

**Э. Чезаро**

**Элементарный учебник алгебраического  
анализа и исчисления бесконечно малых**

**Часть 1**

Москва  
«Книга по Требованию»

- Э1 **Э. Чезаро**  
Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых: Часть 1 / Э. Чезаро – М.: Книга по Требованию, 2023. – 648 с.

**ISBN 978-5-458-26048-0**

Перевод с немецкого с примечаниями и дополнениями профессора К.А. Поссе. Книга Э. Чезаро окажет драгоценные услуги учащимся. Принципы изложены в ней строго, приёмы вычисления тщательно разъяснены. Читатель может их усвоить на многочисленных примерах и упражнениях, помещённых в книгу. Эти упражнения, по способу их обработки, представляют собою образцы изящества, и не могут не возбудить у читателя научной любознательности и интереса к научным работам. От читателя книги Чезаро не требуется иных сведений, кроме обыкновенного курса Математики нашей средней школы и курса Аналитической Геометрии в том объеме, в каком она обыкновенно читается в наших Университетах.

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



*Памяти Е. Бельтрами*

*посвящает эту книгу благодарный ученикъ*

*Э. Цезаро.*

*Urokkelig som tiden  
er tallenes viden.  
Deres fletninger er  
i evigt morgenskjaer  
renere end sneen  
finere end luften;  
men sterkere end verden  
som de veier uden skaaler  
og belyser uden straal.*

*Bjørnstjerne Bjørnson.*

## Предисловіе автора къ нѣмецкому изданію.

---

Важнѣйшею вѣтвью математическихъ наукъ, безъ сомнѣнія, можно считать ту, которая, пользуясь возможностью увеличивать и уменьшать по произволу числа, и принимая во вниманіе существующія между ними зависимости, устанавливаетъ систему аналитическихъ приѣмовъ, примѣняемыхъ, какъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, такъ и при изученіи явленій природы. Эта вѣтьвь носитъ названіе *Анализа* *бесконечно-малыхъ*. Въ настоящей книгѣ (предназначавшейся первоначально исключительно для моихъ учениковъ) она и излагается элементарнымъ способомъ на твердой основѣ *Алгебраическаго Анализа*, начала котораго я сперва и сообщаю, опираясь на параллельно читаемый курсъ *Аналитической Геометріи*.

Что касается принциповъ, которымъ въ моемъ преподаваніи я придаю меньше значенія, чѣмъ приложеніямъ ихъ, то читатель можетъ подробнѣе ихъ изучить по превосходнымъ руководствамъ другихъ ученыхъ: Lipschitz, Dini, Hermite, Weber, Stolz, Genocchi, Peano, Tannery, Jordan, d'Arcais, Arzela и другихъ. Я же стараюсь вести читателя быстрымъ и вѣрнымъ путемъ къ обильной жатвѣ аналитическихъ и геометрическихъ фактовъ.

Я очень благодаренъ издателю, Б. Тейбнеру, за лестное для меня предложеніе разрѣшить нѣмецкій переводъ моей книги. Вмѣстѣ съ тѣмъ считаю долгомъ публично выразить мою живѣйшую признательность моему уважаемому коллегѣ профессору университета въ Грейфсвальдѣ \*) Герхардту Ковалевскому за превосходное выполненіе перевода.

---

\*) Впослѣдствіи въ Боннѣ.

Я надѣюсь, что мои и его труды будутъ вознаграждены благосклоннымъ отношеніемъ къ этой книгѣ со стороны нѣмецкаго юношества, которому она исключительно предназначена. Мы предлагаемъ ему этотъ учебникъ, какъ собраніе задачъ для упражненій, на фонѣ изложенія (хотя и не вполне исчерпывающаго) главнѣйшихъ частей Алгебраическаго Анализа и Анализа бесконечно малыхъ.

*Э. Цезаро.*





## Отъ редактора русскаго перевода.

---

Учебникъ Анализа бывшаго профессора Неаполитанскаго Университета Э. Чезаро (E. Cesàro † 1906) появился въ печати въ 1904 году, въ нѣмецкомъ переводѣ съ рукописи автора, слѣланномъ профессоромъ Университета въ Грейфсвальдѣ, Г. Ковалевскимъ. Эта книга представляетъ собою соединеніе двухъ руководствъ того-же автора, изданныхъ на итальянскомъ языкѣ, съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями, а именно: *Corso di analisi algebrice* (1894 г.) и *„Elementi di calcolo infinitesimale“* (1899 г.). Черезъ годъ по выходѣ въ свѣтъ нѣмецкаго изданія вышло второе изданіе „Elementi“ на итальянскомъ языкѣ, представляющее собою почти буквальное воспроизведеніе нѣмецкаго, лишь дополненное нѣсколькими новыми примѣрами. Публикуемое нами русское изданіе есть обработанный переводъ съ нѣмецкаго, при чемъ приняты во вниманіе и дополненія изъ второго изданія „Elementi“.

По выходѣ въ свѣтъ перваго ихъ изданія извѣстный математикъ педагогъ Таннери (J. Tannery), вице-директоръ Парижской Нормальной Школы, въ рецензій, помѣщенной въ XXIII томѣ *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* за 1899 г., между прочимъ, говоритъ:

„Книга Э. Чезаро окажетъ драгоцѣнныя услуги учащимся. Принципы изложены въ ней строго, приемы вычисленія тщательно разъяснены. Читатель можетъ ихъ усвоить на многочисленныхъ примѣрахъ и упражненіяхъ, помѣщенныхъ въ книгѣ. Эти упражненія, по способу ихъ обработки, представляютъ собою образцы изящества, и не могутъ не возбудить у читателя научной любо-

знательности и интереса къ научнымъ работамъ“. Отъ читателя книги Чезаро не требуется иныхъ свѣдѣній, кромѣ обыкновеннаго курса Математики нашей средней школы и курса Аналитической Геометріи, въ томъ объемѣ, въ какомъ она обыкновенно читается въ нашихъ Университетахъ. Однако, мѣстами весьма сжатое изложеніе могло бы затруднить читателя, обладающаго среднею подготовкою, а потому, издавая русскій переводъ, мы сочли полезнымъ снабдить его различными примѣчаніями и дополненіями, имѣющими цѣлью сдѣлать книгу по возможности общедоступною.

Особое вниманіе читателя мы обращаемъ на упражненія, которыми книга весьма щедро надѣлена. Самъ авторъ, какъ видно изъ его предисловія, придаетъ имъ главное значеніе. Указывая въ главныхъ чертахъ ходъ рѣшенія, онъ тѣмъ не менѣе оставляетъ, читателю еще довольно мѣста для самостоятельной работы, а сообщая въ этихъ упражненіяхъ весьма интересные и важные результаты, онъ быстрымъ путемъ вводитъ читателя въ различныя отрасли Анализа. Упражненія въ книгѣ Чезаро составляютъ одно органическое цѣлое съ теоретическою частью, дополняя и разъясняя послѣднюю.

Объемъ книги, самъ по себѣ довольно большой, еще увеличился отъ присоединенія вышеупомянутыхъ примѣчаній и дополненій; поэтому мы рѣшили издать книгу въ двухъ томахъ. Первый обнимаетъ собою первыя пять книгъ (главъ) оригинала и представляетъ собою какъ бы введеніе въ Анализъ бесконечно малыхъ; второй будетъ въ себѣ заключать собственно Дифференціальное и Интегральное Исчисленія съ ихъ приложеніями къ Геометріи.

Римскія цифры (I, II, и т. д.), встрѣчающіяся въ текстѣ, отсылаютъ читателя къ тѣмъ примѣчаніямъ, которыя мы нашли болѣе удобнымъ выдѣлить въ особые отдѣлы послѣ каждой книги оригинала. Мелкія редакціонныя примѣчанія помѣщены въ видѣ выносокъ подъ знаками \*); знаки <sup>1)</sup>, <sup>2)</sup> и т. д. относятся къ подстрочнымъ примѣчаніямъ, принадлежащимъ автору.

Ссылки автора на иностранныя руководства по элементарной Математикѣ, замѣнены вездѣ, гдѣ было возможно, ссылками на русскія руководства, оригинальныя или переводныя.

Въ работѣ моей, какъ редактора, дѣятельную и весьма цѣнную помощь мнѣ оказывалъ Г. М. Фихтенгольцъ. На немъ лежалъ отвѣтственный трудъ чтенія послѣдней, ревизіонной корректуры; кромѣ того, я ему обязанъ многими, очень цѣнными замѣчаніями, которыми я неоднократно пользовался, и за которыя приношу ему мою глубокую благодарность.

*К. Поссе.*





# ОГЛАВЛЕНІЕ.

СТР.

Предисловіе автора . . . . .	VII—VIII
Отъ редактора . . . . .	IX—XI

## **Книга первая: Теорія опредѣлителей. Линейныя и квадратичныя формы.**

1. Теорія опредѣлителей . . . . .	1—42
Подстановки . . . . .	1— 5
Матриссы и опредѣлители . . . . .	5—10
Миноры . . . . .	10—13
Вычисленіе опредѣлителей . . . . .	14—22
Умноженіе матрисъ . . . . .	22—29
Взаимные опредѣлители . . . . .	29—37
Свойства нѣкоторыхъ опредѣлителей особаго вида . . . . .	37—42
2. Линейныя формы . . . . .	42— 63
Линейныя уравненія . . . . .	42— 50
Системы линейныхъ формъ . . . . .	50— 56
Линейныя преобразованія . . . . .	56— 63
3. Квадратичныя формы . . . . .	64— 86
Основные понятія изъ теоріи квадратичныхъ формъ . . . . .	64— 68
Инвариантныя свойства . . . . .	68— 73
Каноническія выраженія формъ . . . . .	73— 86
4. Примѣчанія къ первой книгѣ . . . . .	87—105

## **Книга вторая: Ирраціональныя числа. Предѣлы. Безконечныя ряды и произведенія.**

1. Ирраціональныя числа . . . . .	109—118
Основные понятія . . . . .	109—114
Дѣйствія надъ ирраціональными числами . . . . .	114—118
2. Теорія предѣловъ . . . . .	118—152
Стремленіе къ предѣлу . . . . .	118—123
Основные теоремы . . . . .	123—135

	СТР.
Упражнения на вычисление предѣловъ . . . . .	135—145
Границы и предѣлы числовыхъ ансамблей . . . . .	145—152
3. Теорія рядовъ . . . . .	152—223
Основные опредѣленія и примѣры . . . . .	152—159
Основные теоремы . . . . .	159—165
Сравненіе рядовъ съ положительными членами . . . . .	166—169
Спеціальныя признаки сходимости . . . . .	170—181
Упражнения и приложенія . . . . .	181—196
Вліяніе перемѣны порядка членовъ на характеръ ряда . . . . .	196—204
Дѣйствія надъ рядами . . . . .	204—208
Двойные ряды . . . . .	208—218
Безконечныя произведенія . . . . .	219—223
4. Примѣчанія ко второй книгѣ . . . . .	224—238

### Книга третья: Теорія функцій.

1. Функціи отъ одной перемѣнной . . . . .	241—268
Основные понятія . . . . .	241—249
Стремленіе къ предѣлу . . . . .	249—254
Непрерывность . . . . .	255—268
2. Теорія производныхъ . . . . .	269—314
Разысканіе производныхъ . . . . .	269—281
Свойства производныхъ . . . . .	282—298
Дополненія къ теоріи предѣловъ . . . . .	298—307
Исслѣдованіе функцій . . . . .	307—314
3. Разложенія въ ряды . . . . .	315—373
Ряды функцій . . . . .	315—323
Разложенія въ степенные ряды . . . . .	324—339
Асимптотическія изображенія степенныхъ рядовъ . . . . .	339—350
Интерполяціонныя формулы . . . . .	351—357
Бернуллиевы и Эйлеровы числа . . . . .	357—373
4. Функціи отъ нѣсколькихъ перемѣнныхъ . . . . .	374—395
Основные понятія и разысканія производныхъ . . . . .	374—381
Разложенія въ ряды. Махіта и мініта . . . . .	381—395
5. Примѣчанія къ третьей книгѣ . . . . .	396—429

### Книга четвертая: Комплексныя числа и кватерніоны.

1. Комплексныя числа . . . . .	433—461
Основные понятія . . . . .	433—438
Предѣлы, ряды и функціи . . . . .	438—446
Важныя трансцендентныя функціи . . . . .	446—453
Геометрическія упражненія . . . . .	454—461
2. Кватерніоны . . . . .	462—472
3. Примѣчанія къ четвертой книгѣ . . . . .	473—477