Е.П. Янышевский

Сферическая тригонометрия

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
Е11

Е.П. Янышевский
Е11 Сферическая тригонометрия / Е.П. Янышевский – М.: Книга по Требованию, 2019. – 156 с.

ISBN 978-5-518-08927-3

ISBN 978-5-518-08927-3

ПРЕДИСЛОВИЕ

Предлагаемый курс сферической тригонометрии написан мной на основании опыта многолетней работы по этому предмету в различных специальных школах и имеет целью дать необходимое пособие для студентов: астрономов, геодезистов, топографов, маркшейдеров.

При выводе основных формул сферической тригонометрии наряду с аналитическими методами приводятся и геометрические для развития у учащихся необходимого для их специальных работ «пространственного мышления».

Параллельно с теорией приводятся разработанные схемы решения задач по различным методам, вводящие учащихся в сферу вычислительной техники. Этим схемам придается большое значение, и учащимся рекомендуется, руководствуясь ими, решать определенные задачи, относящиеся к пройденному отделу курса, обязательно доводя решение задач до конца и проверяя получаемые результаты контрольными формулами.

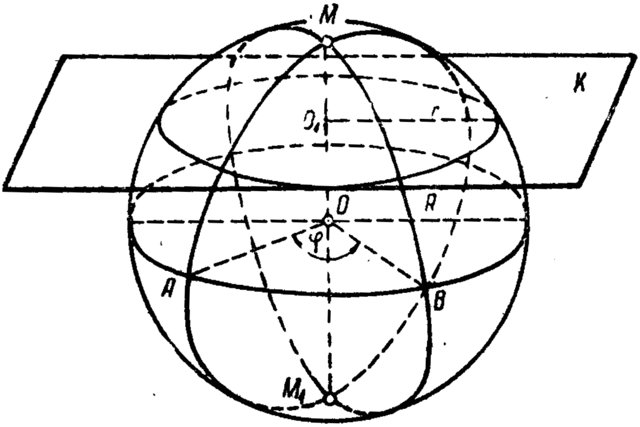
Автор

Ленинград, 1948 г.

I. ВВЕДЕНИЕ В СФЕРИЧЕСКУЮ ТРИГОНОМЕТРИЮ. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Сферическая тригонометрия имеет своим предметом решение сферических треугольников, образуемых на поверхности шара дугами больших кругов.

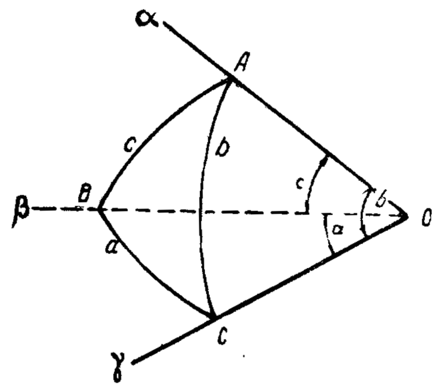
§ 1. Круги на шаре. Всякая плоскость K (черт. 1), пересекаясь с шаром, даст на шаре некоторую окружность



Черт. 1.

радиуса r. Перпендикулярный к плоскости K диаметр шара, проходя через его центр O, пересекает шар в двух точках M и M_1, называемых *сферическими* центрами круга. Круги, плоскости которых проходят через центр сферы O, называются *большими* кругами; остальные круги на сфере называются малыми кругами. Сферические центры M и M_1 большого круга называются его *полюсами*; большой круг в этом случае называется *полярой* точек M и M_1. Ясно, что полюса отстоят от соответствующих больших кругов на 90°, или четверть окружности.

§ 2. Понятие о сферическом треугольнике. Если какой-нибудь трехгранный угол с вершиной O и с ребрами $O\alpha$, $O\beta$ и $O\gamma$ пересечь сферой, имеющей центром вершину трехгранного угла, то в пересечении получатся три дуги больших кругов AB, AC и BC, которые на поверхности сферы составят фигуру, называемую *сферическим треугольником* (черт. 2).



Черт. 2.

Наоборот, если на сфере имеется треугольная фигура, составленная взаимным пересечением дуг трех больших кругов, то эту фигуру можно рассматривать как результат пересечения сферы и трехгранного угла с вершиной в центре сферы.

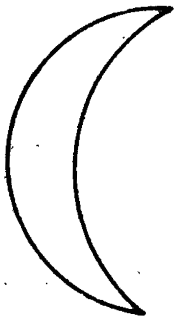
Ясно, что если на сфере задать три точки A, B и C и через каждую пару их провести дугу большого круга, то составится вполне определенный сферический треугольник ABC, так как через две точки, взятые на сфере, можно провести только одну дугу большого круга. Поэтому сферический треугольник можно определить как часть сферической поверхности, заключенной между тремя пересекающимися по две дугами больших кругов.

Будем вершины и углы сферического треугольника обозначать большими буквами латинского алфавита (A, B, C), а противоположные им стороны — соответствующими малыми буквами того же алфавита (a, b, c).

Во всяком сферическом треугольнике не может быть двух сторон, длина которых была бы более половины окружности, т. е. более 180°, потому что при двух сторонах, из которых каждая больше 180°, сферического треугольника вообще не получится, так как две эти стороны, не встречая третьей, пересекутся, образовав на сфере фигуру, называемую сферическим *двухугольником*.

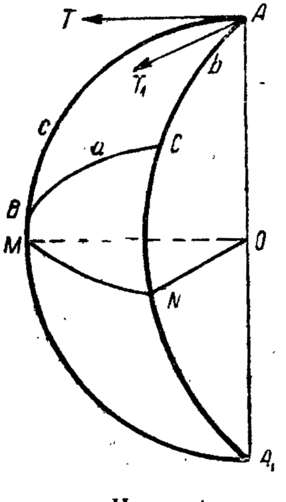
Таким образом двухугольником называется фигура на сфере, образованная двумя пересекающимися полуокружностями больших кругов (черт. 3).

Если две стороны сферического треугольника не могут быть больше 180°, то одна третья сторона может быть и больше 180°. Но мы в дальнейшем будем рассматривать только такие сферические треугольники, которые получаются на сфере от соединения попарно трех данных точек наименьшими дугами больших кругов, т. е. такие треугольники, у которых все стороны и углы меньше 180°. Такие сферические треугольники называются эйлеровыми (знаменитый математик Леонард Эйлер, 1707—1783).



Черт. 3.

Если же дан будет такой сферический треугольник, у которого какая-либо сторона будет больше 180°, то вместо него будем рассматривать другой треугольник, служащий дополнением данного до полусферы. Этот последний треугольник будет эйлеров. Зная же элементы этого вспомогательного треугольника, легко определить элементы данного.



Черт. 4.

Так как всякие два большие круга пересекаются в двух точках, находящихся на концах одного и того же диаметра, то ясно, что если продолжить какие-либо две смежные стороны сферического треугольника до второй точки их пересечения, то эта вторая точка будет лежать на одном общем диаметре с первой точкой (черт. 4).

Этим построением образуется другой сферический треугольник BCA_1, который в отношении первоначального треугольника ABC называется сопряженным треугольником по стороне a.

Стороны и углы сопряженного треугольника A_1BC легко находятся по элементам основного треугольника:

$$\angle A_1 = \angle A, \qquad \text{сторона } a \text{ общая,}$$
$$\angle BCA_1 = 180^\circ - \angle C, \qquad \text{сторона } A_1B = 180^\circ - c,$$
$$\angle A_1BC = 180^\circ - \angle B, \qquad \text{сторона } A_1C = 180^\circ - b.$$

§ 3. Измерение углов и сторон сферического треугольника. Углом между кривыми называют угол между касательными к этим кривым в точке пересечения. Поэтому под углом A сферического треугольника ABC (черт. 4)[1] будем понимать угол между касательными AT и AT_1, проведенными к его сторонам AB и AC в вершине A. Эти касательные лежат очевидно в плоскостях $ABMA_1$ и $ACNA_1$ двугранного угла MAA_1N, перпендикулярны к его ребру AA_1, т. е. образуют линейный угол этого двугранного угла. В этом смысле мы будем говорить, что двугранный угол MAA_1N измеряет сферический угол TAT_1. Отсюда угол TAT_1 равен углу MON, т. е. сферический угол A измеряется дугой MN большого круга, заключенной между его сторонами AB и AC (или продолжениями), в отношении которой вершина A угла есть полюс.

Длина стороны сферического треугольника, представляя длину дуги большого круга, проходящего между двумя его вершинами, является наикратчайшим расстоянием на сфере между ними и называется *сферическим расстоянием* между данными точками.

Измерение сферического расстояния сводится к измерению углов, что дает возможность в сферической тригонометрии сравнивать между собой линии и углы. Всякое сферическое расстояние AB соответствует в качестве дуги большого круга, проходящего через точки A и B, центральному углу AOB, равному $\varphi = \angle AMB$ (черт. 1). Так как у всех больших кругов радиус один и тот же, то расстояние AB может быть измерено непосредственно углом φ, т. е. в градусах.

Кроме градусного измерения сферического расстояния еще существует *радиальное*, единицей измерения при котором

---

[1] Заметим, что при составлении чертежа бывает выгодно одну из сторон располагать в плоскости чертежа. Так, на черт. 4 в плоскости чертежа лежит сторона AB.

принимается радиус соответствующего круга. Если мы обозначим длину сферического расстояния между двумя точками A, B в градусном измерении через φ и то же расстояние в радиальном измерении через l, то будем иметь такое соотношение:

$$\frac{\varphi^\circ}{l}=\frac{360^\circ}{2\pi R},$$

откуда

$$l=\frac{\pi\times R}{180^\circ}\varphi;\quad l=\frac{\pi}{180\times 60\times 60}\times R\times\varphi'',$$

но

$$\frac{\pi}{180\times 60\times 60}$$

есть дуга в $1''$, она с большей точностью может быть принята равной $\sin 1''$, поэтому

$$l=\varphi'' R\sin 1''.$$

§ 4. Соотношение между сторонами сферического треугольника. В трехгранном угле $OABC$ (черт. 2) плоские его углы измеряются сторонами сферического треугольника, на которые опираются, а двугранные углы измеряются соответствующими углами сферического треугольника. Такая зависимость между трехгранным углом и соответствующим ему сферическим треугольником позволяет теоремы о трехгранном угле распространить и на сферический треугольник.

1) Известно, что во всяком трехгранном угле каждый из плоских углов меньше суммы двух других плоских углов, т. е. $AOC<AOB+BOC$. Ввиду того, что эти плоские углы измеряются сторонами сферического треугольника, то $\angle AOC=b$, $\angle AOB=c$, $\angle BOC=a$. Откуда для сферического треугольника имеем: $b<a+c$, т. е. *каждая сторона сферического треугольника менее суммы двух других.*

Перенося один из членов неравенства из правой части в левую, получим вытекающее из этой теоремы первое следствие: $b-c<a$, т. е. *каждая сторона сферического треугольника больше разности двух других.*

Прибавим к обеим частям неравенства $a+c>b$ по b, получим $a+b+c>2b$ или, разделив обе части последнего неравенства на 2, имеем второе следствие из теоремы

$\frac{a+b+c}{2}>b$, т. е. *полупериметр сферического треугольника всегда более каждой из его сторон.*

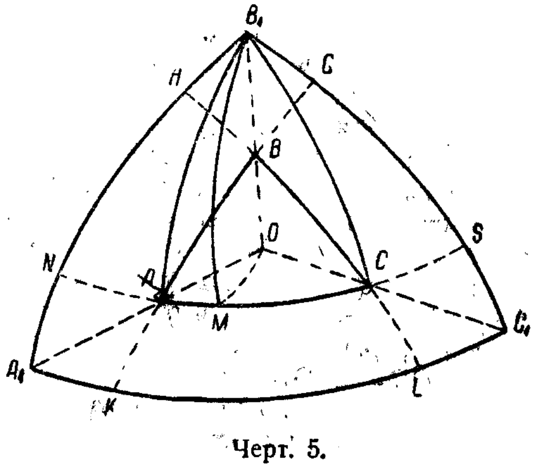
2) Известно, что во всяком трехгранном угле сумма плоских его углов менее 360°:

$$\angle AOC+\angle BOC+\angle AOB<360^\circ.$$

Заменяя плоские углы сторонами сферического треугольника, их измеряющими, будем иметь: $a+b+c<360^\circ$, т. е. *сумма сторон сферического треугольника всегда меньше 360°.*

§ 5. Полярный сферический треугольник и его свойства. Полярным треугольником для данного сферического треугольника называется такой сферический треугольник, по отношению сторон которого вершины данного являются полюсами.

Построим полярный треугольник для данного сферического треугольника ABC (черт. 5). Из точки A радиусом, рав-



Черт. 5.

ным 90°, проведем на сфере дугу B_1C_1, тогда точка A будет полюсом для проведенной дуги. Точно так же из точки B проведем дугу A_1C_1 и из точки C дугу A_1B_1. Тогда треугольник $A_1B_1C_1$ будет полярный для данного треугольника ABC.

Нетрудно видеть, что вершины построенного полярного треугольника суть полюсы для сторон данного треугольника.

Проведем через точки B_1, A и B_1, C дуги больших кругов. Тогда, если вершина A является полюсом дуги B_1C_1, каждая точка этой дуги отстоит от A на 90°, а потому дуга большого круга AB_1 будет равна 90° и центральный угол B_1OA, опирающийся на нее, будет прямой.

Таким же образом, рассуждая по отношению вершины C и дуги A_1B_1, придем к заключению, что угол B_1OC будет тоже прямой.

Но если прямая B_1O перпендикулярна к двум прямым, проведенным на плоскости A_1OC_1, то она будет перпендикулярна и ко всякой третьей линии, проведенной в этой плоскости через ее основание, т. е. дуга большого круга, соединяющая вершину полярного треугольника B_1 с любой точкой M, лежащей на стороне основного треугольника AC, будет равна 90°. Заключение: вершина B_1 полярного треугольника является полюсом для стороны AC основного треугольника.

Точно так же можно доказать, что две другие вершины полярного треугольника A_1 и C_1 являются полюсами для сторон начального треугольника BC и AB.

Итак: *если один сферический треугольник полярен относительно другого, то и второй будет полярен относительно первого* (т. е. треугольники будут взаимно полярны).

Теорема. *Стороны и углы двух полярных относительно друг друга треугольников попарно взаимно дополняют друг друга до 180°.*

Доказательство. Дано, что треугольники ABC и $A_1B_1C_1$ полярны один относительно другого (черт. 5).

Будем обозначать углы и стороны основного треугольника через A, B, C, a, b, c, элементы же построенного для него полярного треугольника теми же буквами, только с индексами A_1, B_1, C_1, a_1, b_1, c_1.

а) Докажем, что угол основного сферического треугольника, например B, сложенный со стороной полярного треугольника b_1, дает в сумме 180°.

Продолжим дуги больших кругов BA и BC на сфере до пересечения со стороной полярного треугольника A_1C_1 в точках K и L.

Мы знаем, что сферический угол измеряется дугою большого круга, содержащегося между его сторонами, в отношении которой вершина угла есть полюс, а поэтому угол B измеряется дугою KL. Поэтому $B+b_1=KL+A_1C_1$. Заменяя в этом равенстве A_1C_1 через $A_1K+KL+LC_1$, а затем объединяя слагаемые по порядку по два, получим:

$$B+b_1=KL+A_1K+KL+LC_1=A_1L+KC_1.$$

Ввиду того, что точка C_1 есть полюс дуги BK, находим, что $KC_1=90°$; ввиду того, что точка A_1 есть полюс дуги BL, имеем: $A_1L=90°$.

Итак, $B+b_1=90°+90°=180°$.

Точно таким же образом доказывается, что

$$A+a_1=180°, \quad C+c_1=180°,$$

т. е. сумма угла данного сферического треугольника и соответствующей стороны полярного треугольника равна 180°.

б) Нетрудно доказать, что *сумма угла полярного треугольника и соответствующей стороны основного равна 180°.* Докажем, например, что $B_1+b=180°$. Угол B_1 измеряется дугою NS; поэтому $B_1+b=NS+AC$; но вместо NS, как показывает чертеж, можно поставить сумму $NC+CS$, а вместо AC разность $AS-CS$, тогда будем иметь:

$$B_1+b=NC+CS+AS-CS=NC+AS=90°+90°=180°.$$

Заметим, что доказанное очевидно и в силу взаимной полярности треугольников.

в) Следует заметить: если каждая сторона одного треугольника меньше 90°, то построенный для него полярный треугольник будет находиться вне данного, как видим это на черт. 5; если же какие-либо стороны одного треугольника больше 90°, а другие меньше 90°, то его полярный треугольник будет пересекать стороны данного; наконец, если каждая из сторон данного треугольника больше 90°, то его полярный треугольник будет находиться внутри него.

Свойствами полярного треугольника мы будем пользоваться в дальнейшем при выводе различных формул сферической тригонометрии.

Понятие о полярном треугольнике введено в науку в XVIII веке геометром Снеллиусом.

§ 6. Соотношение между углами сферического треугольника. а) Для данного сферического треугольника ABC