

Мустафина Д.А., Ребро И.В., Короткова Н.Н.

**Математический анализ в схемах и
таблицах**

(для технических вузов)

УДК 50
ББК 22
М91

М91 **Мустафина Д.А.**
Математический анализ в схемах и таблицах: (для технических вузов) / Мустафина Д.А., Ребро И.В., Короткова Н.Н. – М.: Lennex Corp, — Подготовка макета: Издательство Нобель Пресс, 2023. – 52 с.

ISBN 978-5-518-84102-4

Учебное пособие (справочное) рассчитано на студентов всех форм и направлений высших технических заведений. В пособии предложены логические схемы и таблицы, которые позволяют студентам легче запомнить основные понятия, глубже осмыслить и понять изучаемый материал. Наглядно-образное представление теоретического материала в виде логических схем способствуют восстановлению материала, выделению основных объектов темы, установлению связи между объектами. При составлении логических схем была произведена глубокая фильтрация и максимальное сжатие текста, значительно большее, чем на лекциях. Целенаправленное упорядочивание и структурирование учебной информации способствует формированию соответствующих новому образовательному стандарту профессиональных компетенций.

ISBN 978-5-518-84102-4

© Издательство Нобель Пресс, 2023
© Мустафина Д.А., 2023

ОГЛАВЛЕНИЕ

Оглавление	3
Предисловие.	5
1. Функция одной переменной	6
1.1. Основные элементарные функции	6
1.2. Гиперболические функции	9
1.3. Графики некоторых функций, заданных параметрически и в полярных координатах.	10
2. Последовательности. Предел числовой последовательности	19
3. Дифференцирование функции одной переменной	21
3.1. Основные понятия	21
3.2. Некоторые приложения производной функции одной переменной	22
4. Интегрирование функции одной переменной	24
4.1. Таблица интегрирования основных элементарных функций	24
4.2. Интегрирование по частям	25
4.3. Интегрирование рациональных дробей	26
4.4. Интегрирование тригонометрических функций	27
4.5. Интегрирование иррациональных функций	28
4.6. Структура интегрального исчисления функции одной переменной	29
4.7. Геометрические приложения определенного интеграла	30
4.8. Физические приложения определенного интеграла	31
4.9. Экономические приложения определенного интеграла	32
4.10. Химические приложения определенного интеграла	33
4.11. Биологические приложения определенного интеграла	34
4.12. Географические приложения определенного интеграла	34
5. Кратные интегралы	35
5.1. Свойство кратных интегралов	35
5.2. Некоторые геометрические и механические приложения кратных интегралов	35
6. Криволинейные интегралы	37
6.1. Криволинейные интегралы и их применение	37
6.2. Связь криволинейных и кратных интегралов	38
7. Комплексные числа	39
7.1. Основные понятия комплексных чисел	39
7.2. Действия над комплексными числами	40
7.3. Функция комплексной переменной	41

8.	Дифференциальные уравнения	42
8.1.	Дифференциальные уравнения первого порядка	42
8.2.	Дифференциальные уравнения второго порядка	43
8.3.	Линейные однородные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами	44
8.4.	Линейные дифференциальные уравнения высших порядков с постоянными коэффициентами со специальной правой частью	44
9.	Системы линейных дифференциальных уравнений	49
10.	Числовые ряды	50
11.	Функциональные ряды	51
12.	Операционные исчисления	52
12.1	Свойства преобразования Лапласа	52
12.2	Таблица оригиналов и изображений	53
	Список использованной литературы	52

ПРЕДИСЛОВИЕ

Современному обществу необходимы саморазвивающиеся и самореализующиеся специалисты, способные интегрировать идеи из различных областей науки и техники, умеющие целостно воспринимать производственный процесс, умеющие самостоятельно оценить проблему и найти эффективные пути её решения. Задачей высшей технической школы на современном этапе является интеграция специальной профессиональной подготовки с изучением фундаментальных основ профессиональной деятельности.

Одной из фундаментальных наук является математика, в процессе изучения которой формируется математическая компетентность. Математическая компетентность специалиста проявляется в его способности к математическому моделированию инженерных задач, к переводу качественных обыденных или интуитивных описаний действительности, базирующиеся на приблизительных описаниях и образах, на язык математических моделей, определений и формул, из которых возможны количественные выводы и которые позволяют с помощью математических методов исследовать процессы, протекающие в инженерной сфере.

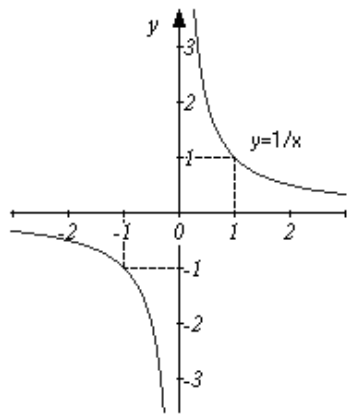
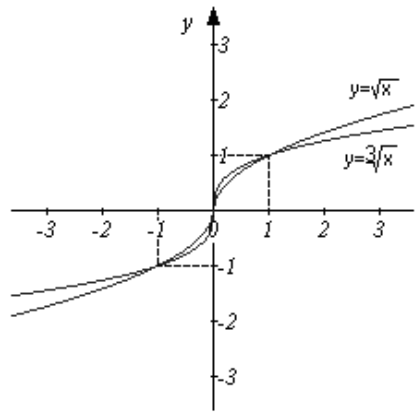
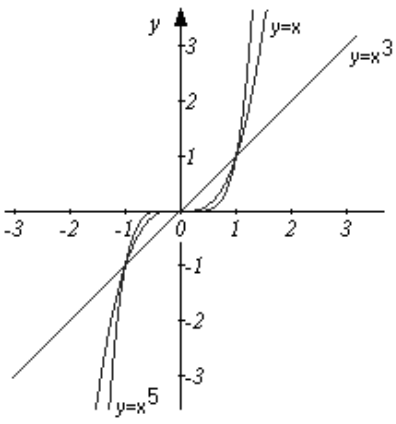
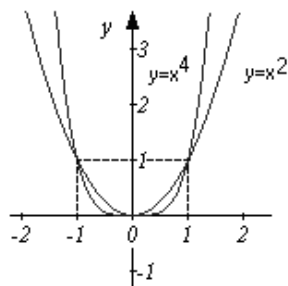
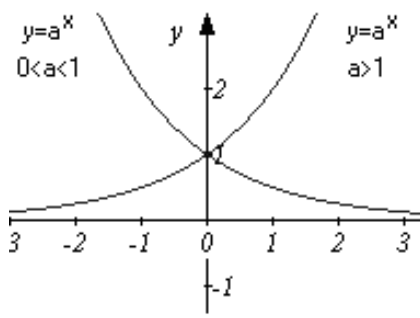
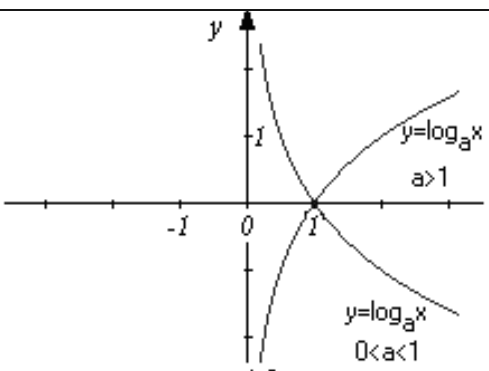
В связи с переходом на новые образовательные стандарты, перераспределены часы общеобразовательных дисциплин: сократили аудиторные часы за счет увеличения часов на самостоятельную работу. Такое перераспределение произошло и по дисциплине «Математический анализ». Для решения сложившейся проблемы было разработано учебное пособие (справочное), направленное на визуализацию методов и способов решения возможных инженерных задач, которые могут возникнуть в профессиональной деятельности.

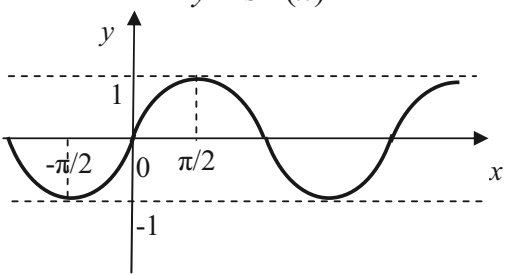
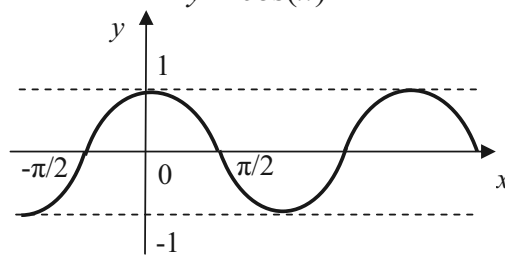
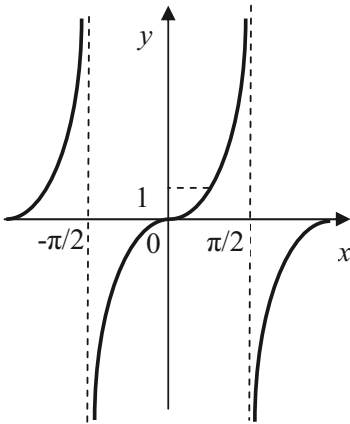
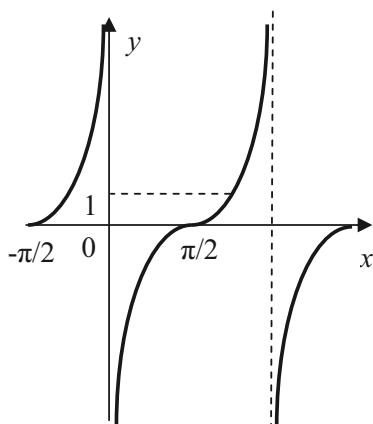
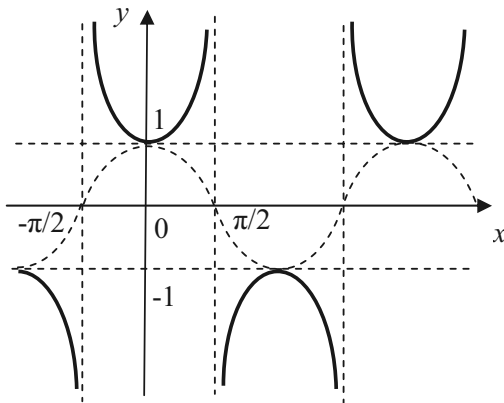
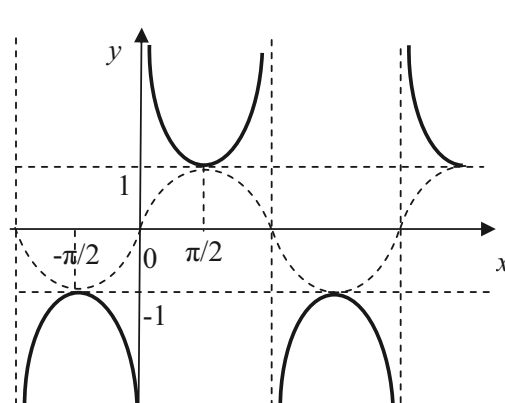
Изложение материала по дисциплине «Математический анализ» является объемным, а в связи с этим и трудоемким для запоминания студентами-первокурсниками, в пособии предложены логические схемы и таблицы, которые позволяют студентам легче запомнить основные понятия, глубже осмыслить и понять изучаемый материал. Наглядно-образное представление теоретического материала в виде логических схем способствуют восстановлению материала, выделению основных объектов темы, установлению связи между объектами. При составлении логических схем была произведена глубокая фильтрация и максимальное сжатие текста, значительно большее, чем на лекциях. В результате студент учится чувствовать логику и систему изложения материала, концентрировать внимание на самом материале, улучшается запоминание и общее усвоение материала. Целенаправленное упорядочивание и структурирование учебной информации способствует формированию соответствующих новому образовательному стандарту профессиональных компетенций.

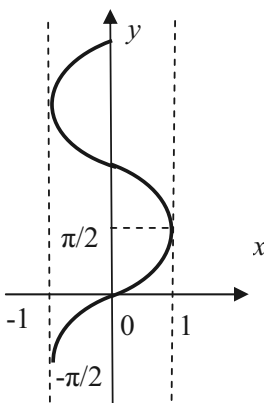
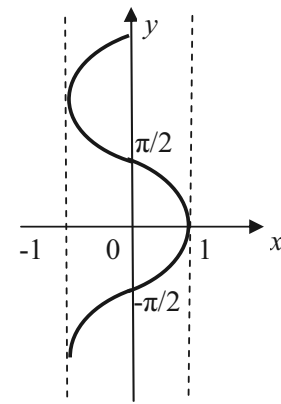
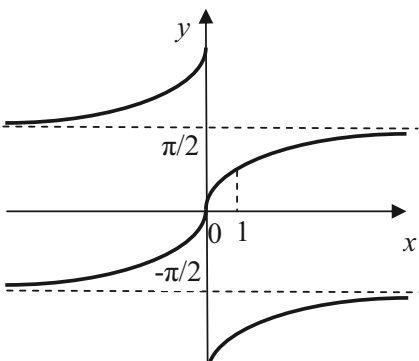
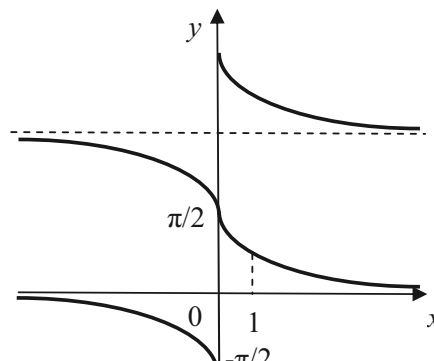
1. Функция одной переменной

1.1. Основные элементарные функции

Таблица 1

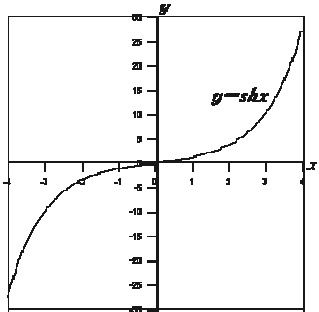
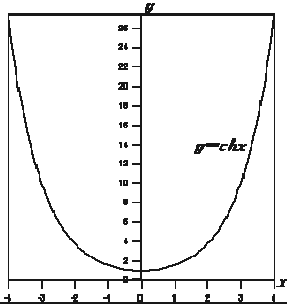
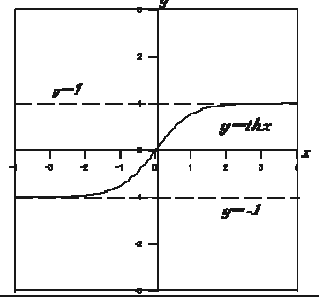
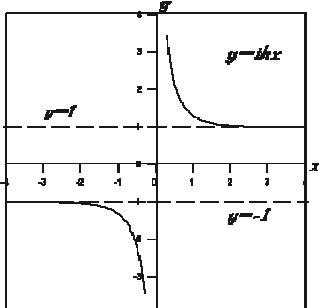
Степенная функция $y = x^n$	
	
	
Показательная функция $y = a^x, a \neq 1$	Логарифмическая функция $y = \log_a x, a \neq 1,$
	

Тригонометрические функции	
<p>Синус $y = \sin(x)$</p> 	<p>Косинус $y = \cos(x)$</p> 
<p>Тангенс $y = \operatorname{tg}(x)$</p> 	<p>Котангенс $y = \operatorname{ctg}(x)$</p> 
<p>Секанс $y = \sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$</p> 	<p>Косеканс $y = \operatorname{cosec}(x) = \frac{1}{\sin(x)}$</p> 

Обратные тригонометрические функции	
<p>Арксинус $y = \arcsin(x)$</p> 	<p>Арккосинус $y = \arccos(x)$</p> 
<p>Арктангенс $y = \arctg(x)$</p> 	<p>Арккотангенс $y = \text{arcctg}(x)$</p> 

1.2. Гиперболические функции

Таблица 2

гиперболический синус	$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$	
гиперболический косинус	$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$	
гиперболический тангенс	$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$	
гиперболический котангенс	$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}},$ где $x \neq 0$	

Основные гиперболические тождества

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1;$$

$$\operatorname{ch}^2 x + \operatorname{sh}^2 x = \operatorname{ch}(2x);$$

$$\operatorname{sh}(2x) = 2\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} x;$$

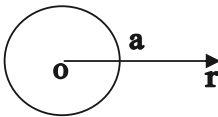
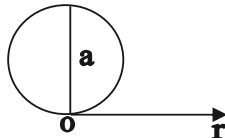
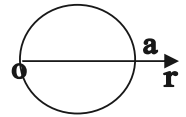
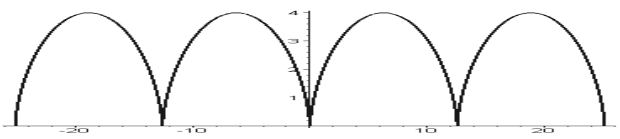
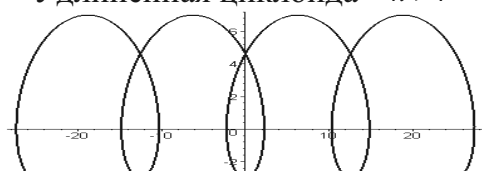
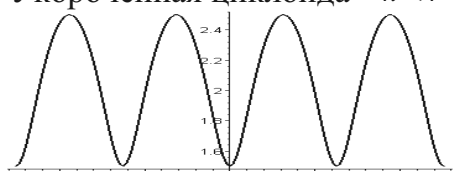
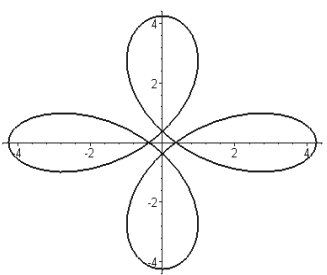
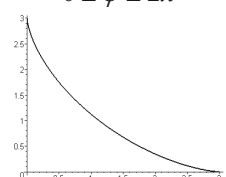
$$\operatorname{th} x \cdot \operatorname{cth} x = 1, x \neq 0;$$

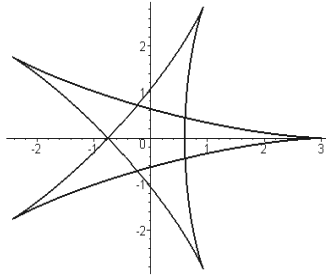
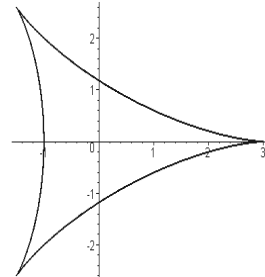
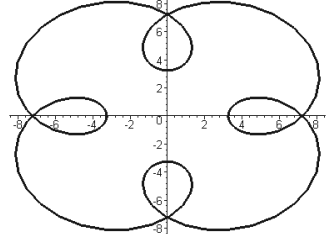
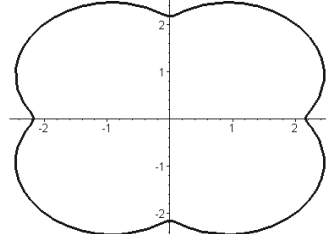
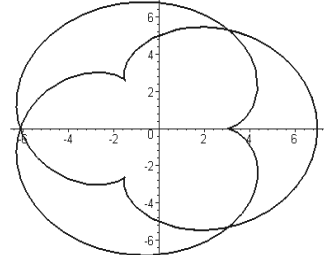
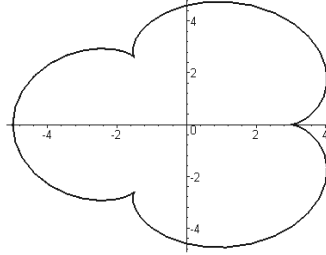
$$\operatorname{sh}(x \pm y) = \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} y \cdot \operatorname{ch} x;$$

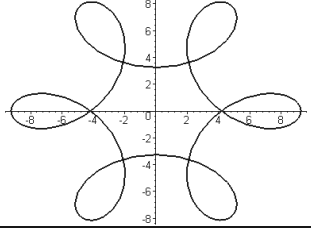
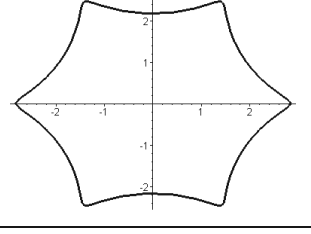
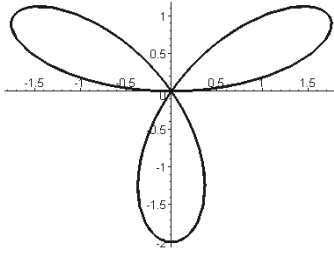
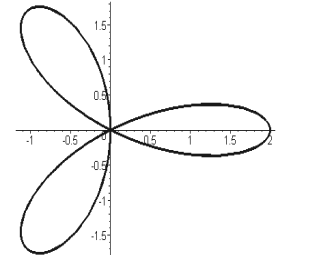
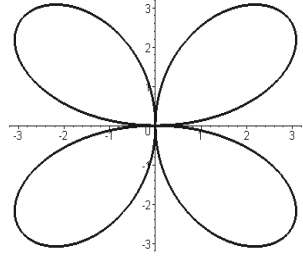
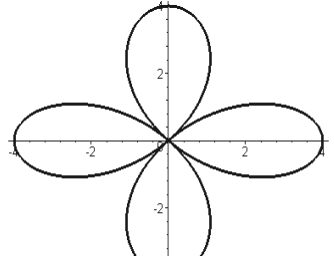
$$\operatorname{ch}(x \pm y) = \operatorname{ch} x \cdot \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh} y$$

1.3. Графики некоторых функций, заданных параметрически и в полярных координатах

Таблица №3

<p>Окружность с центром в начале координат</p> $x^2 + y^2 = a^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos(t), \\ y = a \sin(t) \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$	<p>Эллипс</p> $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos(t), \\ y = b \sin(t) \end{cases} 0 \leq t < 2\pi$
<p>Окружность в полярных координатах</p> <div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-start;"> <div style="text-align: center;"> $r = a$  </div> <div style="text-align: center;"> $r = a \sin(\varphi)$  </div> <div style="text-align: center;"> $r = a \cos(\varphi)$  </div> </div>	
<p>Парабола</p> $y^2 = 2px \Leftrightarrow \begin{cases} x = t, \\ y^2 = 2pt \end{cases} t \in [0; \infty]$	<p>Гипербола</p> $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \operatorname{ch}(t), \\ y = b \operatorname{sh}(t) \end{cases} t \in \mathbb{R}$
<p>Циклоида (трохоида)</p> <div style="display: flex; align-items: center;"> <div style="flex: 1;"> $\begin{cases} x = rt - h \sin(t), \\ y = r - h \cos(t) \end{cases} \text{ при } h=r$ </div> <div style="flex: 1;">  </div> </div>	
<p>Удлиненная циклоида - $h > r$</p> 	<p>Укороченная циклоида - $h < r$</p> 
<p>Гипотрохида</p> $\begin{cases} x = (R - mR) \cos(mt) + h \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin(mt) - h \sin(t - mt) \end{cases} -4\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ <div style="display: flex; justify-content: space-between; margin-top: 10px;"> <div style="width: 45%;"> $R = 3, h = 2, m = \frac{1}{4}, h > r$  </div> <div style="width: 45%;"> $R = 2, h = \frac{1}{2}, m = \frac{1}{4}, h < r$ - Астроида (частный случай) <div style="display: flex; align-items: center;"> $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3} \Leftrightarrow \begin{cases} x = a \cos^3(t), \\ y = a \sin^3(t) \end{cases} 0 \leq \varphi \leq 2\pi$  </div> </div> </div>	

<p>Гипоциклоида</p> $\begin{cases} x = (R - mR) \cos(mt) + mR \cos(t - mt), \\ y = (R - mR) \sin(mt) - mR \sin(t - mt) \end{cases}$ $R = 3, m = \frac{r}{R}, m = \frac{2}{5}, -5\pi \leq \varphi \leq 5\pi$ 		<p>Штейна кривая (частный случай)</p> $R = 3, m = \frac{r}{R}, m = \frac{2}{3}, -3\pi \leq \varphi \leq 3\pi$ 	
<p>Эпитрохоида</p> $\begin{cases} x = (R + mR) \cos(mt) - h \cos(t + mt), \\ y = (R + mR) \sin(mt) - h \sin(t + mt) \end{cases}, -4\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ $R = 5, h = 3, m = \frac{1}{4}, h > r$ 		$R = 5, h = \frac{1}{3}, m = \frac{1}{4}, h < r$ 	
<p>Эпициклоида</p> $\begin{cases} x = (R + mR) \cos(mt) - mR \cos(t + mt), \\ y = (R + mR) \sin(mt) - mR \sin(t + mt) \end{cases}, -4\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ $R = 3, m = \frac{r}{R}, m = \frac{2}{3}$ 		$R = 3, m = \frac{r}{R}, m = \frac{1}{3}$ 	

<p>Циклоидные кривые</p> $\begin{cases} x = (R + mR)\cos(mt) + h\cos(t + mt), \\ y = (R + mR)\sin(mt) - h\sin(t + mt) \end{cases} \quad -4\pi \leq \varphi \leq 4\pi$ <p>$R = 5, h = 3, m = \frac{1}{4}, h > r$</p>	
	<p>$R = 2, h = \frac{1}{3}, m = \frac{1}{4}, h < r$</p> 
<p>Р О З Ы</p> <p>(частный случай эпитрохида при $h = R + r$)</p> <p>$r = a \sin k\varphi$ $r = a \cos k\varphi$</p> <p>Трёхлепестковая роза: $k = 3$</p> <p>Если k - нечетно, то имеем k лепестков</p>	
	
<p>Четырёхлепестковая роза: $k = 2$</p> <p>Если k - четно, то имеем $2k$ лепестков</p>	
	
<p>Особые случаи: $k = \frac{5}{3}$</p>	
