

Ш.Ж. Валле-Пуссен

**Курс анализа бесконечно
малых**

Том 2

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Ш11

Ш11 **Ш.Ж. Валле-Пуссен**
Курс анализа бесконечно малых: Том 2 / Ш.Ж. Валле-Пуссен – М.: Книга
по Требованию, 2022. – 469 с.

ISBN 978-5-458-25162-4

Одно из первых изданий в нашей стране книги знаменитого математика. Названия различных математических терминов пишется латиницей. Книга посвящена кратным интегралам, рядам полиномов и тригонометрическим рядам, различным видам дифференциальных уравнений и др.

ISBN 978-5-458-25162-4

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2022

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2022

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ КРАТНЫХ ИНТЕГРАЛОВ.

§ 1. Двойные интегралы.

1. Понятия, связанные с областью D изменения двух переменных. Отнесем переменные x, y к двум прямоугольным осям. Проведем в плоскости xy простой контур C , т. е. замкнутый контур, не пересекающий сам себя. Этот контур ограничивает часть D плоскости. Если точка $M(x, y)$, представляющая систему значений x, y , может занимать всевозможные положения внутри контура C и на самом контуре, мы будем говорить, что переменные x, y изменяются в области D .

Во избежание неясностей, мы будем предполагать, что контур C может быть разложен на конечное число частей, на каждой из которых, при описывании контура, x и y изменяются в одном направлении. Очевидно, что такого рода часть (если только она не представляет прямолинейного отрезка, параллельного одной из осей) может быть пересечена прямой, параллельной оси x -ов или оси y -ов, лишь в одной точке.

Рассматриваемая область D может также состояться частью плоскости, расположенной внутри некоторого контура C и вне других контуров $C', C'', \dots$, подчиненных тем же ограничениям, что и C . Наконец, область D может состоять из нескольких отдельных областей $D', D'', \dots$, подобных только-что определенной области. Во всех этих случаях область D имеет *сложный контур*.

Контур $C, C', \dots$ составляют *границу* области D . Эта граница, по определению, входит в состав самой области.

Диаметром области D называется максимум расстояния двух ее точек (следовательно, двух точек ее границы).

Понятие об области и ее границе можно обобщить; эти обобщения и общие определения относятся к теории совокупностей *).

2. Свойства непрерывных функций **). Функция $f(x, y)$ непрерывна в точке (a, b) области D , если колебание этой функции стремится к нулю в каждой части области D , которая содержит точку (a, b) и диаметр которой стремится к нулю.

Функция $f(x, y)$ непрерывна в области D , если она непрерывна в каждой точке этой области.

*) См. Введение, т. I, § 11.

**) См. также Введение (т. I, § 4).

Следующие теоремы являются основными в теории двойных интегралов.

I. Если невозможно разложить область D с помощью прямых, параллельных осям, на части (прямоугольные, исключая прилежащих к контуру) так, чтобы колебание функции $f(x, y)$ было $< \varepsilon$ (где ε — данное положительное число) в каждой части, эта функция $f(x, y)$ непрерывна в области D .

Действительно, если с помощью секущих разложить область D на несколько частей, то, по крайней мере, одну из этих частей также невозможно разложить на части указанного свойства (ибо иначе это было бы возможно для всей области). Следовательно, можно найти в D часть D_1 сколь угодно малого диаметра, в которой упомянутое разложение невозможно; затем, в D_1 можно найти часть D_2 еще меньшего диаметра, в которой все же разложение невозможно, и т. д. Таким образом мы построим бесконечную последовательность областей $D, D_1, D_2, \dots, D_n, \dots$ с бесконечно убывающими диаметрами. Каждая из них содержится в предыдущей и в каждой колебание функции $f(x, y)$ остается $\geq \varepsilon$. Эти области имеют общую им всем предельную точку M , которая, следовательно, содержится в области D_n сколь угодно малого диаметра, в которой однако колебание функции $f(x, y) \geq \varepsilon$; в этой точке $f(x, y)$ имеет разрыв.

II. Если функция $f(x, y)$ непрерывна в области D , то для каждого положительного числа ε существует такое число δ , что колебание функции в каждой части области D , с диаметром $< \delta$, будет $< \varepsilon$.

Разложим, согласно теореме I, область D на прямоугольники и части прямоугольников, в которых колебание функции $f(x, y)$ было бы $< \varepsilon : 2$. Пусть δ будет наименьшая из сторон этих прямоугольников. Колебание $f(x, y)$ будет $< \varepsilon$ в каждой части области D , достаточно малой, чтобы не захватывать двух не соприкасающихся прямоугольников, следовательно, в каждой части диаметра $< \delta$.

III. Пусть x, y и x', y' будут две точки области D ; каждому положительному числу ε соответствует такое число δ , что неравенство

$$|f(x, y) - f(x', y')| < \varepsilon$$

выполняется, лишь только $|x' - x| < \delta$ и $|y' - y| < \delta$.

Действительно, достаточно выбрать δ столь малым, чтобы колебание функции $f(x, y)$ было $< \varepsilon$ в каждом квадрате со стороной $< \delta$.

Последнее свойство часто формулируют, говоря, что $f(x', y')$ равномерно стремится к пределу $f(x, y)$, если точка x', y' области D стремится к другой точке x, y той же области. Наконец, это же свойство выражают так: функция, непрерывная в области D , равномерно непрерывна в этой области.

IV. Если функция $f(x, y)$ непрерывна во всех точках, у которых ордината равна β , а абсцисса содержится в промежутке (a, A) , то каждому положительному числу ε соответствует такое число δ , что неравенство

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| < \varepsilon$$

выполняется для каждого значения x в промежутке (a, A) , при условии, что $|y - \beta| < \delta$.

Предположим, что это утверждение не выполняется для некоторого данного ε . Разделим пополам промежуток (a, A) изменения x ; наше утверждение не выполняется хотя для одной из половин, ибо, в противном случае, оно выполнялось бы для всего промежутка значений x . Эту половину разделим снова пополам, и т. д. Последовательность этих промежутков, каждый из которых составляет половину предшествующего, имеет предельную точку $x = \alpha$, содержащуюся во всех промежутках. Таким образом, эта точка α принадлежит сколь угодно малому промежутку значений x , для которого утверждение теоремы оказывается неверным; иными словами, при данном ε , можно удовлетворить условию

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| \geq \varepsilon$$

для x и y , сколь угодно близких, соответственно, к α и β . Следовательно, $f(x, y)$ имеет разрыв в точке α, β , вопреки предположению.

3. Непрерывность определенного интеграла по отношению к параметру. Если функцию $f(x, y)$, зависящую от параметра y , проинтегрировать по x , то ясно, что результат будет функцией $\varphi(y)$ от этого параметра. Следующие теоремы устанавливают условия непрерывности этой функции.

1. Если функция $f(x, y)$ непрерывна относительно x, y в прямоугольнике R , ограниченном прямыми $x = a, x = A$ и $y = b, y = B$, или, общее, если эта функция ограничена в названном прямоугольнике и имеет лишь ограниченное число точек разрыва для каждого частного значения y *, интеграл

$$\varphi(y) = \int_a^A f(x, y) dx$$

является непрерывной функцией от y в промежутке (b, B) .

Возьмем частное значение $y = \beta$ в этом промежутке и покажем, что $\varphi(y)$ непрерывна в точке β .

Предположим сначала, что функция $f(x, y)$ не имеет точек разрыва с ординатой β . Имеем:

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| \leq \int_a^A |f(x, y) - f(x, \beta)| dx.$$

Применим теорему IV предшествующего п⁰. Сколь бы малым ни взять ε , можно предположить, что в этом интеграле

$$|f(x, y) - f(x, \beta)| < \varepsilon$$

при условии лишь, что $|y - \beta| < \delta$; отсюда

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| < \varepsilon(A - a),$$

*) Теорема и ее доказательство без труда распространяются и на случай, когда совокупность этих точек разрыва имеет меру 0 (в смысле Lebesgue'a).

так что приращение функции $\varphi(y)$ может быть сделано сколь угодно малым, и эта функция в точке β непрерывна.

Это доказательство легко распространяется на случай, когда функция $f(x, y)$ имеет конечное число точек разрыва с ординатой β . Допустим для определенности, что имеется одна лишь такая точка, абсцисса которой α содержится между a и A . Обозначив через ε произвольно малое число, произведем разложение

$$|\varphi(y) - \varphi(\beta)| \leq \int_a^{\alpha-\varepsilon} |f(x, y) - f(x, \beta)| dx + \int_{\alpha+\varepsilon}^A |f(x, y) - f(x, \beta)| dx + \int_{\alpha-\varepsilon}^{\alpha+\varepsilon} |f(x, y) - f(x, \beta)| dx.$$

Прежде всего можно последний интеграл сделать, вместе с ε , сколь угодно малым, ибо если M есть верхняя граница $|f(x, y)|$, этот интеграл не превосходит $4M\varepsilon$, по теореме о среднем. Затем, как и в предшествующем рассуждении, остальные два интеграла становятся бесконечно малыми вместе с $|y - \beta|$, ибо из них точка разрыва с ординатой β исключена. Итак, приращение $\varphi(y)$ снова может быть сделано сколь угодно малым, и $\varphi(y)$ непрерывна в точке β .

II. Рассмотрим теперь интеграл, пределы которого $x_1 = \varphi_1(y)$ и $x_2 = \varphi_2(y)$ представляются непрерывными функциями от y в промежутке (b, B) . Пусть этот интеграл будет

$$\varphi(y) = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx.$$

Он представляет и в этом случае непрерывную функцию от y в промежутке (b, B) , если только функция $f(x, y)$ непрерывна в области D^* , содержащейся между двумя кривыми $x = \varphi_1(y)$, $x = \varphi_2(y)$ и двумя прямыми $y = b$ и $y = B$, или, если эта функция ограничена в области D и имеет в этой области, для каждого частного значения y , лишь конечное число точек разрыва.

Эта теорема приводится к предыдущей. Действительно, область D может быть заключена в прямоугольник R , ограниченный прямыми $y = b$, $y = B$ и надлежаще выбранными прямыми $x = a$, $x = A$. Обозначим через $f_1(x, y)$ функцию, равную $f(x, y)$ в каждой точке D и 0 вне D . Эта функция в прямоугольнике R не имеет иных точек разрыва, кроме точек разрыва функции $f(x, y)$ в области D и точек границы этой области. Для каждого значения y таких точек может быть лишь конечное число. Следовательно, интеграл

$$\int_a^A f_1(x, y) dx$$

есть непрерывная функция от y в промежутке (b, B) . Но этот интеграл приводится к $\varphi(y)$, в силу определения f_1 , что и доказывает теорему.

*) Эта область не стеснена ограничениями п^о 1.

4. Определение двойного интеграла в прямоугольнике с помощью простых интегралов. Рассмотрим непрерывную функцию $f(x, y)$ в прямоугольнике R , ограниченном прямыми $x=a$, $x=A$ и $y=b$, $y=B$. Интеграл, взятый по x в предположении неизменности y ,

$$\int_a^A f(x, y) dx \quad (1)$$

является непрерывной функцией от y в промежутке (b, B) , которая, следовательно, может быть проинтегрирована, в свою очередь, в этом промежутке. Это интегрирование приводит нас к следующему выражению:

$$\int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx, \quad (2)$$

которое содержит два знака интеграла и называется, в связи с этим, *двойным интегралом*. Переменные x , y , фигурирующие в этом интеграле, изменяются в прямоугольнике R . Последний называется *областью интегрирования*.

Мы предположили, что функция $f(x, y)$ непрерывна в области R , но выражение (2) сохраняет смысл и при более общих условиях.

Предположим, действительно, что функция $f(x, y)$, оставаясь ограниченной в прямоугольнике R , имеет в нем точки разрыва, которые все расположены на *конечном числе* непрерывных линий, которые мы назовем *линиями разрыва*. При этом точки разрыва могут быть рассеяны по этим линиям или заполнять их целиком, так что функция может иметь и изолированные точки разрыва.

Двойной интеграл сохраняет вполне определенный смысл, если линии разрыва состоят из прямых, параллельных осям координат, и из линий, которые лишь в конечном числе точек пересекаются прямыми, параллельными осям.

Действительно, в силу теоремы I предшествующего п⁰, интеграл (1) является непрерывной функцией от y , за исключением отдельных значений, соответствующих линиям разрыва, параллельным оси x -ов. Но так как интеграл для этих исключительных значений y и вблизи их остается ограниченным, он все же является интегрируемой по y в (b, B) функцией, так что выражение (2) сохраняет определенное значение.

Впредь мы будем предполагать, что если $f(x, y)$ не непрерывна в прямоугольнике R , ее точки разрыва удовлетворяют указанным выше условиям.

Двойной интеграл обладает следующим основным свойством, которое позволит нам преобразовать его определение:

Если m и M суть нижняя и верхняя границы функции $f(x, y)$ в области интегрирования и R — площадь этой области, то двойной интеграл содержится между mR и MR .

Действительно, по теореме о среднем,

$$m(A - a) \leq \int_a^A f(x, y) dx \leq M(A - a).$$

Помножив эти неравенства почленно на dy , проинтегрируем их от b до B и заметим, что $(A - a)(B - b) = R$; мы получим:

$$mR \leq \int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx \leq MR. \quad (3)$$

5. Определение двойного интеграла в прямоугольнике, как предела сумм. Разложим прямоугольник R на прямоугольные части с помощью двух систем прямых, параллельных осям; при этом прямые, параллельные оси y -ов, пусть имеют абсциссы $x_1 = a, x_2, \dots, x_{n+1} = A$, а прямые, параллельные оси x -ов, имеют ординаты $y_1 = b, y_2, \dots, y_{m+1} = B$. Обозначим через α_{ik} площадь прямоугольника, содержащегося между прямыми $x = x_i, x = x_{i+1}$ и $y = y_k, y = y_{k+1}$; наконец, пусть M_{ik} и m_{ik} будут верхней и нижней границами функции $f(x, y)$ в прямоугольнике α_{ik} . Соотношение (3), примененное к этому прямоугольнику, даст

$$m_{ik} \alpha_{ik} \leq \int_{y_k}^{y_{k+1}} dy \int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x, y) dx \leq M_{ik} \alpha_{ik}.$$

Сложив все неравенства этого вида, при всех возможных значениях i и k , получим:

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m m_{ik} \alpha_{ik} \leq \int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx \leq \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m M_{ik} \alpha_{ik}.$$

Мы видим, что двойной интеграл содержится между двумя двойными суммами. Докажем, что он является общим пределом этих сумм, когда оба измерения всех прямоугольников нашей сети (которую мы покрыли основным прямоугольником R) стремятся к нулю, причем число их бесконечно возрастает.

С этой целью достаточно доказать, что разность двух двойных сумм

$$\sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^m (M_{ik} - m_{ik}) \alpha_{ik} \quad (4)$$

имеет пределом нуль.

Это заключение непосредственно получается, если функция $f(x, y)$ непрерывна в области R , ибо, согласно теореме II п° 2, все колебания $M_{ik} - m_{ik}$ становятся меньшими произвольно заданного положительного числа ϵ , когда области α_{ik} стремятся к нулю. Следовательно, сумма (4) также может быть сделана произвольно малой, ибо, когда все колебания $< \epsilon$, она становится меньшей, чем $\epsilon \sum \sum \alpha_{ik} = \epsilon R$.

Это заключение остается в силе, если функция $f(x, y)$, оставаясь ограниченной, имеет точки разрыва, лишь бы линии разрыва удовлетворяли условиям предшествующего п°. Действительно, ко-

лебания $M_{ik} - m_{ik}$ становятся меньшими « во всех элементах α_{ik} , когда последние стремятся к нулю, исключая, быть может, элементы, пересекаемые линиями разрыва, или элементы, бесконечно к этим линиям приближающиеся. Но так как линии разрыва могут быть заключены в сколь угодно малую окрестность, в которую войдут все исключительные элементы, сумма площадей этих элементов, а с ними и сумма соответствующих членов в выражении (4), может быть сделана сколь угодно малой. Следовательно, выражение (4) имеет пределом нуль.

Установленную только-что теорему можно формулировать следующим образом, если устранить лишь ставшие бесполезными двойные значки:

Двойной интеграл от $f(x, y)$ в прямоугольнике R является общим пределом двух сумм

$$\sum_R m_i \alpha_i, \quad \sum_R M_i \alpha_i,$$

получаемых путем разложения R на бесконечно малые прямоугольные элементы α_i и сложения произведений площадей всех этих элементов соответственно на нижние и верхние границы m_i и M_i функции $f(x, y)$ в этих элементах.

6. Теорема об обращении порядка интегрирований. Новое обозначение двойного интеграла. Во всех рассуждениях предыдущего п^о можно переставить переменные x и y . Так как определение двойного интеграла, как предела сумм, не зависит от порядка, в котором рассматриваются эти переменные, то мы получаем следующую теорему:

Значение двойного интеграла в прямоугольнике R не зависит от порядка, в котором производятся интегрирования, т. е.

$$\int_a^A dx \int_b^B f(x, y) dy = \int_b^B dy \int_a^A f(x, y) dx.$$

Впредь, для представления двойного интеграла в прямоугольнике R , естественно применять обозначения, которые напоминали бы одновременно и об его определении, как предела сумм, и об его сведении к двум последовательным простым интегрированиям.

Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$$\int_R \int f(x, y) dR \quad \text{или} \quad \int_R \int f(x, y) dx dy.$$

Выражение $f(x, y) dx dy$, к которому применяется двойное интегрирование, называется элементом двойного интеграла.

7. Двойной интеграл в области произвольного вида. Определение двойного интеграла, как предела сумм, распространяется без труда на случай области, ограниченной какими-либо кривыми, удовлетворяющими условиям п^о1.

Пусть D будет такой областью. Рассмотрим функцию $f(x, y)$,

непрерывную в этой области, или же ограниченную и имеющую линии разрыва, подчиненные тем же условиям, что и выше (п^о 4). С помощью двух систем прямых, параллельных осям, можно разложить D на бесконечно малые элементы α_i . Все эти элементы будут прямоугольниками, кроме тех, которые примыкают к границе области. Пусть M_i и m_i будут верхней и нижней границами $f(x, y)$ в α_i . Следующая теорема приводит к определению двойного интеграла в области D :

Две суммы, распространенные на все элементы D ,

$$\sum_D M_i \alpha_i, \quad \sum_D m_i \alpha_i, \quad (1)$$

стремятся к одному и тому же пределу, когда элементы α_i бесконечно убывают в обоих направлениях. Этот общий предел есть двойной интеграл $\int \int f(x, y) dx dy$ в области D и выражается обозначениями:

$$\int_D \int f(x, y) dx dy \quad \text{или} \quad \int_D \int f(x, y) dD.$$

Действительно, этот предел легко приводится к двойному интегралу, распространенному на прямоугольник. Для этого опишем вокруг области D прямоугольник R со сторонами, параллельными осям. Пусть A и a будут крайними значениями абсцисс, а b и B — крайними значениями ординат точек этого прямоугольника.

Обозначим через $f_1(x, y)$ функцию, равную $f(x, y)$ во всех точках D и нулю — вне D . Точки разрыва этой функции удовлетворяют указанным выше условиям, так что двойной интеграл от $f_1(x, y)$ в R представляется вполне определенным.

Разложим R на бесконечно малые прямоугольные элементы α_i , вместе с чем определенным образом разложится и область D . Построим для функции f и всего прямоугольника R две суммы:

$$\sum_R M_i \alpha_i, \quad \sum_R m_i \alpha_i, \quad (2)$$

аналогичные суммам (1) занимающей нас теоремы, но имеющие пределом интеграл от f_1 в R . Члены, соответствующие элементам α_i , расположенным вне D , равны нулю; члены же, соответствующие элементам, расположенным внутри D , оказываются теми же

в суммах (2), что и в суммах (1). Итак, соответствующие суммы $\sum_D$

и $\sum_R$ могут, в действительности, отличаться лишь членами, соот-

ветствующими тем элементам α_i , которые касаются границы области D . Но, так как сумма этих элементов, следовательно,

и упомянутых членов стремится к нулю, то обе суммы $\sum_D$ и $\sum_R$

имеют один и тот же предел. Таким образом, как мы и утверждали, получается, что

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_R \int f_1(x, y) dR.$$

8. Приведение к простым интегралам. *Двойной интеграл в области D также может быть приведен к двум последовательным интегралам по отношению к x и к y .*

В самом деле, на основании предшествующего, имеем

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_b^B dy \int_a^A f_1(x, y) dx = \int_a^A dx \int_b^B f_1(x, y) dy.$$

Предположим, что (как это обычно и имеет место) контур области D пересекается любой параллелью оси x -ов или оси y -ов лишь в двух точках. Тогда, при каждом значении x между a и A , y изменяется между двумя значениями y_1 и y_2 , зависящими от x ; подобным же образом, при каждом значении y между b и B , x изменяется между двумя значениями x_1 и x_2 , зависящими от y . Можно в предшествующих формулах устранить промежутки интегрирования, в которых f_1 равна нулю; так как в остальных промежутках $f_1 = f$, то получим:

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int_b^B dy \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx = \int_a^A dx \int_{y_1}^{y_2} f(x, y) dy.$$

В общем случае, каков бы ни был контур области D , можно написать формулу приведения в виде

$$\int_D \int f(x, y) dx dy = \int dy \int f(x, y) dx = \int dx \int f(x, y) dy.$$

Но этот результат нуждается в следующих пояснениях:

Предположим, что мы сначала интегрируем по x , а затем по y . Рассматривая y , как постоянную, мы интегрируем по x во всех промежутках, в которых $f_1 = f$, т. е. во всех тех, которые, при данном значении y , дают точки области D . Другими словами, интегрирование по x распространяется на сечение области D прямой с ординатой y . Результат представит собою функцию от y , которую интегрируют затем по y между крайними значениями ординаты в области D .

9. Свойства двойного интеграла. 1. Пусть D будет площадью области интегрирования, M и m — верхней и нижней границами функции $f(x, y)$ в D ; тогда

$$MD \geq \int_D \int f(x, y) dx dy \geq mD.$$

Действительно, двойной интеграл есть общий предел двух сумм $\sum M_i \alpha_i$ и $\sum m_i \alpha_i$, каждая из которых содержится между $M \sum \alpha_i$ и $m \sum \alpha_i$, т. е. между MD и mD .

II. Если, в частности, положить $f=1$, то получим площадь области интегрирования в виде двойного интеграла

$$D = \int_D \int dx dy.$$

III. Если разложить область с помощью секущих на несколько частей, то интеграл в D будет суммой интегралов, взятых в каждой части.

При доказательстве мы можем предположить, что область D одной секущей разложена на две части D' и D'' , так как всякий другой случай может быть исчерпан повторным применением этого рассуждения.

Покроем тогда D сетью прямоугольников α_i , как и прежде, и рассмотрим сумму $\sum M_i \alpha_i$, которая имеет пределом интеграл в области D . Если пренебречь элементами, задетыми секущей, она разлагается на две суммы, имеющие предельные интегралы в D' и в D'' . Но элементы, рассеянные секущей, дают сумму, стремящуюся к нулю. Таким образом, пренебрегая ими, мы не совершим ошибки, что и доказывает теорему.

10. Обобщение определения двойного интеграла. Пусть D — область интегрирования. Разложим ее прямыми или кривыми на элементы с вполне определенными площадями α_i . Пусть M_i и m_i будут границами $f(x, y)$ в α_i .

Двойной интеграл от $f(x, y)$ в области D есть общий предел двух сумм

$$\sum M_i \alpha_i, \quad \sum m_i \alpha_i,$$

распространенных на все элементы α_i области D , когда все эти элементы бесконечно убывают в обоих направлениях.

В самом деле, по свойству I предшествующего п⁰,

$$M_i \alpha_i \geq \int_{\alpha_i} f(x, y) dz_i \geq m_i \alpha_i;$$

сложив почленно все аналогичные неравенства, по свойству III получим:

$$\sum M_i \alpha_i \geq \int_D \int f(x, y) dx dy \geq \sum m_i \alpha_i.$$

Покажем теперь, что разность $\sum (M_i - m_i) \alpha_i$ крайних сумм стремится к нулю, откуда будет следовать, что оба они имеют пределом двойной интеграл.

Заключение относительно упомянутой разности непосредственно