**М.Л. Лурье**

# Справочник авиаконструктора

## Том III. Прочность самолета.

**Москва**
**«Книга по Требованию»**

УДК 656
ББК 39.1
М11

**М.Л. Лурье**
М11 Справочник авиаконструктора: Том III. Прочность самолета. / М.Л. Лурье – М.: Книга по Требованию, 2024. – 652 с.

**ISBN 978-5-458-43564-2**

Том III „Прочность самолета" является последним томом первого издания „Справочника авиаконструктора", составленного ЦАГИ по личному указанию незабвенного руководителя тяжелой промышленности Г. К. Орджоникидзе.

**ISBN 978-5-458-43564-2**

# СТРОИТЕЛЬНАЯ МЕХАНИКА

## ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Стр | Строка | Напечатано | Должно быть |
|---|---|---|---|
| 2 | 12 сверху | Матвеев В М | Матвеев В Н |
| 46 | 10 сверху | $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_y - I_z}$ | $\operatorname{tg} 2\alpha_0 = \frac{2I_{yz}}{I_z - I_y}$ |
| 101 | 4, 5, 6 и 7 снизу | $d$ | $\partial$ (всюду частные производные) |
| 201 | 9 снизу | $M_r = k_3 pb$ | $M_r = k_3 p b^2$ |
| 203 | 7 снизу | $\iota = \frac{24(1-\mu^2)}{a\delta^3}$ | $\varkappa = \frac{24(1-\mu^2)\ I}{a\delta^3}$ |
| | 8 снизу | $N_{y\,макс} = 0{,}775\frac{p_0 b^2}{\delta^2}$ | $N_{y\,макс} = 0{,}775\frac{p_0 b^2}{\delta}$ |
| | 9 снизу | $N_{x\,макс} = 0{,}775\frac{p_0 b^2}{\delta^2}$ | $N_{x\,макс} = 0{,}775\frac{p_0 b^2}{\delta}$ |
| 212 | 3 сверху | $N_{x\,кр} = \frac{D\pi^2}{b^2}\frac{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2+2\frac{D_1}{bD}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2(1+)\frac{F_1}{b\delta}}$ | $N_{x\,кр} = \frac{D\pi^2}{b^2}\frac{\left[1+\left(\frac{a}{b}\right)^2\right]^2+2\frac{D_1}{bD}}{\left(\frac{a}{b}\right)^2\left(1+\frac{F_1}{b\delta}\right)}$ |
| | 11 сверху | $\frac{a}{d}$ | $\frac{a}{b}$ |
| 248 | Фиг 267 | $F_{стр} = 2{,}25\ м^2$ | $F_{стр} = 2{,}25\ см^2$ |
| 464 | Фиг 462 | Перевернута левая часть фигуры | |
| 500 | 8 снизу | $f = f_c + f_c$ | $f = f_н + f_c$ |
| 529 | 4 снизу | $n = \sqrt[4]{\frac{(n+1)D}{64\,k}}$ | $n = \sqrt[4]{\frac{(n+1)}{64\,D}}$ |

# ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

## Напряжение

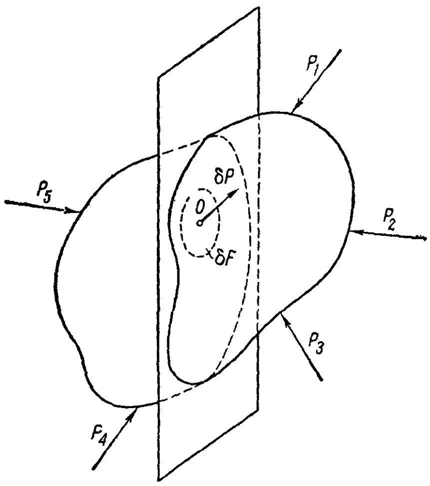
Напряжением ($\bar{\sigma}$) называется внутренняя сила, приходящаяся на единицу площади взятой поверхности в теле, находящемся под воздействием системы сил

Напряжение есть вектор, в общем случае наклонный по отношению к поверхности (площадке, например, $\delta F$ на фиг 1), на которой оно имеется, его обычно раскладывают на составляющие

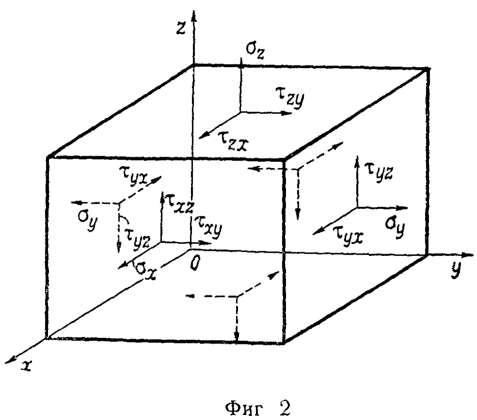
нормальное напряжение ($\sigma$)

и касательное напряжение ($\tau$)

Напряжение в точке ($O$, например, на фиг 1) определяется по величине предельным отношением $\frac{\delta P}{\delta F}$ при непрерывном уменьшении $\delta F$, оставляя все время точку $O$ внутри $\delta F$, а по направлению — соответствующим предельным направлением При этом если система сил, имеющихся на площадке $\delta F$, приводится кроме силы $\delta P$ и к паре $\delta M$, предполагается, что отношение $\frac{\delta M}{\delta F}$ стремится к нулю



Фиг 1



Фиг 2

Обозначения составляющих напряжения На фиг 2 показаны обозначения составляющих напряжений на гранях малого элемента объема тела, взятого у точки $O$ в виде куба, стороны которого параллельны осям координат $Oxyz$ На фиг 2 показаны положительные направления составляющих

Правило обозначения составляющих напряжения следующее

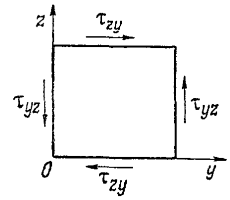
для нормальных напряжений

нормальное напряжение на грани обозначается буквой $\sigma$ с индексом той оси, к которой эта грань перпендикулярна,

для касательных напряжений

касательное напряжение на грани имеет при $\tau$ индекс из двух букв, первая из которых есть индекс той оси, к которой эта грань перпендикулярна, а вторая есть индеск той оси, которой параллельна обозначаемая составляющая

Усилие, действующее на какую-либо грань элементарного объема, можно считать равным напряжению в центре грани, помноженному на площадь этой грани




Фиг 3

Условия равновесия дают (фиг 2 и 3)

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}, \quad \tau_{xz} = \tau_{zx}, \quad \tau_{yz} = \tau_{zy},$$

т е равенство касательных напряжений по двум взаимноперпендикулярным площадкам (парность касательных напряжений)

Напряжение на любой площадке в точке можно выразить через

$$\sigma_x, \quad \sigma_y, \quad \sigma_z \text{ и } \tau_{xy}, \quad \tau_{xz}, \quad \tau_{yz}$$

Главные напряжения Для любой точки внутри тела, подверженного действию системы сил, можно найти три взаимно перпендикулярные плоскости, для которых $\tau$ равно нулю, нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, называются главными напряжениями, их направления — главными осями и плоскости—главными плоскостями В плоском напряженном состоянии (т е когда напряжения параллельны одной плоскости) можно найти две взаимно перпендикулярных плоскости, для которых касательное напряжение равно нулю, нормальные напряжения, действующие по этим площадкам, будут главными напряжениями, а их направления главными осями или главными направлениями

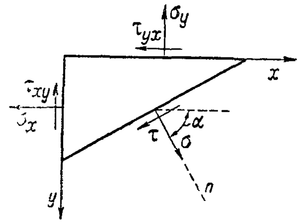
Формулы для определения напряжения в точке на площадке, наклоненной под любым углом к выбранным направлениям (фиг 4—схема напряжений на гранях бесконечно малой трехгранной призмы) следующие

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha + 2\tau_{xy} \sin \alpha \cos \alpha,$$

$$\tau = \tau_{xy} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha) + (\sigma_y - \sigma_x) \sin \alpha \cos \alpha$$

Главные направления определяются из уравнения

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\tau_{xy}}{\sigma_x - \sigma_y}$$




Фиг 4

Если оси координат—главные, то

$$\sigma = \sigma_x \cos^2 \alpha + \sigma_y \sin^2 \alpha,$$

$$\tau = \frac{1}{2} (\sigma_y - \sigma_x) \sin 2\alpha$$

Наибольшее касательное напряжение действует в плоскости, разделяющей пополам угол между двумя главными напряжениями (т е при $\alpha = \frac{\pi}{4}$ в последнем случае) и равно

$$\tau_{\text{макс}} = \frac{\sigma_y - \sigma_x}{2}.$$

Главные напряжения в плоском напряженном состоянии являются: одно—наибольшим, и другое—наименьшим нормальными напряжениями из всех напряжений по любому направлению в данной точке.

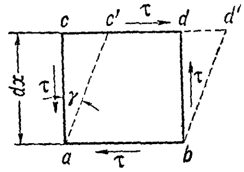
## Деформации

Деформация тела под воздействием системы внешних сил может быть представлена состоящей из перемещений частиц его. Расположение отдельных частиц деформированного тела определяется изменением длин элементов тела между ними и углов направления этих длин (по отношению к взятым ранее).

Приращение длины элемента называется абсолютным удлинением (или абсолютным укорочением) и обозначается через $\Delta l$. (Слово „абсолютное" обычно опускается.)

Отношение удлинения (или укорочения) к первоначально взятой длине, для которой измерено приращение длины называется относительным удлинением (или относительным укорочением) и обозначается через $\varepsilon$:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l}.$$




Фиг. 5

Относительным сдвигом называется угол, определяющий перекос элемента (фиг. 5),— обозначается через $\gamma$.

Сдвиг ($cc'$) стороны $cd$ элемента, представленного на фиг. 5, может быть получен, как отрезок, равный:

$$\gamma\, dx.$$

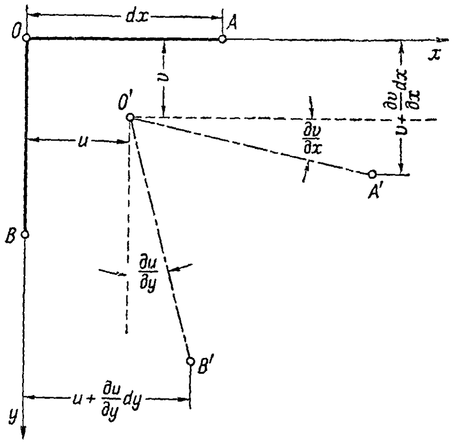
Составляющие деформации. Составляющие малого перемещения частицы тела, параллельные осям координат $Ox$, $Oy$ и $Oz$, обозначаются соответственно через $u$, $v$ и $w$.

Приращение длины элемента (удлинение или укорочение) может быть представлено с помощью составляющих перемещения:

Если $u$ — перемещение точки $O$ (фиг. 6), то перемещение в том же направлении точки $A$, лежащей на оси $Ox$ и находящейся на расстоянии $dx$ от точки $O$, будет:

$$u + \frac{\partial u}{\partial x} dx = u + \varepsilon_x dx$$

(при условии непрерывного изменения перемещения).




Фиг. 6

Здесь

$\frac{\partial u}{\partial x} dx$ — удлинение;

$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x}$ — относительное удлинение в точке $O$ в направлении оси $Ox$ (аналогично будут представлены и выражения для удлинений в направлениях других осей).

Деформация сдвига между плоскостями $xz$ и $yz$ определяется относительным сдвигом $\gamma_{xy}$ (фиг. 6):

$$\gamma_{xy}=\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y},$$

Составляющими деформации называются следующие шесть величин:

$$\varepsilon_x=\frac{\partial u}{\partial x},\quad \gamma_{xy}=\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x},$$

$$\varepsilon_y=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \gamma_{xz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial x},$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z},\quad \gamma_{yz}=\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y};$$

они позволяют определить удлинение по любому направлению и изменение угла между любыми двумя направлениями.

### Основные принципы

Принцип наложения (сложения действия сил). Напряжения и деформации, возникающие при действии на тело системы сил, равны суммам напряжений и деформаций, определяемых для тех же точек при действии составляющих систему сил в отдельности.

Принципом сложения действия сил можно пользоваться лишь в случаях, когда деформации от действия одних сил не сказываются на действии других, входящих в ту же систему сил.

Принцип Сен-Венана. Деформации и напряжения в теле на большом расстоянии от места приложения сил по сравнению с размерами поверхности, на которой действуют силы, не зависят от распределения сил; от распределения сил зависят лишь деформации и напряжения местные и в близко расположенных точках.

Закон Гука. В случае растяжения бруса из изотропного материала равномерно распределенными силами, не превосходящими некоторой величины, экспериментально установлена следующая зависимость:

$$\varepsilon_x=\frac{\sigma_x}{E},$$

которая носит название закона Гука. Величина $E$ называется модулем упругости (иногда ее называют модулем Юнга).

При растяжении наблюдается укорочение поперечных размеров:

$$\varepsilon_y=-\mu\frac{\sigma_x}{E}.$$

Коэфициент $\mu$ носит название коэфициента Пуассона (или отношения Пуассона).

В случае чистого сдвига—напряженного состояния элемента, на гранях которого действуют только касательные напряжения, а нормальные равны нулю, — зависимость между относительным сдвигом и касательным напряжением будет:

$$\gamma=\frac{\tau}{G},$$

где $G$ — модуль сдвига.

Модуль сдвига теоретически определяется с помощью $E$ и $\mu$ так:

$$G=\frac{E}{2(1+\mu)}.$$

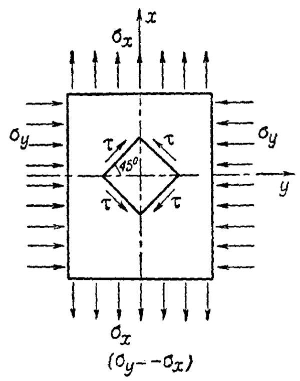
Эти выражения легко находятся при рассмотрении находящегося в состоянии чистого сдвига элемента, вырезанного из прямоугольного параллелепипеда, растянутого и сжатого, как показано на фиг 7

В общем случае нагружения (фиг 2) деформация может быть определена на основании принципа сложения действия сил из следующих выражений составляющих деформации

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G},$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left[\sigma_y - \mu(\sigma_x + \sigma_z)\right], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G},$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}\left[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)\right], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}$$




Фиг 7

Составляющие напряжения через составляющие деформации могут быть представлены в виде

$$\sigma_x = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = \gamma_{xy} G,$$

$$\sigma_y = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = \gamma_{yz} G,$$

$$\sigma_z = \lambda\Delta + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = \gamma_{zx} G,$$

где

$$\lambda = \frac{\mu E}{(1+\mu)(1-2\mu)},$$

$$\Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z$$

Зависимость между относительным объемным расширением и суммой нормальных напряжений следующая

$$\Delta = \frac{1-2\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} \; \frac{3(1-2\mu)}{E}$$

Величина $\frac{E}{3(1-2\mu)}$ называется модулем объемного расширения

## Потенциальная энергия упругого тела

Работа внутренних сил упругого тела называется потенциальной энергией его (или работой деформаций)

Потенциальная энергия упругого тела равна всей работе внешних сил, вызывающих деформации при статическом нагружении

Потенциальная энергия элементарного параллелепипеда выражается формулой

$$dU = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + \tau_{xz}\gamma_{xz} + \tau_{zy}\gamma_{yz})\,dx\,dy\,dz$$

Полная энергия деформации упругого тела будет

$$U = \iiint dU$$

## Общие уравнения задачи о плоском напряженном состоянии

Для решения задачи о плоском напряженном состоянии в общем случае составляют систему уравнений равновесия, условий на контуре и совместности

Диференциальные уравнения равновесия:

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+X=0\,;$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+Y=0\,.$$

Здесь $X$ и $Y$ — составляющие объемной силы (силы, распределенной по объему тела; например, силы тяжести, силы инерции и т. п.). Если объемной силой является только вес тела, то диференциальные уравнения представляются в виде.

$$\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}=0;$$

$$\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}+\rho g=0$$

($\rho$ — плотность тела и $g$ — ускорение свободного падения).

Условия на контуре:

$$X_п=\sigma_x\cos\alpha+\tau_{xy}\cos\beta;$$

$$Y_п=\sigma_y\cos\beta+\tau_{xy}\cos\alpha.$$

Здесь $X_п$ и $Y_п$ — составляющие поверхностных сил, отнесенных к единице площади, для данной точки;

$\alpha$ и $\beta$ — углы между нормалью и $X_п$ и $Y_п$

Условие совместности. Между составляющими перемещения $u$ и $v$, через которые выражаются составляющие деформации, должна быть определенная связь, что приводит к необходимости удовлетворить условие совместности (выраженное через составляющие деформации):

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\,\partial y}\,.$$

Функция напряжений (функция Эри). Для решения задачи о плоском напряженном состоянии обычно вводят некоторую функцию напряжений $\varphi$ — функцию Эри. В случае, когда объемной силой является только собственный вес, функция Эри должна удовлетворять уравнению:

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4}=0;$$

решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям на контуре, даст решение рассматриваемой задачи.

### Теории прочности

Для суждения о прочности тела, находящегося под воздействием сложной нагрузки (например, изгиб + кручение), по имеющимся опытным данным при простом нагружении предложено несколько теорий прочности. Здесь перечисляются четыре из них:

1. Теория наибольших напряжений. По этой теории должно производиться сравнение наибольшего напряжения с наибольшим напряжением при простом растяжении, или наименьшее — с наименьшим при простом сжатии, причем за наибольшее или наименьшее напряжение берется

предел текучести, соответственно при растяжении и сжатии; начало текучести, таким образом, по этой теории определяется равенством:

$$\sigma_x = \sigma_{s\,\text{р}},$$

или

$$\sigma_z = \sigma_{s\,\text{сж}}$$

при

$$\sigma_x > \sigma_y > \sigma_z.$$

(Здесь и дальше рассматривается случай нагружения тела по трем взаимноперпендикулярным направлениям).

Этой теорией теперь почти не пользуются; она дает большие расхождения с опытом во многих случаях сложного нагружения.

2. Теория наибольших деформаций. Теория предполагает, что заключение о прочности можно выводить из сравнения наибольших относительных удлинений при данной сложной нагрузке с относительным удлинением при простом растяжении (или наибольших относительных укорочений — с относительным укорочением при простом сжатии); начало текучести, таким образом, по этой теории определяется равенством:

$$\frac{\sigma_x}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_y + \sigma_z) = \frac{\sigma_{s\,\text{р}}}{E}$$

или

$$\frac{\sigma_z}{E} - \frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y) = \frac{\sigma_{s\,\text{сж}}}{E}.$$

Этой теорией пользуются редко, так как во многих случаях сложного нагружения она не согласуется с опытами.

3. Теория наибольших касательных напряжений. По этой теории считается, что следует сравнить касательные напряжения. Предполагается, что предел текучести при сложной нагрузке наступает, когда касательное напряжение будет равно касательному напряжению при пределе текучести в случае простого растяжения:

$$\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_z) = \frac{\sigma_{s\,\text{р}}}{2}.$$

Этой теорией пользуются часто; она лучше согласуется с опытами, чем 1 и 2 теории, в особенности для пластических материалов.

4. Теория удельной работы. По этой теории должны сравниваться энергия, накопленная телом в единице объема при сложной нагрузке, с энергией, накопленной телом в единице объема при простом растяжении; начало текучести, таким образом, по этой теории определяется равенством:

$$\frac{\sigma^2_x + \sigma^2_y + \sigma^2_z}{2E} - \frac{\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_x\sigma_z)}{E} = \frac{\sigma^2_{s\,\text{р}}}{2E}.$$

Эта теория при сравнении с опытами дает, примерно, такие же результаты, как и теория наибольших касательных напряжений, но последней пользуются чаще, вследствие большей простоты применения.

## РАСТЯЖЕНИЕ И СЖАТИЕ

В случае растяжения или сжатия призматического тела в одном направлении применяются следующие расчетные формулы

Напряжение на площадке, нормальной к сечению (фиг 8)

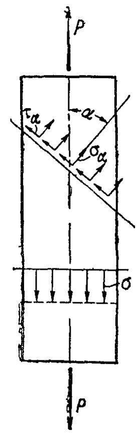
$$\sigma = \frac{P}{F},$$

абсолютное удлинение $\Delta l$

$$\Delta l = \frac{Pl}{EF}$$

относительное удлинение $\varepsilon$

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{\sigma}{E}$$




Фиг 8

Если площадка наклонена к вертикали под углом $\alpha$, то напряжения на ней будут

нормальное

$$\sigma_\alpha = \sigma \cos^2\alpha,$$

касательное

$$\tau_\alpha = \sigma \frac{\sin 2\alpha}{2}$$

При $\alpha = 45^\circ$ будет $\tau_{\text{макс}} = \dfrac{\sigma}{2}$

Если имеется растяжение (или сжатие) по двум взаимноперпендикулярным направлениям то для параллелепипеда имеют место следующие формулы (фиг 9)

нормальное напряжение на площадке наклоненной под углом $\alpha$ к оси $x$

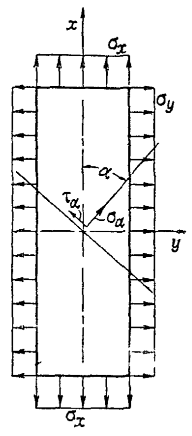
$$\sigma_\alpha = \sigma_x \cos^2\alpha + \sigma_y \sin \alpha$$

касательное напряжение

$$\tau_\alpha = \frac{1}{2} (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha,$$

относительные удлинения

$$\varepsilon_x = \frac{\sigma_x}{E} - \mu \frac{\sigma_y}{E}, \quad \varepsilon_y = \frac{\sigma_y}{E} - \mu \frac{\sigma_x}{E}$$




Фиг 9

Формулы для определения напряжений по относительным удлинениям имеют вид

$$\sigma_x = \frac{\varepsilon_x + \mu\varepsilon_y}{1 - \mu^2} E, \quad \sigma_y = \frac{\varepsilon_y + \mu\varepsilon_x}{1 - \mu^2} E$$

Формулами для определения потенциальной энергии упругой деформации в случае простого растяжения (сжатия) являются

$$U = \frac{P\Delta l}{2} = \frac{P^2 l}{2EF} = \frac{(\Delta l)^2 EF}{2l} = \frac{\sigma^2 lF}{2E},$$

удельная работа (потенциальная энергия единицы объема)

$$a = \frac{U}{lF} = \frac{\sigma^2}{2E} = \frac{E\varepsilon^2}{2}$$

## Простое растяжение (сжатие) стержня переменного сечения

Напряжение в сечении

$$\sigma = \frac{P}{F}.$$

Удлинение

$$\Delta l = \int_0^l \frac{Pdx}{EF} = \frac{1}{E}\int_0^l \sigma dx$$

Потенциальная энергия деформации

$$U = \frac{1}{2E}\int_0^l \frac{P^2}{F}dx$$

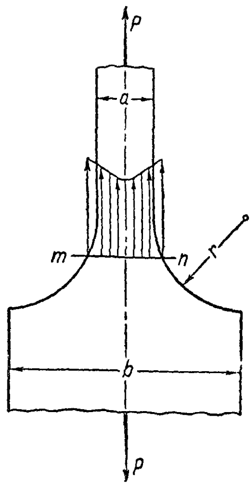
В случае растяжения пластины с довольно быстро меняющейся по дуге окружности шириной напряжение в сечении $mn$ (фиг 10) определяется по формуле

$$\sigma_{\text{макс}} = k\frac{P}{F},$$

где $k$ — коэфициент, определяемый из табл 1

Таблица 1

| $\frac{b}{a}$ \ $\frac{r}{a}$ | 1/8 | 3/16 | 1/4 | 3/8 | 1/2 |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,6 |
| 3 | 2,7 | 2,3 | 2,0 | 1,8 | 1,6 |
| 2,5 | 2,6 | 2,2 | 1,9 | 1,7 | 1,5 |
| 2 | 2,3 | 2,0 | 1,7 | 1,5 | 1,4 |
| 1,5 | 2,0 | 1,8 | 1,6 | 1,4 | 1,3 |




Фиг 10

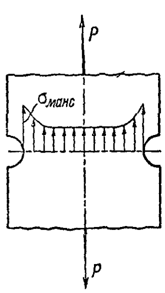
## Влияние отверстий и вырезов

В случае вырезов небольших радиусов (фиг 11) напряжение в месте вырезов определяется по формуле

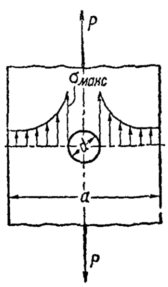
$$\sigma_{\text{макс}} = 2\frac{P}{F}$$

В случае малых отверстий в пластине $\left(\frac{a}{d} > 5\right)$ (фиг 12) максимальное напряжение в сечении с отверстием определяется по формуле

$$\sigma_{\text{макс}} = 3\frac{P}{F}$$




Фиг 11




Фиг 12

Все приведенные формулы, относящиеся к концентрации напряжений, действительны только до перехода предела пропорциональности В зоне