f \mu}{r^3} x, \quad y'' = - \frac{f \mu}{r^3} y.$$

Умножая эти уравнения на x' и y' и складывая произведения, получаем:

$$x'x'' + y'y'' = -\frac{f\mu}{r^3}(xx' + yy'), \quad \text{откуда} \quad d(x'^2 + y'^2) = 2f\mu d\left(\frac{1}{r}\right),$$

но сумма $x'^2 + y'^2$ равна квадрату скорости; обозначая ее через V , имеем:

$$dV^2 = 2f\mu d\left(\frac{1}{r}\right); \quad (1)$$

отсюда, называя через h постоянную интегрирования, получаем:

$$V^2 = \frac{2f\mu}{r} + h. \quad (2)$$

Это есть интеграл живых сил.

§ 7. Введение полярных координат. Введем полярные координаты уравнениями:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

и для простоты вместо C_3 будем писать дальше c , так что $C_3 = c$, тогда:

$$c = xy' - yx' = r^2 \frac{d\theta}{dt}, \quad V^2 = x'^2 + y'^2 = \frac{dr^2 + r^2 d\theta^2}{dt^2}.$$

Разделим V^2 на c^2 , тогда после приведеній получим:

$$V^2 = c^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right].$$

Подставляя это выражение в формулу (1) § 6 и разделив на $d\theta$, находим:

$$c^2 \frac{d}{d\theta} \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right] = 2f\mu \frac{d\frac{1}{r}}{d\theta}.$$

Произведя дифференцирование, будем иметь:

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\theta^2} + \frac{1}{r} = \frac{f\mu}{c^2}. \quad (3)$$

§ 8. Траектория движения. Только что полученным равенством (3) мы воспользуемся для нахождения траектории движения. С этой целью, полагая

$$p = \frac{c^2}{f\mu},$$

мы переписываем уравнение (3) так:

$$\frac{d^2 \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{p} \right)}{d\theta^2} + \frac{1}{r} - \frac{1}{p} = 0,$$

откуда, после интегрирования, находим:

$$\frac{1}{r} - \frac{1}{p} = A \cos(\theta - \omega),$$

где A и ω суть два постоянных произвольных.

Вместо A введем другую, тоже произвольную величину e , связанную с A равенством $e = Ap$; тогда

$$\frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\theta - \omega)}{p} \quad \text{или} \quad r = \frac{p}{1 + e \cos(\theta - \omega)}. \quad (4)$$

Это есть уравнение конического сечения, вид которого зависит от величины эксцентриситета e . При $e < 1$ имеем эллипс, при $e = 1$ — параболу, при $e > 1$ — гиперболу. Планеты и их спутники движутся по эллипсам; кометы описывают орбиты всех трех видов, но по преимуществу параболическия. Если комета движется по эллипсу или гиперболѣ, то эти орбиты близки к параболѣ, т.-е. для комет e либо равно, либо близко к единицѣ.

§ 9. Скорость движенія по орбитѣ. Для квадрата скорости мы нашли в § 7 выраженіе

$$V^2 = c^2 \left[\left(\frac{d\frac{1}{r}}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{1}{r} \right)^2 \right],$$

теперь мы знаем, что $\frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\theta - \omega)$, кромѣ того, мы положили $c^2 = f\mu$.

На основаніи этихъ формул, послѣ элементарныхъ преобразованій имѣем:

$$V^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{e^2 - 1}{p} \right).$$

Для эллипса $p = a(1 - e^2)$, гдѣ a есть большая полуось, поэтому

$$V^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right).$$

Для параболы

$$e = 1, \quad V^2 = \frac{2f\mu}{r}.$$

Для гиперболы $p = a(e^2 - 1)$, гдѣ a есть половина вещественной оси, и слѣдовательно

$$V^2 = f\mu \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right).$$

Сравнивая найденныя выраженія, мы видим, что параболическая скорость движенія при прочих равныхъ условіяхъ больше эллиптической, но меньше гиперболической.

§ 10. Истинная аномалія. Разстояніе перигелія отъ узла. Обращаясь теперь къ уравненію (4) § 8, мы положим $\theta - \omega = v$, такъ что

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v}. \quad (5)$$

Полярныя координаты мы ввели уравненіями $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, слѣдовательно θ есть уголъ, составляемый радіусомъ векторомъ свѣтила с осью X -ов. Полюс координатной системы совпадаетъ с началомъ прямолинейныхъ координатъ, т.-е. с солнцемъ; такимъ образомъ, планеты и кометы движутся по коническимъ сѣченіямъ, в одномъ изъ фокусовъ которыхъ находится солнце. Уголъ v считается отъ полярной оси, направленной отъ фокуса, принятаго за начало координатъ, къ ближайшей вершинѣ кривой. Этотъ уголъ называется истинной аномаліей и считается положительнымъ в сторону движенія свѣтила: Ближайшая къ солнцу вершина кривой называется перигеліемъ (для эллипса противоположная вершина носитъ названіе афелія). Величина ω есть уголъ между осью X ов и направлениемъ на перигелій.

Точки пересѣченія большихъ круговъ, изображающихъ на геліоцентрической небесной сферѣ основную плоскость (напримѣръ, эклиптику или экватор) и плоскость орбиты, называются узлами, а линія пересѣченія этихъ плоскостей — линіей узловъ. Узелъ, в которомъ свѣтило, двигаясь по орбитѣ, переходитъ изъ южнаго полушарія въ сѣверное, называется восходящимъ узломъ. Уголъ при центрѣ солнца между направлениемъ на восходящій узелъ и на перигелій (считая отъ узла в сторону движенія свѣтила отъ 0° до 360°) называется разстояніемъ перигелія отъ узла. Если за ось X взята линія узловъ (с положительнымъ направлениемъ на восходящій узелъ), то ω будетъ равно разстоянію перигелія отъ узла. (См. черт. 2).

§ 11. Движеніе по эллипсу. Эксцентрическая аномалія. Для эллипса $e < 1$, и если a есть большая полуось, то $p = a(1 - e^2)$, поэтому [см § 10 (5)]

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos v}. \quad (6)$$

Чѣмъ меньше e , тѣмъ меньше радіусъ векторъ r отличается отъ a . Если черезъ q и q_1 обозначимъ наименьшее (при $v = 0^\circ$) и наибольшее (при $v = 180^\circ$) значенія r , то $q = a(1 - e)$ и $q_1 = a(1 + e)$. Найдемъ общее выраженіе разности $a - r$. Для этого умножимъ обѣ части равенства (6) на $1 + e \cos v$, тогда

$$r + er \cos v = a - ae^2 \quad \text{откуда} \quad a - r = e(ae + r \cos v). \quad (7)$$

Сумма $ae + r \cos v$ представляетъ собою величину разстоянія OK отъ центра эллипса O до основанія перпендикуляра MK , опущеннаго изъ данной точки эллипса (r, v) на большую ось [$OF = ae$; $FK = r \cos v$]. На чертежѣ 1-омъ буквой F отмѣченъ фокусъ эллипса.

Из точки O опишем окружность круга радиуса a , продолжим перпендикуляр MK до пересечения его с окружностью в точке N и соединим N с O . Угол NOK называется эксцентрической аномалией; обозначая его через E , находим:

$$\overline{OK} = ae + r \cos v = a \cos E, \quad (8)$$

что, в связи с (7), дает нам

$$a - r = ae \cos E. \quad (9)$$

Далѣ, из аналитической геометрии извѣстно, что если b есть малая полуось эллипса, то $b = a \sqrt{1 - e^2}$ и $\overline{MK} = \frac{b}{a} \overline{KN} = \sqrt{1 - e^2} \overline{KN}$. Но $\overline{MK} = r \sin v$ и $\overline{KN} = a \sin E$; слѣдовательно

$$r \sin v = a \sqrt{1 - e^2} \sin E. \quad (10)$$

Формулы (9) и (8) можно написать в таком видѣ:

$$r = a(1 - e \cos E), \quad (11) \quad r \cos v = a(\cos E - e). \quad (12)$$

Вычитая и складывая эти выраженія, мы, послѣ приведенія, находим:

$$\sqrt{r} \sin \frac{v}{2} = \sqrt{a(1+e)} \sin \frac{E}{2}, \quad (13) \quad \sqrt{r} \cos \frac{v}{2} = \sqrt{a(1-e)} \cos \frac{E}{2}, \quad (14)$$

откуда

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \operatorname{tg} \frac{E}{2}. \quad (15)$$

Дифференцируя это равенство, получим:

$$dv = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \sec^2 \frac{E}{2} \cos^2 \frac{v}{2} dE;$$

но из (14) слѣдует, что

$$r = a(1 - e) \cos^2 \frac{E}{2} \sec^2 \frac{v}{2}. \quad (16) \quad \text{Поэтому } rdv = a \sqrt{1 - e^2} dE. \quad (17)$$

§ 12 Уравненіе Кеплера. Формулы с (10) по (15), в той или иной их комбинаціи, позволяют найти r и v , когда задано E . Равенства (13) и (14) являются наиболѣ удобными для этой цѣли. Найдем теперь зависимость между E и t . Для этого мы воспользуемся интегралом площадей

$$r^2 dv = c dt,$$

гдѣ $c = \sqrt{p f \mu}$. Перемножая почленно равенства (11) и (17), мы находим:

$$r^2 dv = a^2 \sqrt{1 - e^2} (1 - e \cos E) dE = c dt, \quad \text{откуда } dE - e \cos E dE = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}} dt.$$

Интегрируя это уравненіе и полагая

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad \text{имѣем: } E - e \sin E = nt + C,$$

гдѣ C есть постоянная интегрированія; для ея опредѣленія положим, что t_0 есть время прохожденія свѣтила через перигелий. При $t = t_0$, $E = 0$, слѣдовательно $C = -nt_0$ и, слѣдовательно:

$$E - e \sin E = n(t - t_0).$$

Это и есть уравненіе Кеплера. Правая часть этого уравненія: $n(t - t_0) = M$ называется средней аномалией, а величина n — средним движением. Пусть T есть время обращенія планеты вокруг солнца. За это время E увеличивается на 2π , слѣдовательно $n = \frac{2\pi}{T}$. Точка, равномерно двигаясь по окружности с угловою скоростью n , совершит полный оборот в то же самое время, как и планета.

§ 13. Различныя выраженія для n . Отмѣтим здѣсь тѣ формулы, которыя могут служить для вычисленія n .

Мы имѣли:

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{1 - e^2}}, \quad c = \sqrt{p f \mu}, \quad p = a(1 - e^2).$$

Полагая здѣсь $\sqrt{f} = k$, находим:

$$n = \frac{k \sqrt{\mu}}{a^2}.$$

В тѣх случаях, когда e близко к единицѣ, вѣсто a вводятъ кратчайшее разстояніе свѣтила от солнца q (см. § 11). Но $q = a(1 - e)$, откуда $a = \frac{q}{1 - e}$.

Слѣдовательно, в этом случаѣ

$$n = \frac{k \sqrt{\mu(1 - e)^{\frac{3}{2}}}}{q^2}.$$

Наконец, мы видѣли, что $n = \frac{2\pi}{T}$. Массы комет и малых планет так ничтожны по сравнению с массой солнца, что ими можно пренебречь и принять $\mu = m_0$. Если еще массу солнца принять за единицу массы, то $\mu = 1$ и тогда

$$c = k \sqrt{p}, \quad (18) \quad n = \frac{k}{a^{\frac{3}{2}}} = \frac{k(1 - e)^{\frac{3}{2}}}{q^2}. \quad (19)$$

§ 14. Законы Кеплера. Из всего сказаннаго выше вытекаютъ извѣстные законы Кеплера. Дѣйствительно, мы видѣли, что свѣтила движутся по коническим сѣченіям; но планеты описываютъ вокруг солнца замкнутую кривую, слѣдовательно, планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится солнце. Далѣе, мы нашли (§ 7), что

$$\frac{r^2 d\theta}{dt} = c \quad \text{или} \quad r^2 d\theta = c dt,$$

гдѣ c есть постоянная величина; но $r^2 d\theta$ есть удвоенная элементарная площадь сектора, описаннаго радиусом вектором за время dt ; назвав ее через dA , имѣем:

$$dA = c dt, \quad \text{откуда:} \quad A = ct + A_0,$$

гдѣ A_0 — постоянная интегрированія. Таким образом, площадь, описываемая радиусом вектором, измѣняется пропорціонально времени.

Для вывода третьяго закона мы воспользуемся формулами предыдущаго параграфа, а именно:

$$n^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{k^2 \mu}{a^3}. \quad (20)$$

Для какой нибудь другой планеты

$$n_1^2 = \frac{4\pi^2}{T_1^2} = \frac{k^2 \mu_1}{a_1^3}, \quad \text{откуда} \quad \frac{T^2}{T_1^2} = \frac{a^3 \mu_1}{a_1^3 \mu}.$$

Так как массы планет весьма малы по сравнению с массой солнца, то с большою степенью точности можно положить $\mu_1 = \mu = m_0$, и тогда $T^2 : T_1^2 = a^3 : a_1^3$, т.-е. квадраты времен обращеній двух планет относятся, как кубы их средних разстояній от солнца.

§ 15. Гауссова постоянная. Коэффициент Ньютонова притяженія был у нас обозначен через f , и мы положили (§ 13) $f = k^2$. Из формулы (20) слѣдует:

$$k^2 = \frac{4\pi^2 a^3}{\mu T^2}.$$

Эта формула, в примѣненіи к землѣ, послужила Гауссу для опредѣленія численнаго значенія постоянной k . Считая массу солнца и среднее разстояніе земли от солнца за единицы массы и длины, Гаусс принялъ.

$$T = 365.2564, \quad \mu = 1 + \frac{1}{354710} \quad \text{и получил:} \quad \lg k = 8.2358144, \quad \text{или} \quad \lg k'' = 3.5500066.$$

Это значеніе k называется Гауссовой постоянной.

16. Рѣшеніе уравненія Кеплера. Из уравненія

$$E - e \sin E = M$$

слѣдует, что при $M = 0$, $E = 0$; при $M = 2\pi$, $E = 2\pi$. Докажем, что, если $2\pi > M > 0$, то уравненіе Кеплера

есть только один корень. Для этого рассмотрим функцию

$$f(E) = E - e \sin E - M.$$

При $E = 0$, $f(E) = -M < 0$; при $E = 2\pi$, $f(E) = 2\pi - M > 0$. Следовательно, $f(E)$ по крайней мере один раз обращается в нуль с изменением E от 0 до 2π . Но производная $f'(E) = 1 - e \cos E$ всегда больше нуля, следовательно $f(E)$ обращается в нуль только один раз при $2\pi > E > 0$.

Самое решение Кеплерова уравнения ведется последовательными приближениями. Положим, что каким либо способом мы нашли для E настолько точное значение E_0 , что квадратом разности $E - E_0$ можно уже пренебречь; тогда, по строке Тейлора:

$$f(E) = E_0 - e \sin E_0 + (1 - e \cos E_0)(E - E_0) - M = 0.$$

Полагая здесь $E_0 - e \sin E_0 = M_0$, мы получаем для вычисления E формулу:

$$E - E_0 = \frac{M - M_0}{1 - e \cos E_0}. \quad (21)$$

При вычислении M_0 следует обратить внимание на то, что E_0 и $e \sin E_0$ должны быть выражены в секундах дуги.

Для нахождения начального значения эксцентрической аномалии составлена таблица [IV], в которой по аргументам e и M дается E с точностью до $0^{\circ}.01$. В таблице [V] дается еще и $\lg \frac{1}{1 - e \cos E}$. Для вычисления E_0 без таблицы было предложено очень много способов; мы укажем из них лишь следующий. Положив $x = E - M$, имеем:

$$x = e \sin(M + x) = e \sin M \cos x + e \cos M \sin x,$$

откуда, разделив на $\cos x$, находим:

$$\frac{x}{\cos x} - e \cos M \operatorname{tg} x = e \sin M \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x = \frac{e \sin M}{\frac{x}{\sin x} - e \cos M}.$$

Пусть для краткости

$$\frac{x}{\sin x} = \beta \quad \text{и} \quad \operatorname{tg} x_0 = \frac{e \sin M}{1 - e \cos M}, \quad \text{тогда} \quad \operatorname{tg} x_0 = \frac{\beta - e \cos M}{1 - e \cos M} = 1 + \frac{\beta - 1}{1 - e \cos M} \quad \text{или} \quad \lg \operatorname{tg} x = \lg \operatorname{tg} x_0 - \lg \left(1 + \frac{\beta - 1}{1 - e \cos M} \right).$$

Из равенства $x = e \sin(M + x)$ следует, что x не больше e ; но у планет эксцентриситеты очень малы, поэтому β мало отличается от единицы, и в первом приближении можно положить.

$$\beta - 1 = \frac{x}{\sin x} - 1 = \frac{1}{6} \sin^2 x_0 \quad \text{и} \quad \lg \left(1 + \frac{\beta - 1}{1 - e \cos M} \right) = \frac{\operatorname{Mod}}{6} \frac{\sin^2 x_0}{1 - e \cos M}.$$

Следовательно

$$\lg \operatorname{tg} x = \lg \operatorname{tg} x_0 - \frac{[8.8596] \sin^2 x_0}{1 - e \cos M}.$$

Число в квадратных скобках есть логарифм $\frac{\operatorname{Mod}}{6}$.

§ 17. Движение по параболѣ. Для параболы $e = 1$. Полагая $p = 2q$, мы из общего уравнения $r = \frac{p}{1 + e \cos v}$ находим:

$$r = \frac{2q}{1 + \cos v} = \frac{q}{\cos^2 \frac{v}{2}}.$$

Истинная аномалия v определится, как функция времени из уравнения площадей (§ 7):

$$cdt = r^2 dv = \frac{q^2 dv}{\cos^4 \frac{v}{2}} = \frac{q^2 \frac{dv}{\cos^2 \frac{v}{2}}}{\cos^2 \frac{v}{2}} = 2q^2 \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} \right) d \operatorname{tg} \frac{v}{2}.$$

Отсюда, после интегрирования, получается

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{c}{2q^2} (t - t_0),$$

гдѣ t_0 есть время прохожденія через перигелий. По параболам движутся только кометы, пренебрегая их массой по сравненію с массой солнца и принимая послѣднюю за единицу, имѣем $\mu=1$, $c=\sqrt{fp}=k\sqrt{2q}$ и

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{k}{\sqrt{2q^2}} (t - t_0).$$

§ 18 Таблицы Баркера и Леверье. Только что найденное уравнение представляют обыкновенно в таком видѣ

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \frac{t - t_0}{q^2} = M.$$

Для вычисленія по этой формулѣ угла v уже давно составлены таблицы Баркером и Леверье. В таблицах Баркера дается M или $\lg M$ по аргументу v ; наоборот, у Леверье дается v по аргументу M .

Кромѣ того, Леверье дает еще и значения производных $\frac{dv}{dM}$ и $\frac{d^2v}{dM^2}$ для вычисленія v по строкѣ Тейлора

$$v = v_0 + \left(\frac{dv}{dM} \right)_0 (M - M_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2v}{dM^2} \right)_0 (M - M_0)^2 + \dots$$

Если вмѣсто M дан $\lg M$, то

$$v = v_0 + \left(\frac{dv}{d \lg M} \right)_0 (\lg M - \lg M_0) + \frac{1}{2} \left(\frac{d^2v}{d \lg M^2} \right)_0 (\lg M - \lg M_0)^2 + \dots$$

Соотвѣтственно этим формулам и составлена таблица [VI], в которой по аргументу M или $\lg M$ даются соотвѣтствующія значения v , $\lg \frac{dv}{dM}$ или $\lg \frac{dv}{d \lg M}$. При пользованіи этой таблицей за M_0 или $\lg M_0$ нужно брать табличный аргумент ближайшій к M или к $\lg M$.

§ 19. Случай, когда v близко к 180° . Описанныя выше таблицы становятся неудобными при очень больших значеніях M , когда v близко к 180° . В этом случаѣ v можно вычислить слѣдующим образом. Мы имѣем

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} \right) = M.$$

Пусть еще

$$\frac{\sqrt{2}}{k} \left(\cotg \frac{v}{2} + \frac{1}{3} \cotg^3 \frac{v}{2} \right) = m. \quad \text{Тогда} \quad m + M = \frac{\sqrt{2}}{3k} \left(\operatorname{tg} \frac{v}{2} + \cotg \frac{v}{2} \right)^3 = \frac{8\sqrt{2}}{3k} \cdot \frac{1}{\sin^3 v}$$

и слѣдовательно:

$$\sin v = \sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2}}{3k}} \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{M}} \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M+m}}$$

Так как, по предположенію, v близко к 180° , то m очень мало по сравненію с M , и дробь $\frac{M}{M+m}$ будет мало отличаться от единицы, а ея логарием будет близок к нулю. В таблицѣ [VII] дается логарием произведенія $\sqrt[3]{\frac{8\sqrt{2}}{3k}} \cdot \sqrt[3]{\frac{M}{M+m}} = a$ по аргументу M , так что

$$\lg \sin v = \lg a - \frac{1}{3} \lg M.$$

Угол v нужно, конечно, взять здѣсь во второй четверти окружности.

§ 20. Вычисленіе v без специальных таблиц Положим

$$\operatorname{tg} \frac{v}{2} = \cotg \gamma - \operatorname{tg} \gamma = 2 \cotg 2\gamma, \quad (22) \quad \text{тогда} \quad \frac{3k}{\sqrt{2}} M = 3 \operatorname{tg} \frac{v}{2} + \operatorname{tg}^3 \frac{v}{2} = \cotg^3 \gamma - \operatorname{tg}^3 \gamma.$$

Пусть далѣе

$$\operatorname{tg}^3 \gamma = \operatorname{tg}^3 \beta \quad (23) \quad \text{Тогда} \quad \frac{3k}{\sqrt{2}} M = 2 \cotg 2\beta. \quad (24)$$

Опредѣлив β по уравненію (24), мы найдем γ из (23) и затѣм v из (22).

§ 21. Рѣшеніе уравненія $ax + \frac{1}{3}bx^3 = m$. Предположим, что здѣсь a и b одинаковых знаков, и пусть

$$x = \sqrt{\frac{a}{b}} \operatorname{tg} \frac{W}{2},$$

тогда предложенное уравненіе обратится в такое

$$\operatorname{tg} \frac{W}{2} + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 \frac{W}{2} = \frac{m\sqrt{b}}{a\sqrt{a}}.$$

Умножая обѣ части этого равенства на $\frac{\sqrt{2}}{k}$, гдѣ k есть Гауссова постоянная, мы приводим его к виду, для котораго и составлены таблицы Баркера и Леверье; таким образом, корень предложеннаго кубическаго уравненія легко может быть найден по этим таблицам.

§ 22. Движеніе по вытянутому эллипсу. Нѣкоторыя кометы (напримѣр, комета Галлея) движутся по эллипсам, у которых эксцентриситет близок к единицѣ. В этом случаѣ, при небольших значеніях эксцентрической аномаліи E , обычное рѣшеніе Кеплерова уравненія (§ 16), основанное на отысканіи дифференціальной поправки по формулѣ (21), становится непригодным, так как знаменатель $1 - e \cos E_0$ близок к нулю, и разность $E - E_0$ может оказаться настолько значительной, что ея квадратом нельзя пренебречь. Нужно, слѣдовательно, искать других способов вычисленія E . С этой цѣлью перепишем Кеплерово уравненіе так (§§ 12 и 13):

$$E - e \sin E = \frac{k(1-e)^2}{q^{\frac{3}{2}}} (t - t_0).$$

Так как, по предположенію, E мало, то вмѣсто $\sin E$ введем сюда его разложеніе в ряд:

$$\sin E = E - \frac{E^3}{6} B^2, \quad \text{гдѣ} \quad B^2 = 1 - \frac{E^2}{20} + \frac{E^4}{840} \dots = \frac{6(E - \sin E)}{E^3}.$$

Тогда Кеплерово уравненіе напишется так:

$$(1-e)E + \frac{eB^2}{6}E^3 = \frac{k(1-e)^2}{q^{\frac{3}{2}}} (t - t_0).$$

Это есть уравненіе третьей степени с положительными коэффициентами, поэтому, соотвѣтственно сказанному в предыдущем параграфѣ, пусть:

$$E = \frac{\sqrt{2(1-e)}}{B} \operatorname{tg} \frac{W}{2}, \quad (25) \quad \text{тогда} \quad \frac{\sqrt{2}}{k} \operatorname{tg} \frac{W}{2} + \frac{\sqrt{2}}{3k} \operatorname{tg}^3 \frac{W}{2} = \frac{t - t_0}{q^{\frac{3}{2}}} B \sqrt{e}. \quad (26)$$

Послѣднія двѣ формулы служат для опредѣленія E с помощью таблиц параболическаго движенія, при чем вычисленіе ведется послѣдовательными приближеніями. Так как, по предположенію, E мало, то B близко к единицѣ, и для начала вычисленій можно взять $B = 1$. Найдя из таблицы [VI] угол W по аргументу $\frac{t - t_0}{q^{\frac{3}{2}}} \sqrt{e}$,

вычисляем E по формулѣ $E = \frac{\sqrt{2(1-e)}}{B} \operatorname{tg} \frac{W}{2}$ и, опредѣлив соотвѣтствующее значеніе B , повторяем все вычисленіе снова. Величина B дана в таблицѣ [VIII] по аргументу E .

Для вычисленія r и v могут служить формулы (15) и (16), § 11.

§ 23. Движеніе по гиперболѣ. Кометы движутся иногда по гиперболѣ, описывая ту вѣтвь ея, которая обращена своею вогнутостью к солнцу. В этом случаѣ, $e > 1$, $p = a(e^2 - 1)$, и выраженіе для r может быть представлено в таком видѣ:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos v} = \frac{a(e^2 - 1)}{\cos^2 \frac{v}{2} + \sin^2 \frac{v}{2} + e \cos^2 \frac{v}{2} - e \sin^2 \frac{v}{2}} = \frac{a(e - 1) \sec^2 \frac{v}{2}}{1 - \frac{e - 1}{e + 1} \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2}}.$$

Введя сюда новую переменную F равенством:

$$\frac{e-1}{e+1} \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \operatorname{tg}^2 \frac{F}{2}, \quad (27) \quad \text{получаем} \quad r = a(e-1) \sec^2 \frac{v}{2} \cos^2 \frac{F}{2} \sec F. \quad (28)$$

Дифференцируя равенство (27) и замѣчая, что

$$\sec^2 \frac{v}{2} = 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{v}{2} = \frac{e - \cos F}{(e-1) \cos^2 \frac{F}{2}}, \quad \text{находим} \quad dv = \sqrt{e^2 - 1} \frac{dF}{e - \cos F},$$

а равенство (28) можно написать так:

$$r = a \left(\frac{e}{\cos F} - 1 \right). \quad (29)$$

Интеграл площадей дает нам здѣсь:

$$c dt = r^2 dv = a^2 \sqrt{e^2 - 1} \left(\frac{e dF}{\cos^3 F} - \frac{dF}{\cos F} \right).$$

Откуда, послѣ интегрирования:

$$\frac{c(t-t_0)}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} = e \operatorname{tg} F - \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right). \quad (30)$$

Здѣсь t_0 есть время прохождения через перигелий, а знак $\ln$ означает Неперов логарием. Для комет $\mu=1$, поэтому, обозначив коэффициент при $t-t_0$ через n , имѣем:

$$n = \frac{c}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} = \frac{k \sqrt{p}}{a^2 \sqrt{e^2 - 1}} = \frac{k}{a^2} = \frac{k(e-1)^{\frac{3}{2}}}{q^2},$$

гдѣ $q = a(e-1)$ есть кратчайшее разстояніе кометы от солнца.

§ 24. Введение гиперболических функций. Пусть $x = \ln \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right)$ или $\operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) = e^x$, тогда, принимая во вниманіе равенства:

$$\operatorname{tg} F = -\operatorname{cotg} \left(F + \frac{\pi}{2} \right) = -\frac{1}{2} \left[\operatorname{co} \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) - \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

$$\frac{1}{\cos F} = \operatorname{cosec} \left(F + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{2} \left[\operatorname{co} \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) + \operatorname{tg} \left(\frac{F}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right],$$

найдем, что

$$\operatorname{tg} F = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\cos F} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \text{но, по опредѣленію,} \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{и} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2};$$

поэтому формулы (29) и (30) предыдущаго параграфа могут быть написаны так:

$$r = a(e \cosh x - 1), \quad n(t-t_0) = e \sinh x - x.$$

Послѣднее уравненіе сходно с уравненіем Кеплера и рѣшается приемами, аналогичными тѣм, которые были изложены в §§ 16 и 22.

§ 25. Вычисленіе прямолинейных гелиоцентрических координат свѣтила. Послѣ того, как по формулам предыдущих параграфов найдены для даннаго момента t величины r и v , можно приступить к вычисленію гелиоцентрических прямолинейных координат свѣтила. Обозначим его эклиптическія координаты через x_0, y_0, z_0 , так что:

$$x_0 = r \cos(r, x_0), \quad y_0 = r \cos(r, y_0), \quad z_0 = r \cos(r, z_0).$$

Через $(r, x_0), (r, y_0), (r, z_0)$ здѣсь обозначены углы, составляемые радіусом вектором r с осями эклиптической системы координат. Косинусы этих трех углов можно выразить через двѣ величины Ω и i , которые опредѣляют положеніе плоскости орбиты относительно эклиптики.

Пусть на вспомогательной небесной сферѣ AB есть эклиптика, CD — орбита свѣтила, N — восходящій узел. (См. черт. 2). Точки x_0, y_0, z_0 пусть изображают на сферѣ координатныя эклиптическія оси, так что точка x_0 совпадает с точкой весенняго равноденствія. Плоскость орбиты свѣтила вполне опредѣляется дугой $x_0N = \Omega$ и углом $DNB = i$. Дуга Ω носит названіе долготы узла, а угол i называется наклонностью

орбиты к эклиптикѣ Ω считается от 0° до 360° , а i от 0° к сѣверу до 180° . Легко теперь выразить косинусы углов (r, x_0) , (r, y_0) , (r, z_0) через Ω и i .

Пусть M есть положеніе свѣтила в разсматриваемый момент. Дуга $NM = \omega + v$ (см. § 10) Соединив дугами больших кругов точку M с точками x_0, y_0, z_0 и точку N с z_0 , мы из треугольников Mx_0N , My_0N , Mz_0N находим:

$$\begin{aligned}\cos(r, x) &= \cos \Omega \cos(\omega + v) - \sin \Omega \sin(\omega + v) \cos i, & \cos(r, y) &= \sin \Omega \cos(\omega + v) + \cos \Omega \sin(\omega + v) \cos i, \\ \cos(r, z) &= \sin(\omega + v) \sin i.\end{aligned}$$

Имѣя эклиптическія координаты свѣтила (x_0, y_0, z_0) , легко найти его экваторіальныя координаты x, y, z ; для этого перехода служат извѣстныя формулы

$$x = x_0, \quad y = y_0 \cos \varepsilon - z_0 \sin \varepsilon, \quad z = y_0 \sin \varepsilon + z_0 \cos \varepsilon,$$

гдѣ ε есть наклонность эклиптики к экватору. Подставляя сюда вмѣсто x_0, y_0, z_0 их выраженія через r, v, Ω и i и полагая для краткости $\omega + v = u$, имѣем:

$$\begin{aligned}x &= r [\cos \Omega \cos u - \sin \Omega \cos i \sin u], & y &= r [\sin \Omega \cos \varepsilon \cos u + (\cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon) \sin u], \\ z &= r [\sin \Omega \sin \varepsilon \cos u + (\cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \sin i \cos \varepsilon) \sin u].\end{aligned}$$

§ 26. Гауссовы постоянныя. Найденныя сейчас выраженія для x, y, z были приведены к весьма удобному виду Гауссом, который положил:

$$\cos \Omega = a \sin A, \quad (31) \quad \cos \Omega \cos i \cos \varepsilon - \sin i \sin \varepsilon = b \cos B, \quad (34)$$

$$-\sin \Omega \cos i = a \cos A, \quad (32) \quad \sin \Omega \sin \varepsilon = c \sin C, \quad (35)$$

$$\sin \Omega \cos \varepsilon = b \sin B, \quad (33) \quad \cos \Omega \cos i \sin \varepsilon + \cos \varepsilon \sin i = c \cos C. \quad (36)$$

При таких обозначеніях имѣем:

$$x = ra \sin(A + u), \quad y = rb \sin(B + u), \quad z = rc \sin(C + u), \quad (u = \omega + v). \quad (IV)$$

Вспомогательныя величины a, b, c, A, B, C называются постоянными Гаусса. Онѣ зависят только от ε и от элементов орбиты Ω и i .

Вычисленіе Гауссовых постоянных может быть хорошо проконтролировано слѣдующим образом. Умножая равенство (34) на $-\sin \varepsilon$, а равенство (36) на $\cos \varepsilon$ и складывая, находим:

$$\sin i = c \cos C \cos \varepsilon - b \cos B \sin \varepsilon,$$

но формула (32) дает нам $\cos i$, слѣдовательно

$$-\operatorname{tg} i = \frac{\sin \Omega (c \cos C \cos \varepsilon - b \cos B \sin \varepsilon)}{a \cos A}.$$

Подставляя сюда выраженія $\cos \varepsilon$ и $\sin \varepsilon$, взятые из (33) и (35), имѣем:

$$\operatorname{tg} i = \frac{bc \sin(C - B)}{a \cos A}.$$

Эта формула и служит контролем вычисленій.

§ 27. Вычисленіе прямого восхожденія и склоненія планет и комет. Пусть x, y, z суть гелиоцентрическія экваторіальныя координаты свѣтила, ξ, η, ζ его геоцентрическія координаты и X_0, Y_0, Z_0 геоцентрическія координаты солнца. Эти девять величин связаны равенствами:

$$\xi = x + X_0, \quad \eta = y + Y_0, \quad \zeta = z + Z_0. \quad (V)$$

Перейдем теперь от прямоугольных координат к сферическим. Пусть ϱ, α и δ суть разстояніе свѣтила от земли, его прямое восхожденіе и склоненіе, тогда:

$$\xi = \varrho \cos \alpha \cos \delta, \quad \eta = \varrho \sin \alpha \cos \delta, \quad \zeta = \varrho \sin \delta. \quad (VI)$$

Выраженія для x, y, z найдены в предыдущем параграфѣ. слѣдовательно,

$$\varrho \cos \alpha \cos \delta = ra \sin(A + u) + X_0, \quad \varrho \sin \alpha \cos \delta = rb \sin(B + u) + Y_0, \quad \varrho \sin \delta = rc \sin(C + u) + Z_0.$$

Координаты солнца X_0, Y_0, Z_0 даются в астрономических календарях.

Послѣднія три формулы служат для вычисленія ϱ, α и δ . Таблица, в которой сопоставлены вычисленныя координаты свѣтила через равныя промежутки времени, называются эфемеридой этого свѣтила.