Э.Л. Айнс

Обыкновенные дифференциальные уравнения

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
Э1

Э.Л. Айнс

Э1 Обыкновенные дифференциальные уравнения / Э.Л. Айнс – М.: Книга по Требованию, 2024. – 720 с.

ISBN 978-5-458-25356-7

Выпускаемая в русском переводе книга Айнса представляет собой ценный вклад в нашу математическую литературу. Книга состоит из 21 главы и разделена на две части. В первой части рассматриваются дифференциальные уравнения в вещественной области, во второй - в комплексной области. Основные работы Штурм-Лиувилля, Биркгоффа и Бохера изложены исчерпывающе! В книге приведено огромное количество литературных ссылок, охватывающих всё наиболее существенное в области дифференциальных уравнений за последние 200 лет.

ISBN 978-5-458-25356-7

ЧАСТЬ I

Диференциальные уравнения в вещественной области

ГЛАВА I

ВВЕДЕНИЕ

1·1. Определения. Термин *aequatio differentialis* или *диференциальное уравнение* был впервые введен Лейбницем (Leibniz) в 1676 г. для обозначения зависимости между диференциалами dx и dy двух переменных x и y. Эта зависимость содержит переменные x и y вместе с другими символами $a, b, c, \ldots$, которые являются постоянными.

Такое ограниченное применение термина было вскоре заменено другим; в настоящее время под диференциальными уравнениями понимаются любые алгебраические или трансцендентные равенства, содержащие диференциалы или производные. Однако при этом подразумевается, что диференциальное уравнение не является тождеством [1].

Диференциальные уравнения классифицируются соответственно числу содержащихся в них переменных. *Обыкновенное* диференциальное уравнение выражает зависимость между независимой переменной (аргументом), зависимой переменной (функцией) и одной или более производными функции. Диференциальное уравнение *в частных производных* содержит одну зависимую и две или более независимых переменных вместе с частными производными зависимой переменной относительно независимых. Диференциальное уравнение *в полных диференциалах* содержит две или более зависимых переменных вместе с их диференциалами или производными относительно некоторой независимой переменной, которая может входить или не входить в уравнение.

Порядок диференциального уравнения определяется порядком высшей входящей в него производной. Если уравнение представлено в виде полинома от производных, то степень, в которую возводится высшая производная, называется *степенью* уравнения. Если в уравнении в обыкновенных или частных производных зависимая переменная и ее производные входят только в первой

---

[1] Примером диференциального тождества является

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \cdot \frac{d^3y}{dx^3} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \cdot \frac{d^3x}{dy^3} + 3\,\frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{d^2x}{dy^2} = 0,$$

а это в свою очередь эквивалентно

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1.$$

степени и не встречаются в более высоких степенях или произведениях, уравнение называется *линейным.* Следовательно коэфицненты линейного уравнения представляют собой постоянные или функции независимой переменной или переменных.

Так, например

$$\frac{d^2y}{dx^2}+y=x^3$$

является обыкновенным линейным уравнением второго порядка;

$$(x+y)^2\frac{dy}{dx}=1$$

— обыкновенное нелинейное уравнение первого порядка первой степени;

$$\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}=3\frac{d^2y}{dx^2}$$

— обыкновенное уравнение второго порядка, которое, при освобождении от иррациональности, возведением в квадрат обоих членов, представляет собой уравнение второй степени;

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}-z=0$$

— линейное диференциальное уравнение в частных производных первого порядка с двумя независимыми переменными;

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}=0$$

— линейное диференциальное уравнение в частных производных второго порядка с тремя независимыми переменными;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

— нелинейное диференциальное уравнение в частных производных второго порядка и второй степени с двумя независимыми переменными;

$$udx+vdy+wdz=0,$$

где u, v, w — функции x, y, z, — диференциальное уравнение в полных диференциалах первого порядка первой степени, а

$$x^2dx^2+2xydxdy+y^2dy^2-z^2dz^2=0$$

— диференциальное уравнение в полных диференциалах первого порядка второй степени.

В случае диференциального уравнения в полных диференциалах, любая из переменных может рассматриваться как независимая, а остальные как зависимые переменные. Так, полагая x независимой переменной, уравнение

$$udx+vdy+wdz=0$$

может быть переписано в виде

$$u+v\frac{dy}{dx}+w\frac{dz}{dx}=0$$

или в уравнение можно ввести вспомогательную переменную t, а первоначальные переменные рассматривать как функции t, тогда

$$u\frac{dx}{dt}+v\frac{dy}{dt}+w\frac{dz}{dt}=0.$$

1·2. Генезис обыкновенного диференциального уравнения. Рассмотрим уравнение

$$\text{(A)} \qquad f(x, y, c_1, c_2, \ldots, c_n)=0,$$

где x и y — переменные, а $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — произвольные независимые постоянные. Это уравнение служит для определения y как функции x. Так определяется последовательность функций, причем каждая функция соответствует определенному произвольному значению $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Можно образовать такое обыкновенное диференциальное уравнение, которое удовлетворилось бы любой из этих функций. Диференцируем заданное уравнение последовательно n раз относительно x. Тогда мы получим n новых уравнений, именно

$$\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}y'=0,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}y'+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}y'^2+\frac{\partial f}{\partial y}y''=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^n}+\ldots+\frac{\partial f}{\partial y}y^{(n)}=0,$$

где

$$y'=\frac{dy}{dx}, \quad y''=\frac{d^2y}{dx^2}, \ldots, y^{(n)}=\frac{d^ny}{dx^n}.$$

Каждое уравнение существенно отличается от предшествующего[1]; из всех $n+1$ уравнений n произвольных постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ могут быть исключены алгебраически, после чего получим диференциальное уравнение n-го порядка:

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)})=0.$$

Из самого способа образования этого диференциального уравнения ясно, что оно удовлетворяется любой функцией $y=\varphi(x)$, определяемой зависимостью (A). Эта зависимость называется *интегралом* диференциального уравнения, а каждая функция $y=\varphi(x)$, удовлетворяющая диференциальному уравне-

[1] При этом принимается, конечно, что имеются все частные производные f, и что $\frac{\partial f}{\partial y}$ не равно нулю.

нию, его *решением*[1]. Решение, включающее некоторое число существенно различных произвольных постоянных, равное порядку уравнения, называется *общим решением*[2]. Эта терминология оправдана, как будет показано в главе III, где приводится доказательство, что для заданного значения x, n различным условиям удовлетворяет одно и только одно решение уравнения n-го порядка. Возможность удовлетворения этим n условиям зависит от наличия решения, содержащего n произвольных постоянных.

Было принято, что интеграл содержит n постоянных c_1, c_2, $\ldots$, c_n. Однако, если имеются только n кажущихся постоянных, т. е., если две или больше постоянных могут быть заменены одной постоянной без существенного изменения интеграла, то порядок результирующего диференциального уравнения будет меньше n. Например, предположим, что интеграл имеет вид

$$f\{x, y, \varphi(a, b)\} = 0,$$

тогда он, повидимому, зависит от двух постоянных a и b, но в действительности он зависит только от одной постоянной, именно $c = \varphi(a, b)$. В данном случае результирующее диференциальное уравнение первого, а не второго порядка.

С другой стороны, если интеграл приведен, т. е., если функция $f(x, y, c_1, \ldots, c_n)$ разложена на два множителя, каждый из которых содержит y, то порядок результирующего диференциального уравнения будет меньше n, так как если ни один множитель не содержит всех постоянных, то каждый из них приведет к образованию диференциального уравнения порядка менее n, и возможно, что эти два диференциальных уравнения будут тождественны или что одно из них допускает все решения другого и следовательно удовлетворяется самим интегралом.

Пусть интеграл имеет вид

$$y^2 - (a + b)xy + abx^2 = 0;$$

он может быть приведен и эквивалентен двум уравнениям

$$y - ax = 0, \quad y - bx = 0,$$

каждое из которых, следовательно и интеграл, удовлетворяет диференциальному уравнению

$$y - xy' = 0.$$

---

[1] Вначале применялись термины *интеграл* [Джемс Бернулли (James Bernoulli, 1689)] и *частный интеграл* [Эйлер (Euler, Inst. Calc. Int., 1768)]. Термин *решение* был введен Лагранжем (Lagrange 1774) и установлен главным образом благодаря Пуанкаре (Poincaré). Термин *частный интеграл* применяется в настоящее время в очень ограниченном смысле (см. гл. VI).

[2] Известное прежде как *полный интеграл* или *полное интегральное уравнение* (Эйлер). Термин *интегральное уравнение* имеет в настоящее время совсем иной смысл (см. § 3·2), которого и следует придерживаться.

1 · 20. Диференциальное уравнение семейства конфокальных конических сечений. Рассмотрим уравнение

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}=1,$$

где a и b — определенные постоянные, а λ — произвольный параметр, который может принимать все действительные значения. Это уравнение представляет семейство конфокальных конических сечений. Диференциальное уравнение, решением которого оно является, получается исключением λ между ним и производным уравнением

$$\frac{2x}{a^2+\lambda}+\frac{2yy'}{b^2+\lambda}=0.$$

Из решения и производного уравнения найдем, что

$$a^2+\lambda=\frac{x^2y'-xy}{y'},\quad b^2+\lambda=y^2-xyy'$$

и, исключая λ, получим

$$a^2-b^2=\frac{x^2y'-xy}{y'}-y^2+xyy',$$

поэтому искомое диференциальное уравнение будет

$$xyy'^2+(x^2-y^2-a^2+b^2)y'-xy=0,$$

это уравнение первого порядка второй степени.

Производную y' можно изобразить символом p. Тогда диференциальное уравнение семейства конфокальных конических сечений можно написать в виде

$$xy(p^2-1)+(x^2-y^2-a^2+b^2)p=0.$$

1 · 21. Образование уравнений в частных производных исключением произвольных постоянных. Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_m$ — независимые переменные, а z — зависимая переменная, определяемая уравнением.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_m; z; c_1, c_2, \ldots, c_n)=0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — n произвольных постоянных. К этому уравнению могут быть присоединены m уравнений, полученных диференцированием относительно каждой из переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ последовательно, именно

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_1}=0,\ldots,\frac{\partial f}{\partial x_m}+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_m}=0.$$

Если $m \geqslant n$, то для исключения постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$ имеется достаточно уравнений. Если $m<n$, то присоединяются также

$\frac{1}{2}m(m+1)$ вторых производных уравнений; они имеют вид

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r^2}+2\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\left(\frac{\partial z}{\partial x_r}\right)^2+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial x_r^2}=0\ (r=1,2,\ldots,m),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial x_s}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_r\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_s}+\frac{\partial^2 f}{\partial x_s\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}+\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_r}\cdot\frac{\partial z}{\partial x_s}+$$
$$+\frac{\partial f}{\partial z}\cdot\frac{\partial^2 x}{\partial x_r\partial x_s}=0\quad(r,s=1,2,\ldots,m;\ r\neq s).$$

Этот процесс продолжается до тех пор, пока будет получено достаточное число уравнений для проведения исключения. После этого у нас будет больше уравнений, чем подлежащих исключению постоянных, поэтому решение может привести не к одному уравнению в частных производных, но к системе совместных диференциальных уравнений в частных производных.

1·211. Диференциальное уравнение в частных производных плоскостей и сфер. Рассмотрим случай, когда интегралом является уравнение

$$z=ax+by+c,$$

где a, b, c, — произвольные постоянные. При соответствующем подборе этих постоянных, уравнение может представлять любую плоскость в пространстве, за исключением плоскости, параллельной оси z. Первые производные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial z}{\partial x}=a,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=b.$$

Они недостаточны для исключения a, b и c, поэтому составляем вторые производные уравнения, именно

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=0,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0.$$

Эти уравнения не содержат произвольных постоянных и представляют следовательно искомые диференциальные уравнения. Обычно пишут

$$p=\frac{\partial z}{\partial x},\quad q=\frac{\partial z}{\partial y},\quad r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2},\quad s=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y},\quad t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.$$

Таким образом любая плоскость в пространстве, не параллельная оси z, удовлетворяет одновременно трем уравнениям

$$r=0,\ s=0,\ t=0.$$

Далее, рассмотрим уравнение, удовлетворяющее наиболее общим уравнениям сферы вида

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2,$$

где a, b, c и r — произвольные постоянные. Первые производные уравнения имеют вид

$$(x-a)+(z-c)p=0,\quad (y-b)+(z-c)q=0,$$

а вторые производные уравнения

$$1+p^2+(z-c)r=0,$$

$$pq+(z-c)s=0,$$

$$1+q^2+(z-c)t=0.$$

При исключении $z-c$ получим искомые уравнения, именно

$$\frac{1+p^2}{r}=\frac{pq}{s}=\frac{1+q^2}{t},$$

следовательно имеем два независимых уравнения. Пусть λ — значение каждого из членов этих уравнений, тогда

$$\lambda^2(rt-s^2)=1+p^2+q^2>0.$$

Если рассматривать только действительные сферы, то должно быть удовлетворено дополнительное условие

$$rt>s^2.$$

1·22. Свойство якобианов. Покажем, что интеграл диференциального уравнения в частных производных представляет собой зависимость, в которую входят произвольные функции переменных. Исследование, которое приводит к этому результату, зависит от свойств функциональных детерминантов или *якобианов*.

Пусть $u_1, u_2, \ldots, u_m$ являются функциями независимых переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Рассмотрим ряд частных производных, расположенных следующим образом

$$\begin{array}{cccc}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_n} \\
\dfrac{\partial u_2}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_2}{\partial x_n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial u_m}{\partial x_1}, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_2}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_m}{\partial x_n}.
\end{array}$$

Тогда детерминант порядка p, элементы которого совпадают с элементами p строк и p колонн приведенной схемы, называется *якобианом*[1]. Предположим, что все возможные якобианы построены; тогда, *если якобиан порядка p, например*

$$\begin{vmatrix}
\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_1}{\partial x_p} \\
\cdots & \cdots & \cdots \\
\dfrac{\partial u_p}{\partial x_1}, & \ldots, & \dfrac{\partial u_p}{\partial x_p}
\end{vmatrix},$$

[1] Scott and Mathews, Theory of Determinants, гл. XIII.

не равен нулю для выбранного ряда значений $x_1=\xi_1,\ldots,x_n=\xi_n$ и если каждый якобиан порядка $p+1$ тождественно равен нулю, то функции $u_1, u_2,\ldots, u_p$ — независимы, а остальные функции $u_{p+1},\ldots,u_m$ могут быть выражены в зависимости от $u_1,\ldots, u_p$.

Предположим, что для значений $x_1,\ldots, x_n$ в соседстве с $\xi_1,\ldots,\xi_n$ функции $u_1,\ldots, u_p$ не являются независимыми, но существует соотношение

$$\varphi(u_1,\ldots, u_p)=0.$$

Тогда уравнения

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial x_1}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial u_1}\cdot\frac{\partial u_1}{\partial x_p}+\ldots+\frac{\partial\varphi}{\partial u_p}\cdot\frac{\partial u_p}{\partial x_p}=0,$$

удовлетворяются тождественно, и поэтому выражение

$$\frac{\partial(u,\ldots,u_p)}{\partial(x_1,\ldots,x_p)}\equiv\begin{vmatrix}\frac{\partial u_1}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_1}{\partial x_p}\\ \cdots\cdots\\ \frac{\partial u_p}{\partial x_1},\ldots,\frac{\partial u_p}{\partial x_p}\end{vmatrix}=0$$

обращается в соседстве с $\xi_1,\ldots,\xi_n$ в нуль, что противоречит принятому условию. Следовательно первая часть теоремы, именно, что $u_1,\ldots,u_p$ независимы, верна.

Пусть в $u_{p+1},\ldots,u_m$ переменные $x_1,\ldots,x_p, x_{p+1},\ldots,x_n$ заменены новым рядом независимых переменных $u_1,\ldots, u_p, x_{p+1},\ldots, x_n$. Докажем, что если u_r представляет какую-либо функцию $u_{p+1},\ldots, u_m$, а x_s—любую из переменных $x_{p+1},\ldots, x_n$, то u_r совершенно не зависит от x_s, т. е.

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s}=0.$$

Предположим, что

$$u_1=f_1(x_1,\ldots, x_n),\ldots, u_m=f_m(x_1,\ldots, x_n),$$

и пусть вместо $x_1,\ldots, x_p$ будут подставлены их выражения в функции от новых независимых переменных $u_1,\ldots, u_p, x_{p+1},\ldots, x_p$, тогда, диференцируя обе стороны каждого уравнения по x_s, получим

$$0=\frac{\partial f_1}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_1}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_1}{\partial x_s},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$0=\frac{\partial f_p}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_p}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_p}{\partial x_s},$$

$$\frac{\partial u_r}{\partial x_s}=\frac{\partial f_r}{\partial x_1}\cdot\frac{\partial x_1}{\partial x_s}+\ldots+\frac{\partial f_r}{\partial x_p}\cdot\frac{\partial x_p}{\partial x_s}+\frac{\partial f_r}{\partial x_s}.$$

$$(r=p+1,\ldots, m).$$