

**Э. Чезаро**

**Элементарный учебник алгебраического  
анализа и исчисления бесконечно малых**

**Часть 1**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 51  
ББК 22.1  
Э1

Э1      **Э. Чезаро**  
Элементарный учебник алгебраического анализа и исчисления бесконечно малых: Часть 1 / Э. Чезаро – М.: Книга по Требованию, 2023. – 648 с.

**ISBN 978-5-458-26048-0**

Перевод с немецкого с примечаниями и дополнениями профессора К.А. Поссе. Книга Э. Чезаро окажет драгоценные услуги учащимся. Принципы изложены в ней строго, приёмы вычисления тщательно разъяснены. Читатель может их усвоить на многочисленных примерах и упражнениях, помещённых в книгу. Эти упражнения, по способу их обработки, представляют собою образцы изящества, и не могут не возбудить у читателя научной любознательности и интереса к научным работам. От читателя книги Чезаро не требуется иных сведений, кроме обычновенного курса Математики нашей средней школы и курса Аналитической Геометрии в том объеме, в каком она обыкновенно читается в наших Университетах.

**ISBN 978-5-458-26048-0**

© Издание на русском языке, оформление  
«YOYO Media», 2023  
© Издание на русском языке, оцифровка,  
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригиналe, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



*Памяти Е. Бельтрами*

*посвящает эту книгу благодарный ученик*

*Р. Чезаро.*

*Urokkelig som tiden  
er tallenes viden.  
Deres fletninger er  
i evigt morgenskjaer  
renere end sneen  
finere end luften;  
men sterkere end verden  
som de veier uden skaaler  
og belyser uden straaler.*

*Bjor̄nstjerne Bjor̄nson.*

## Предисловіе автора къ нѣмецкому изданію.

---

Важнѣйшею вѣтвью математическихъ наукъ, безъ сомнѣнія, можно считать ту, которая, пользуясь возможностью увеличивать и уменьшать по произволу числа, и принимая во вниманіе существующія между ними зависимости, устанавливаетъ систему аналитическихъ пріемовъ, примѣняемыхъ, какъ въ геометрическихъ изслѣдованіяхъ, такъ и при изученіи явлений природы. Эта вѣтвь носить название Анализа безконечно-малыхъ. Въ настоящей книжѣ (предназначавшейся первоначально исключительно для моихъ учениковъ) она и излагается элементарнымъ способомъ на твердой основѣ Алгебраического Анализа, начала которого я сперва и сообщаю, опираясь на параллельно читаемый курсъ Аналитической Геометріи.

Что касается принциповъ, которымъ въ моемъ преподаваніи я придаю меныше значенія, чѣмъ приложеніямъ ихъ, то читатель можетъ подробнѣе ихъ изучить по превосходнымъ руководствамъ другихъ ученыхъ: Lipschitz, Dini, Hermite, Weber, Stolz, Genocchi, Peano, Tannery, Jordan, d'Arcais, Arzela и другихъ. Я же стараюсь вести читателя быстрымъ и вѣрнымъ путемъ къ обильной жатвѣ аналитическихъ и геометрическихъ фактовъ.

Я очень благодаренъ издателю, Б. Тейбнеру, за лестное для меня предложеніе разрѣшить нѣмецкій переводъ моей книги. Вмѣстѣ съ тѣмъ считаю долгомъ публично выразить мою живѣйшую признательность моему уважаемому коллегѣ профессору университета въ Грейфсвальдѣ \*) Герхарду Ковалевскому за превосходное выполненіе перевода.

---

\*) Впослѣдствіи въ Боннѣ.

Я надѣюсь, что мои и его труды будуть вознаграждены благосклоннымъ отношеніемъ къ этой книгѣ со стороны нѣмецкаго юношества, которому она исключительно предназначается. Мы предлагаемъ ему этотъ учебникъ, какъ собраніе задачъ для упражненій, на фонѣ изложенія (хотя и не вполнѣ исчерпывающаго) главнѣйшихъ частей Алгебраического Анализа и Анализа безконечно малыхъ.

Э. Чезаро.



## Отъ редактора русскаго перевода.

---

Учебникъ Анализа бывшаго профессора Неаполитанскаго Университета Э. Чезаро (E. Cesáro † 1906) появился въ печати въ 1904 году, въ нѣмецкомъ переводѣ съ рукописи автора, сдѣланномъ профессоромъ Университета въ Грейфсвальдѣ, Г. Ковалевскимъ. Эта книга представляетъ собою соединеніе двухъ руководствъ того-же автора, изданныхъ на итальянскомъ языкѣ, съ нѣкоторыми измѣненіями и дополненіями, а именно: *Corso di analisi algebrice* (1894 г.) и „*Elementi di calcolo infinitesimale*“ (1899 г.). Черезъ годъ по выходѣ въ свѣтъ нѣмецкаго изданія вышло второе изданіе „*Elementi*“ на итальянскомъ языкѣ, представляющее собою почти буквальное воспроизведеніе нѣмецкаго, лишь дополненное нѣсколькими новыми примѣрами. Публикуемое нами русское изданіе есть обработанный переводъ съ нѣмецкаго, при чемъ приняты во вниманіе и дополненія изъ второго изданія „*Elementi*“.

По выходѣ въ свѣтъ первого ихъ изданія известный математикъ педагогъ Таннери (J. Tannery), вице-директоръ Парижской Нормальной Школы, въ рецензіи, помѣщенной въ XXIII томѣ *Bulletin des sciences mathématiques et astronomiques* за 1899 г., между прочимъ, говоритъ:

„Книга Э. Чезаро окажеть драгоценныя услуги учащимся. Принципы изложены въ ней строго, пріемы вычислений тщательно разъяснены. Читатель можетъ ихъ усвоить на многочисленныхъ примѣрахъ и упражненіяхъ, помѣщенныхъ въ книгѣ. Эти упражненія, по способу ихъ обработки, представляютъ собою образцы изящества, и не могутъ не возбудить у читателя научной любо-

знательности и интереса къ научнымъ работамъ". Отъ читателя книги Чезаро не требуется иныхъ свѣдѣній, кроме обыкновенного курса Математики нашей средней школы и курса Аналитической Геометріи, въ томъ объемѣ, въ какомъ она обыкновенно читается въ нашихъ Университетахъ. Однако, мѣстами весьма сжатое изложеніе могло бы затруднить читателя, обладающаго среднею подготовкою, а потому, издавая русскій переводъ, мы сочли полезнымъ снабдить его различными примѣчаніями и дополненіями, имѣющими цѣлью сдѣлать книгу по возможности общедоступною.

Особое вниманіе читателя мы обращаемъ на упражненія, которыми книга весьма щедро надѣлена. Самъ авторъ, какъ видно изъ его предисловія, придаетъ имъ главное значеніе. Указывая въ главныхъ чертахъ ходъ рѣшенія, онъ тѣмъ не менѣе оставляетъ, читателю еще довольно мѣста для самостоятельной работы, а сообщая въ этихъ упражненіяхъ весьма интересные и важные результаты, онъ быстрымъ путемъ вводить читателя въ различные отрасли Анализа. Упражненія въ книгѣ Чезаро составляютъ одно органическое цѣлое съ теоретическою частью, дополняя и разъясняя по-слѣднюю.

Объемъ книги, самъ по себѣ довольно большой, еще увеличился отъ присоединенія вышеупомянутыхъ примѣчаній и дополненій; поэтому мы рѣшили издать книгу въ двухъ томахъ. Первый обнимаетъ собою первыя пять книгъ (главъ) оригинала и представляетъ собою какъ бы введеніе въ Анализъ безконечно малыхъ; второй будетъ въ себѣ заключать собственно Дифференціальное и Интегральное Исчисленія съ ихъ приложеніями къ Геометріи.

Римскія цифры (I, II, и т. д.), встрѣчающіяся въ текстѣ, отсылаютъ читателя къ тѣмъ примѣчаніямъ, которыя мы нашли болѣе удобнымъ выдѣлить въ особые отдѣлы послѣ каждой книги оригинала. Мелкія редакціонныя примѣчанія помѣщены въ видѣ выносокъ подъ знаками \*); знаки 1), 2) и т. д. относятся къ подстрочнымъ примѣчаніямъ, принадлежащимъ автору.

Ссылки автора на иностранныя руководства по элементарной Математикѣ, замѣнены вездѣ, гдѣ было возможно, ссылками на русскія руководства, оригиналныя или переводныя.

Въ работѣ моей, какъ редактора, дѣятельную и весьма цѣнную помощь мнѣ оказывалъ Г. М. Фихтенгольцъ. На немъ лежалъ ответственный трудъ чтенія послѣдней, ревизіонной корректуры; кромѣ того, я ему обязанъ многими, очень цѣнными замѣчаніями, которыми я неоднократно пользовался, и за которыхъ приношу ему мою глубокую благодарность.

*К. Пессе.*





# ОГЛАВЛЕНИЕ.

СТР.

|                              |          |
|------------------------------|----------|
| Предисловіе автора . . . . . | VII—VIII |
| Отъ редактора . . . . .      | IX—XI    |

## Книга первая: Теорія опредѣлителей. Линейныя и квадратичныя формы.

|                                                           |        |
|-----------------------------------------------------------|--------|
| 1. Теорія опредѣлителей . . . . .                         | 1—42   |
| Подстановки . . . . .                                     | 1—5    |
| Матриссы и опредѣлители . . . . .                         | 5—10   |
| Миноры . . . . .                                          | 10—13  |
| Вычисление опредѣлителей . . . . .                        | 14—22  |
| Умноженіе матрissъ . . . . .                              | 22—29  |
| Взаимные опредѣлители . . . . .                           | 29—37  |
| Свойства нѣкоторыхъ опредѣлителей особаго вида . . . . .  | 37—42  |
| 2. Линейныя формы . . . . .                               | 42—63  |
| Линейныя уравненія . . . . .                              | 42—50  |
| Системы линейныхъ формъ . . . . .                         | 50—56  |
| Линейныя преобразованія . . . . .                         | 56—63  |
| 3. Квадратичныя формы . . . . .                           | 64—86  |
| Основныя понятія изъ теоріи квадратичныхъ формъ . . . . . | 64—68  |
| Инваріантныя свойства . . . . .                           | 68—73  |
| Каноническія выраженія формъ . . . . .                    | 73—86  |
| 4. Примѣчанія къ первой книгѣ . . . . .                   | 87—105 |

## Книга вторая: Ирраціональныя числа. Предѣлы. Безконачные ряды и произведенія.

|                                                 |         |
|-------------------------------------------------|---------|
| 1. Ирраціональныя числа . . . . .               | 109—118 |
| Основныя понятія . . . . .                      | 109—114 |
| Дѣйствія надъ ирраціональными числами . . . . . | 114—118 |
| 2. Теорія предѣловъ . . . . .                   | 118—152 |
| Стремленіе къ предѣлу . . . . .                 | 118—123 |
| Основныя теоремы . . . . .                      | 123—135 |

|                                                              | СТР.           |
|--------------------------------------------------------------|----------------|
| Упражненія на вычислениі предѣловъ . . . . .                 | 135—145        |
| Границы и предѣлы числовыхъ ансамблей . . . . .              | 145—152        |
| <b>3. Теорія рядовъ . . . . .</b>                            | <b>152—223</b> |
| Основныя опредѣленія и примѣры . . . . .                     | 152—159        |
| Основныя теоремы . . . . .                                   | 159—165        |
| Сравненіе рядовъ съ положительными членами . . . . .         | 166—169        |
| Специальные признаки сходимости . . . . .                    | 170—181        |
| Упражненія и приложения . . . . .                            | 181—196        |
| Вліяніе переменъ порядка членовъ на характеръ ряда . . . . . | 196—204        |
| Дѣйствія надъ рядами . . . . .                               | 204—208        |
| Двойные ряды . . . . .                                       | 208—218        |
| Безконечныя произведенія . . . . .                           | 219—223        |
| <b>4. Примѣчанія къ второй книгѣ . . . . .</b>               | <b>224—238</b> |

**Книга третья: Теорія функцій.**

|                                                         |                |
|---------------------------------------------------------|----------------|
| <b>1. Функции отъ одной переменной . . . . .</b>        | <b>241—268</b> |
| Основныя понятія . . . . .                              | 241—249        |
| Стремленіе къ предѣлу . . . . .                         | 249—254        |
| Непрерывность . . . . .                                 | 255—268        |
| <b>2. Теорія производныхъ . . . . .</b>                 | <b>269—314</b> |
| Разысканіе производныхъ . . . . .                       | 269—281        |
| Свойства производныхъ . . . . .                         | 282—298        |
| Дополненія къ теоріи предѣловъ . . . . .                | 298—307        |
| Изслѣдованіе функций . . . . .                          | 307—314        |
| <b>3. Разложенія въ ряды . . . . .</b>                  | <b>315—373</b> |
| Ряды функций . . . . .                                  | 315—323        |
| Разложенія въ степенные ряды . . . . .                  | 324—339        |
| Асимптотическія изображенія степенныхъ рядовъ . . . . . | 339—350        |
| Интерполяціонныя формулы . . . . .                      | 351—357        |
| Бернулліевы и Эйлеровы числа . . . . .                  | 357—373        |
| <b>4. Функции отъ нѣсколькихъ переменныхъ . . . . .</b> | <b>374—395</b> |
| Основныя понятія и разысканія производныхъ . . . . .    | 374—381        |
| Разложенія въ ряды. Максіма и мініма . . . . .          | 381—395        |
| <b>5. Примѣчанія къ третьей книгѣ . . . . .</b>         | <b>396—429</b> |

**Книга четвертая: Комплексныя числа и кватерніоны.**

|                                                   |                |
|---------------------------------------------------|----------------|
| <b>1. Комплексныя числа . . . . .</b>             | <b>433—461</b> |
| Основныя понятія . . . . .                        | 433—438        |
| Предѣлы, ряды и функции . . . . .                 | 438—446        |
| Важныя трансцендентныя функции . . . . .          | 446—453        |
| Геометрическія упражненія . . . . .               | 454—461        |
| <b>2. Кватерніоны . . . . .</b>                   | <b>462—472</b> |
| <b>3. Примѣчанія къ четвертой книгѣ . . . . .</b> | <b>473—477</b> |