С. О. Шатуновский

Об измерении прямолинейных отрезков и построении их помощью циркуля и линейки

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 51
ББК 22.1
С11

С. О. Шатуновский
С11 Об измерении прямолинейных отрезков и построении их помощью циркуля и линейки / С. О. Шатуновский – М.: Книга по Требованию, 2021. – 58 с.

ISBN 978-5-458-34078-6

В этой книжке (её первые десять страниц составляли раньше введение к первому изданию книги Адлера "Теория геометрических построений") я имею в виду дать в общедоступном изложении общую теорию решения конструктивных задач Элементарной Геометрии.Эта почти законченная в науке теория характеризуется не только глубиной идей, лежащих в её основе, но и тем, что, охватывая материал во всём его объёме, ставя и решая задачу в наиболее общем виде, она весьма просто приводит в частности к решению конструктивных задач, ожидавших своего решения в течение многих и многих столетий, каковы, например, получившие отрицательные решения задачи о трисекции угла, удвоении куба, квадратуре круга и т.д.

ISBN 978-5-458-34078-6

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой статье мы имеем в виду изложить общие начала теории конструктивных задач элементарной Геометрии и считаем поэтому необходимым несколько остановиться на общем определении задачи и разъяснении ее содержания. Что такое задача и каково ее содержание в наиболее общем случае? Следующее определение хотя, быть может, и не вполне отвечает на поставленный вопрос, но представляется нам достаточно общим:

Задача есть изложение требования „найти" по „данным" вещам другие, „искомые" вещи, находящиеся друг к другу и к данным вещам в указанных соотношениях.

Принимая это определение задачи, мы предполагаем, конечно, что предварительно определены все термины, входящие в его состав (за исключением термина: задача), или что эти термины приняты без определения либо в силу соглашения, либо потому, что они имеют достаточно ясный смысл. Нам придется, однако, обратить особое внимание на поставленные выше в ковычки термины: найти, данные (вещи), искомые (вещи). Каково бы ни было их реальное содержание (в настоящий момент оно для нас безразлично), важным представляется то обстоятельство, что в каждой задаче рассматриваются два класса вещей (для нас опять безразлично, будут ли эти вещи—конкретные или отвлеченные):

Один класс есть класс данных вещей. О них говорят, что они даны, указаны, известны, доступны нашему непосредственному или посредственному усмотрению, созерцанию, пониманию или представлению, находятся в нашем распоряжении, что мы эти вещи знаем, воображаем и т. д.

Наоборот, о вещах другого класса говорят, что они *не даны, неизвестны, не указаны*, что это суть *искомые* вещи, что они должны быть *найдены* или *определены* (*вычислены* — в Арифметике, *построены* — в Геометрии, вообще — *обнаружены*) и т. д.

Когда вещь *найдена*, о ней перестают говорить, как о вещи неизвестной: она переводится из класса искомых в класс данных вещей. Таким образом, *найти вещь это значит сделать так, чтобы мы не только могли, но и обязаны были причислить вещь к классу данных или известных вещей*. Поэтому совершенно ясно, *что задача не будет иметь содержания, термин „найти" ничего не будет означать, если не указаны те обстоятельства, события или условия, при осуществлении которых мы обязаны перечислить вещь из класса вещей неизвестных в класс известных вещей**.

Итак, в каждой отдельной отрасли знания или даже в каждой отдельной задаче термин *найти* может иметь свое особое значение, но он должен быть *определен* в том смысле, что явно должны быть указаны те условия, при осуществлении которых искомая вещь считается найденной. Эти условия нередко даются нам теми или другими преследуемыми целями, зависящими весьма часто от состояния нашего сознания или имеющихся в нашем распоряжении средств восприятия; но эти условия могут быть и иногда действительно являются предметом чистого *соглашения*. В последнем случае мы можем изменять условия, замещая одни другими, лишь бы только совокупность соглашений не содержала логического противоречия. *Но нельзя не устанавливать никаких условий относительно перечисления вещи из класса*

* Здесь уместно будет сделать следующее замечание: положим, что искомая вещь x будет нами считаться найденной тогда и только тогда, когда осуществится событие α. Можно поставить вопрос о том, при наличности каких признаков β мы будем говорить, что событие α осуществилось, затем — вопрос о том, каковы признаки γ, свидетельствующие о наличности признаков β, и т. д. ad infinitum. Мы будем поэтому предполагать, что во всех рассматриваемых случаях нет никакого сомнения относительно того, осуществлены ли *уже* или *еще* не осуществлены те условия, при выполнении которых вещь должна быть переведена из класса искомых в класс данных вещей.

искомых в класс данных, ибо при отсутствии таких условий задача не имеет смысла.

Если, например, А предлагает В разделить пополам данный прямолинейный отрезок MN, то прежде, чем приступить к решению задачи, В должен узнать, при выполнении каких условий А будет считать, что середина O отрезка MN найдена, ибо в противном случае В может рассуждать, как угодно, и делать, что угодно, между тем как А все будет говорить, что середина O не найдена. На практике, когда MN есть начерченный отрезок или вообще отрезок, определяемый двумя реальными (начерченными) точками, середина O считается найденной, когда она отмечена особым знаком или когда в ней находится ножка циркуля. В Геометрии середина O считается найденной только тогда, когда к ней пришли помощью некоторых вполне определенных приемов, о чем речь будет ниже.

Предложения, которыми устанавливаются те факты, обстоятельства или условия, при наличности которых искомая вещь становится данной, мы будем называть *постулатами*, лежащими в основе решения данной задачи или данной группы задач, рассматриваемых в той или другой дисциплине (эти постулаты можно назвать логическими средствами решения).

§ 2. КОНСТРУКТИВНЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТУЛАТЫ И ОБЩИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КОНСТРУКТИВНОЙ ЗАДАЧИ

Переходя теперь к конструктивным задачам элементарной плоской Геометрии, мы прежде всего укажем те постулаты, которые обыкновенно кладутся в основание решения этих задач. Заметим для этой цели, что в элементарной плоской Геометрии рассматриваются только следующие образы:

1. Точки, прямые, прямолинейные отрезки, окружности и их дуги. Эти образы будем называть основными.

2. Совокупности основных образов.

3. Конечные или бесконечные (например, углы) части плоскости, ограничиваемые основными образами.

Мы принимаем: Постулат I. Прямая и прямолинейный отрезок соответственно считаются построенными тогда и только тогда, когда даны или построены две точки прямой или концы отрезка.

Постулат II. Окружность считается построенной тогда и только тогда, когда даны или построены ее центр и две точки, которыми определяется ее радиус. (Одною из этих точек может быть центр, а другою — точка на окружности). Дуга окружности считается построенной в том и только в том случае, когда даны или построены ее центр и ее концы.

Постулат III. Точка построена, если она есть пересечение двух данных или построенных прямых.

Постулат IV. Точка построена, если она есть общая точка данной или построенной прямой и данной или построенной окружности.

Постулат V. Точка построена, если она есть общая точка двух данных или построенных окружностей.

Постулат VI. Всякий другой образ считается построенным, если даны или построены основные образы, из которых он состоит или которые его ограничивают.

В черчении, где строятся не геометрические образы, а их графические изображения, эти постулаты практически осуществляются помощью циркуля и линейки, причем оба эти инструмента употребляются определенным образом, а именно: при помощи линейки проводится графическое изображение прямой через графически заданные точки, при помощи циркуля описывают из графически заданного центра графическую окружность, имеющую графически заданный радиус. Другое употребление циркуля или линейки может не соответствовать нашим первым двум постулатам, а потому не допускается. Что касается постулатов III — V, то их осуществление содержится в том факте, что мы непосредственно усматриваем общие точки графически данных прямых и окружностей. Случаи, когда эти общие точки лежат вне эпюра (рамок чертежа) и потому не усматриваются непосредственно и не считаются построенными, сответствуют тем случаям, когда тот или иной из постулатов III — V отбрасывается *.

* См., например, Адлер, „Теория геометрических построений", (Mathesis, Одесса), издание 2-ое, стр. 71 и примечание 77, или издание 1-ое, стр. 75 и примеч. 76.

Можно, конечно, установить другие постулаты, которым будут соответствовать либо другие чертежные инструменты, либо другие способы употребления циркуля и линейки. Можно, наоборот, задать чертежные инструменты и способ их употребления и поставить на разрешение вопрос о том, каковы соответственные постулаты (см., например, Адлер „Теория геометрических построений", главы II, III, IV и примечания к ним), но какие либо постулаты должны быть установлены (или соответствующие им инструменты выбраны), так как в противном случае задача лишена содержания.

Установленные нами постулаты, отвечающие обыкновенному способу пользования циркулем и линейкой, эквивалентны следующему допущению. Конструктивная задача элементарной плоской Геометрии считается решенной, если она приведена к решению конечного числа задач, из которых каждая есть одна из следующих пяти задач: I) через две данные точки провести прямую или отрезок, их соединяющий; II) из данной точки описать окружность данного радиуса или начертить дугу окружности по ее концам и ее центру; III) найти общую точку двух данных прямых; IV) найти общие точки данной прямой и данной окружности; V) найти общие точки двух данных окружностей. Для геометра безразлично, как решаются эти пять задач. Их решение ему известно по условию, и к ним должна сводиться всякая другая задача для того, чтобы считаться решенной.

Приняв постулаты I — VI, мы поставим себе теперь на разрешение наиболее общую конструктивную задачу элементарной плоской Геометрии. Так как каждый образ определяется ограничивающими его основными (см. выше) образами, а эти в свою очередь считаются построенными, когда найдены некоторые определяющие их точки, то можно принять, что каждый геометрический образ задается некоторыми системами точек и что требование построить геометрический образ есть требование о построении некоторых систем точек.

Ничто не мешает смотреть на несколько систем точек, как на одну систему, и потому наиболее общая конструктивная задача может быть выражена так:

По данной системе точек $P_1 (P_1', P_1'', \ldots, P_1^{(h)})$, содержащей конечное число точек $P_1', \ldots, P_1^{(h)}$, требуется построить другую конечную систему

$Q(Q', Q'', \ldots, Q^{(k)})$ *точек, под условием, чтобы эти последние удовлетворяли некоторым наперед указанным требованиям.*

Точки $P_1', \ldots, P_1^{(h)}$ данной системы P_1 будем называть точками *первого класса* или *первого порядка*. Найдем *все* те образы, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — VI. Мы можем, впрочем, игнорировать последний постулат и задаться только таким вопросом: какие основные образы могут и должны считаться построенными, когда приняты постулаты I — V и дана система точек P_1? Если эта задача решена, то должны считаться построенными и все те образы, которые составляются из основных или ограничиваются ими.

Постулаты III — V говорят об основных образах, которые должны считаться построенными, когда даны (построены) прямые или окружности. Эти постулаты *непосредственно* ничего не могут дать в применении к точкам системы P_1. В силу же постулата I мы можем и должны считать построенными все прямые l_1 и прямолинейные отрезки λ_1, определяемые всевозможными парами точек первого класса. Эти прямые и отрезки будем называть *данными*, а также *прямыми* и *отрезками первого класса* или *первого порядка*. В силу же постулата II теперь должны считаться построенными все окружности O_1, для которых центрами служат точки первого класса, а радиусами — прямолинейные отрезки первого класса. Эти окружности мы будем называть окружностями *первого класса* или *первого порядка*.

Таким образом, мы имеем теперь

$$\left.\begin{array}{ll}\text{точки} & P_1\\ \text{прямые} & l_1\\ \text{отрезки} & \lambda_1\\ \text{окружности} & O_1\end{array}\right\}\ \begin{array}{c}\text{первого класса или}\\ \text{первого порядка.}\end{array}$$

Применяя теперь постулаты III — V, мы можем и должны теперь считать построенными все отличные от точек P_1 точки встречи построенных уже окружностей и прямых. Эти точки P_2 мы будем называть точками *второго класса* или *второго порядка*. В силу постулатов I и II мы можем, по аналогии с предыдущим, считать построенными прямые l_2, отрезки λ_2 и окружности O_2 второго класса, затем точки P_3 третьего класса и т. д.

Совокупность точек классов P_2, P_3, содержит в себе все те и только те точки, которые могут и должны считаться построенными в силу постулатов I — V, когда точки P_1 образуют данную, исходную систему точек. Если искомые точки Q найдутся среди точек P_1, P_2, P_3, то задача при наших постулатах разрешима. Если же искомых точек Q не будет среди точек P_1, P_2, P_3, как бы далеко мы этот ряд ни продолжали, то задача не будет иметь решения. Поясним это еще так: Если точки безграничного ряда классов P_1, P_2, не покрывают всей плоскости, так что на плоскости имеется одна или несколько точек q, которые не принадлежат ни к одному из этих классов, то всякая задача, в которой даны только точки P_1, а ищется хоть одна из точек q, будет неразрешимой при наших постулатах, хотя она и могла бы быть разрешимой при других постулатах. Так, например, (если требования, которым должны удовлетворять точки q в нашей задаче, не противоречат друг другу) можно было бы принять за постулат, что точки q построены, когда точки P_1 даны; в этом случае задача, в которой точки q суть искомые, разрешима в силу установленного постулата. В книге Адлера приводится много примеров задач, неразрешимых при одних, но разрешимых при других постулатах (см., например, §§ 35, 45, 46, 49 и 51).

В предыдущем изложении указан путь, следуя которому, мы, приняв обычные постулаты, непременно найдем решение задачи, если только решение может быть получено при этих постулатах. Рассмотрим, например, задачу о делении пополам прямолинейного отрезка AB, заданного его концами. Система P_1 точек первого порядка состоит из двух точек A и B. Искомый образ есть точка C, делящая пополам отрезок AB. Отрезок AB, прямая AB, окружность $A(AB)$ центра A и радиуса AB и окружность $B(AB)$ образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого порядка. Если M, N суть точки пересечения окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$, P и Q — вторые точки пересечения этих окружностей с прямою AB, то точки M, N, P, Q образуют систему точек второго порядка. Среди 9-ти прямых и 28-ми окружностей второго порядка имеется прямая MN, которая в пересечении с прямой AB дает искомую точку C. Поэтому искомая точка есть точка третьего порядка.

Рассмотрим еще деление пополам дуги AB (окружности), заданной центром O и концами A и B. Точки O, A, B образуют систему точек первого порядка. Три отрезка OA, OB, AB, три прямые OA, OB, AB и девять окружностей $N(PQ)$ (где центр N есть одна из точек A, B, O, а радиус PQ есть один из отрезков OA, OB, AB) образуют систему отрезков, прямых и окружностей первого порядка. Точки встречи этих образов друг с другом (исключая O, A, B) образуют систему точек второго класса. Среди них имеется отличная от O точка встречи C окружностей $A(AB)$ и $B(AB)$. Прямая OC принадлежит второму классу, а точка D ее встречи с окружностью $O(AB)$ (лежащая на данной дуге) принадлежит третьему классу и есть искомая точка.

Указанный общий метод решения задач при помощи циркуля и линейки не только страдает недостатками, свойственными всякому общему методу, но оставляет без ответа вопрос о критериях разрешимости или неразрешимости данной задачи при помощи циркуля и линейки. Критерии разрешимости или неразрешимости устанавливаются ниже аналитически и выражаются следующим образом:

Для того, чтобы отрезок мог быть построен при помощи циркуля и линейки, необходимо и достаточно, чтобы этот отрезок мог быть выражен в функции рациональных чисел и отрезков* первого класса при помощи конечного числа сложений, вычитаний, умножений, делений и извлечений квадратных корней. (См. далее определение длины и построение отрезков, §§ 5 и 8).

Отсюда, как будет показано, выводится, что всякий отрезок, построяемый помощью циркуля и линейки, есть корень алгебраического неприводимого уравнения степени 2^n. Критерии разрешимости такого уравнения в квадратных радикалах уже даны были Ванцелем**

Мы остановимся еще на двух вопросах, а именно на вопросах о произвольных элементах и о геометрографических решениях.

Произвольные элементы. Нередко при решении геометрической задачи пользуются так называемыми произвольными точками, а именно либо берут произвольную точку на пло-

---

* Определение понятия о функции отрезков см. § 7.

** В настоящее время мы имеем другой критерий: для того, чтобы неприводимое алгебраическое уравнение могло быть решено в квадратных радикалах, необходимо и достаточно, чтобы оно имело группу порядка 2^n.

скости или на данной прямой, или на данной окружности, или внутри (либо вне) данной фигуры, либо допускают еще, что эта произвольная точка отлична от некоторых данных или уже построенных точек. Такие допущения составляют особенные постулаты, которые должны быть установлены особыми соглашениями. При употреблении циркуля и линейки такие постулаты оказываются лишними: произвольную точку легко заменить построенной даже в том случае, когда она должна быть отлична от некоторых данных или построенных точек. Так, например, если на прямой или дуге круга уже имеются построенные точки, расположенные в порядке: A, B, C, . ., K, то мы можем заменить произвольную точку этой прямой или этой дуги, отличную от A, B, C, K, — серединой части прямой или дуги, определяемой двумя последовательными точками.

Есть однако и такие случаи, когда допущение о приобщении произвольных точек к числу данных или уже построенных является существенным: цикл разрешимых задач может быть сужен, если отбросить право пользования произвольными точками (см., например, Адлер, примечания 75 и 98).

§ 3. ГЕОМЕТРОГРАФИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ

Простейшее решение данной конструктивной задачи называют геометрографическим ее решением. Такое определение не имеет смысла, если не установлено мерило простоты. По Лемуану, простота решения определяется следующим образом. Рассматриваются 4 элементарные операции: 1) прикладывание линейки к данной точке, 2) помещение ножки циркуля в данную точку, 3) проведение прямой и 4) описание окружности. К каждой из этих операций Лемуан относит число 1 и называет число S всех элементарных операций, потребных для решения задачи, коэффициентом простоты или простотой решения. Проведение прямой через данные 2 точки имеет поэтому коэффициент простоты 3 (линейка прикладывается к двум точкам и проводится одна прямая). Вычерчивание окружности из данного центра O данным радиусом AB имеет коэффициент 4 (помещение двух ножек циркуля соответственно в A и B, помещение одной ножки циркуля в O, вычерчивание одной окружности) или 3 (если O совпадает с A или с B), или 2 (если циркуль уже имеет раствор AB вследствие того, что раньше вычерчивалась окружность радиуса AB).

Мы покажем, что, имея какое либо решение задачи, можно при помощи конечного числа испытаний найти ее геометрографическое решение. Заметим для этой цели, что для получения точки порядка $n>1$ необходимо произвести, по меньшей мере, $2n+1$ элементарных операций. Это докажется индуктивно. В самом деле, пусть будет $n=2$. Так как точка 2-го порядка есть пересечение двух линий 1-го порядка, то для получения точки второго порядка необходимо вычертить либо 2 прямые первого порядка (простота 6), либо прямую и окружность первого порядка (простота 7 или 6) или же две окружности первого порядка (простота 8 или 7, или 6, или 5). Таким образом, при $n=2$ число элементарных операций действительно не меньше, чем $5=2.2+1$. Точка порядка $n+1$ есть пересечение прямой или окружности порядка n с прямой или окружностью того же или низшего порядка. Допустив наше предложение для числа n, заметим, что для получения прямой или окружности n-го порядка 1) необходимо иметь точку n-го порядка, что по допущению требует по меньшей мере $2n+1$ операций, и 2) необходимо вычертить линию n-го порядка, что требует по меньшей мере двух элементарных операций, так что для получения точки n-го порядка необходимо сделать по меньшей мере $2n+1+2=2(n+1)+1$ операций. Положим теперь, что некоторая задача каким либо способом решена и решение имеет простоту S. Найдем наибольшее число ν, удовлетворяющее соотношению

$$2\nu+1 \leqslant S.$$

Тогда

$$2(\nu+1)+1 > S.$$

Для построения точки порядка $\nu+1$ требуется произвести по меньшей мере $2(\nu+1)+1>S$ элементарных операций. Отсюда следует, что в состав геометрографического решения не может войти ни одна точка порядка $\nu+1$ и потому система точек, дающих геометрографическое решение задачи, найдется среди точек первых ν порядков. Число этих последних точек конечно*.

Примечание. Коэффициент простоты иногда может быть понижен от введения произвольных точек. В этом случае следует

---

* Кажется, что до сих пор еще не был указан ни один общий метод получения геометрографического решения.