А.В. Крушевский

Теория игр

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 50
ББК 22
А11

А.В. Крушевский
А11 Теория игр / А.В. Крушевский – М.: Книга по Требованию, 2023. – 216 с.

ISBN 978-5-458-27131-8

В пособии изложены основные положения и сведения из теории игр, рассмотрены теоретические вопросы решения игр, приведены примеры из различных сфер человеческой деятельности. Поэтому в книге уделено большое внимание прикладной теории игр, и во многих случаях приведено строгое математическое обоснование. Приведены методы решения игр. Рассмотрены игры двух и более игроков. Основное внимание уделено наиболее разработанной теории игры двух игроков с нулевой суммой. Описаны позиционные, бесконечные, многошаговые игры, а также построение деловой игры.Учебное пособие предназначено для студентов вузов, обучающихся по специальности "Экономическая кибернетика", а также будет полезным для аспирантов, специалистов экономистов и управленческих работников.

ISBN 978-5-458-27131-8

ВВЕДЕНИЕ

В практической деятельности людей часто возникают конфликтные ситуации, когда нескольким участникам приходится взаимодействовать при обстоятельствах, в которых каждый из участников старается достичь своей цели своим доступным ему способом, но никто из них полностью не влияет на ход событий, т. е. исход борьбы лишь частично зависит от действий каждого участника. В конфликтной ситуации имеются несколько заинтересованных сторон, каждая из которых старается получить максимальный выигрыш. Такие ситуации возникают во время проведения обычных салонных игр, спортивных состязаний, в военном деле, в торговых отношениях, в экономической, хозяйственной и политической деятельности, в медицинском обслуживании и т. д.

Теория игр — это раздел математики, в котором исследуются вопросы поведения и вырабатываются оптимальные правила (стратегии) поведения для каждого из участников конфликтной ситуации. Разрешение противоречий с помощью теории игр возможно лишь после проведения математического моделирования ситуаций в виде игры, а для их решения уже оказался недостаточным аппарат классического математического анализа нахождения экстремумов функций, и появилась необходимость развития новых математических методов нахождения оптимальных минимаксных решений, присущих теории игр.

Исследования игровых ситуаций проводились многими учеными, основное внимание которых было направлено на создание понятий оптимального поведения игроков и на методы отыскания лучших стратегий. Много внимания уделялось исследованию азартных игр. Лишь в 30-е годы XX ст. Дж. фон Нейман формулирует основные идеи современной теории игр и ее основополагающие результаты. Он доказывает основную теорему матричных игр. С этого времени теория игр стала развиваться более интенсивно. Особое внимание обращают на теорию игр военные специалисты и экономисты.

В решении игровых задач большую помощь оказывают электронные вычислительные машины. Однако в силу ограниченной возможности вычислительной техники и недостаточного развития теории игр для очень многих реальных конфликтных ситуаций невозможно найти оптимальное решение. Следовательно, методы решения игровых задач должны совершенствоваться вместе с развитием вычислительной техники. Несмотря на значительные достижения в теории игр, остается еще много неясных и спорных вопросов, для решения которых потребуется немало усилий. Основными проблемами, разрабатываемыми в теории игр, являются: выработка определений решения игр, доказательства теорем существования решений, разработка методов нахождения решений, практические аспекты использования теории игр.

Теория игр не охватывает все аспекты возникающих реальных ситуаций, тем не менее при определенном опыте многим ситуациям можно придать игровую схему и тем самым получить возможность ее исследования методами теории игр. В любой игровой схеме конкретной конфликтной ситуации каждый участник может выбирать по своему усмотрению те или иные действия, в зависимости от которых будет получаться тот или иной исход. Для анализа игры необходимо знать ее правила, количество игроков, их цели, возможные действия, последствия, выигрыши и т. д. Обычно анализ игры сводится к указанию наилучших стратегий и выигрышей для каждого игрока. Выигрышем, в частности, может быть эффективность использования дефицитных ресурсов, производственных фондов, экономических или политических рычагов в производственно-хозяйственной деятельности предприятий, министерств или в разработке стратегических планов развития общества.

Развитие теории игр, изучение ее методов и их применение в практике народно-хозяйственной деятельности оказывает помощь в совершенствовании системы подготовки и принятия решений, способствует научно-техническому прогрессу.

ГЛАВА 1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР

1.1. УЧАСТНИКИ ИГРЫ, ИГРОКИ, СТРАТЕГИИ, ВЫИГРЫШИ

Игра характеризуется системой правил, определяющих количество участников игры, их возможные действия и распределение выигрышей в зависимости от их поведения и исходов. Игроком принято считать одного участника или группу участников игры, имеющих одни общие для них интересы, не совпадающие с интересами других групп. Поэтому не каждый участник считается игроком.

Так, например, если в игре принимают участие четыре человека и каждый играет только за себя, то в ней имеется четыре игрока, если же четыре человека образовали две коалиции по два участника в каждой, т. е. играют двое на двое, то считается, что в этой игре участвуют два игрока. Во многих спортивных играх таких, как футбол, волейбол и других, состязаются две команды, в каждой из которых имеется несколько участников. Эти участники, объединенные в команды, образуют группы лиц: в каждой из этих групп они имеют единые цели, противоположные друг другу. Поэтому в таких играх следует рассматривать по два игрока. Игры в шашки, шахматы имеют двух игроков даже в том случае, когда играют команды, состоящие из нескольких лиц.

Пусть три фирмы, имеющие определенный капитал, хотят использовать его для получения возможности сбыта своей продукции на рынке. Каждая из этих фирм, вкладывая капитал, может сбывать свою продукцию с некоторой выгодой для себя. Эта выгода зависит не только от вклада одной фирмы, а от вкладов, сделанных другими фирмами. Ни одна из фирм не имеет полного влияния на рынок сбыта, т. е. каждая фирма только частично влияет на конечный результат — выгоду, получаемую ею. Рассматривая экономическую ситуацию, возникшую в результате взаимодействия трех фирм, как игру, можно допустить:

1) все три фирмы действуют самостоятельно, добиваясь наибольшей выгоды для себя за счет своих возможностей и учитывая возможные поведения других фирм, тогда это будет игра трех игроков;

2) какие-либо две фирмы объединились в коалицию и действуют совместно с единой целью достигнуть наибольшей выгоды для себя, учитывая возможные поведения третьей фирмы, тогда это будет игра двух игроков.

Две войсковых части, имеющие войсковые подразделения, желают овладеть определенной позицией. Первая часть имеет два подразделения, а вторая — три. Возможные действия частей — это выделение определенного количества подразделений для овладения позицией.

Каждое подразделение может иметь свои локальные цели, но все подразделения одной части имеют одну общую цель — овладение позицией. Поэтому, рассматривая сложившуюся ситуацию как игру, следует считать, что в ней имеется только два игрока — это войсковые части.

Правила или условия игры определяют возможные поведения, выборы и ходы для игроков на любом этапе развития игры. Сделать выбор игроку, это значит остановиться на одной из его возможностей поведения. Засем игрок осуществляет этот выбор с помощью ходов. Сделать ход — это значит на определенном этапе игры осуществить сразу весь выбор или его часть в зависимости от возможностей, предусмотренных правилами игры. Каждый игрок на определенном этапе игры делает ход согласно сделанному выбору. Другой игрок, зная или не зная о сделанном выборе первого игрока, также делает ход. Каждый из игроков старается учесть информацию о прошлом развитии игры, если такая возможность разрешается правилами игры.

Набор правил, которые однозначно указывают игроку, какой выбор он должен сделать при каждом ходе в зависимости от ситуации, сложившейся в результате проведения игры, называется *стратегией* игрока. Стратегия в теории игр означает определенный законченный план действий игрока, показывающий, как надо действовать ему во всех возможных случаях развития игры. Стратегия означает совокупность всех указаний для любого состояния информации, имеющейся у игрока на любом этапе развития игры. Отсюда уже видно, что стратегии могут быть хорошими и плохими, удачными и неудачными и т. д.

При игре в шахматы стратегия должна указывать игроку какой ход он должен сделать в любом развитии игры. Очевидно, при таком подходе в шахматной игре имеется очень много стратегий, перечислить которые практически не представляется возможным и поэтому при анализе и изучении стратегий в этой игре выделяют главные и ими пользуются. Для разных игроков главными являются разные стратегии, как правило, известные только самому игроку, и поэтому игра в шахматы представляет интеллектуальный интерес, несмотря на то, что в ней нет случайных ходов.

При игре в футбол также имеется очень много стратегий и каждая команда применяет свой набор стратегий для того, чтобы достигнуть цели. В этой игре, конечно, большую роль играет и мастерство, которое также может входить в состав стратегии команд и игроков. В играх, отображающих экономические ситуации, стратегиями могут быть размеры вкладываемых в определенные мероприятия средств. Так, в игре трех фирм каждая из них может внести определенную долю своего капитала — это и есть ее стратегия. Очевидно, таких стратегий у каждой фирмы много. В военных играх в качестве стратегий может быть любое поведение подразделений.

Правилами игры предусматриваются определенные выигрыши для игроков в зависимости от применяемых ими стратегий и исходов игры. Выигрыш — это мера эффекта для игрока. Так, в покере, преферансе и других играх после игры обычно происходит обмен ценностями в виде денег, т. е. эффект от исхода этих игр измеряется в денежных единицах. В правилах игры четко сформулировано, сколько денег выиграет каждый игрок в зависимости от исхода игры.

В таких играх, как шашки, шахматы, исходом игры является выигрыш, ничья, проигрыш. Выигрыши здесь измеряются очками (выигрыш — одно очко, ничья — половина очка, проигрыш — нуль очков). При игре в футбол результат игры измеряется очками: выигрыш — два очка, ничья — одно очко, проигрыш — нуль очков. В играх, отображающих экономические ситуации, выигрыши почти всегда измеряются в стоимостном выражении: прибыль, себестоимость, амортизация и т. д. Так, в описанной выше ситуации трех фирм выигрыш может измеряться той прибылью, которую получит фирма в результате применения стратегий всеми фирмами. В военных играх выигрыш — это победа, взятие позиции, получение определенных преимуществ, получение оружия и т. д.

Бывают реальные ситуации, в которых выигрыш оценивается как чувство удовольствия или морального удовлетворения, а проигрыш как чувство угнетения. Так что не всякий выигрыш может измеряться количественно. В теории игр рассматриваются только такие игры, в которых выигрыш выражается количественно: стоимостью, очками, баллами и т. д. Очевидно, исход игры, а следовательно, и выигрыш игроков зависят от стратегий, которые применяют игроки. Однако выигрыш каждого игрока не полностью зависит от применяемой им стратегии, он зависит и от стратегий, применяемых другими игроками. В конечном счете в игре никакой игрок не может полностью контролировать свой выигрыш. Если же в реальной ситуации возникает случай, когда исход для участника полностью зависит от него, то такая ситуация не рассматривается для него как игровая. В дальнейшем будут рассматриваться выигрыши, измеряемые количественно (числами). Проигрыш выражается как отрицательный выигрыш. Поэтому речь в дальнейшем будет идти только о выигрышах.

Практически, при представлении конфликтной ситуации в виде игры возникает ряд трудностей в связи с описанием правил, условий, игроков, стратегий, ходов, выигрышей. Имеются также большие трудности при моделировании экономических ситуаций. Так, при описании наборов стратегий возникают трудности учета изменений стратегий во время игры, вызванные действием научно-технического прогресса (изобретение, открытие) и моментов времени применения стратегий. Формально эти факторы можно включать в стратегии (это не вызывает принципиальных возражений), однако такой подход ведет к значительному увеличению количества рассматриваемых стратегий, и это сильно затрудняет исследование игры. Имеются также трудности в определении выигрышей в зависимости от применяемых стратегий в связи с неясно определенными областями действия и сложностью соизмерения различных благ. Задача исследователя заключается в том, чтобы данную конфликтную ситуацию по возможности привести к формализованной игре без значительных потерь реальных целей и условий, найти метод решения такой формальной модели, провести расчеты и анализ. Преодоление трудностей на пути решения игровых ситуаций связано с четкостью и реальностью представления ситуации, выделения в ней основных правил и элементов игры: игроков, стратегий, ходов и выигрышей. Затем возникает необходимость получения методов решения игры, необходимой информации и реализации.

1.2. КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР И ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О МЕТОДАХ ИХ РЕШЕНИЯ

Реальные конфликтные ситуации приводят к различным видам игр. В зависимости от вида игры разрабатывается и метод ее решения. В настоящее время нет вполне четко сложившейся классификации игр. Однако можно отметить основные направления, по которым осуществляется классификация игр: количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрышей, количество ходов, состояние информации.

Рассмотрим несколько подробнее эти направления.

В зависимости от количества игроков определяют игры: одного игрока, двух игроков, n игроков. Игры одного игрока (типа пасьянсов) не представляют интереса и не рассматриваются в теории игр. Игры двух игроков — наиболее распространенные, их исследованию посвящено много работ, и достигнуты наибольшие успехи как в теории, так и в практических приложениях. Игры трех и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Трудности решения игр повышаются с увеличением количества игроков.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число возможных стратегий, то она называется *конечной*. Если хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий, то такая игра называется *бесконечной*. Отсюда вытекает, что понятие бесконечной игры связывается не с продолжительностью проведения игры, а с неограниченным количеством стратегий. Пусть, например, первый игрок имеет две стратегии, второй — десять стратегий, а третий — сто стратегий, тогда это конечная игра трех игроков (все игроки имеют конечное число стратегий). Если, например, в некоторой игре первый игрок имеет две стратегии, второй — десять стратегий, а третий — бесконечное количество (счетное множество или континуум) стратегий, то это бесконечная игра трех игроков (один из игроков имеет бесконечное число стратегий). Если, например, имеются два игрока, для каждого из которых стратегией является число из отрезка $[0, 1]$, то это бесконечная игра двух игроков (оба игрока имеют континуум стратегий). Трудности решения игр зависят от количества стратегий. Как правило, с увеличением количества стратегий повышаются трудности решения игр.

По характеру взаимоотношений игры делятся на: бескоалиционные, кооперативные и коалиционные. *Бескоалиционными* называются игры, в которых игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, бескоалиционной будет военная ситуация, в которой сражение ведется без компромиссов, до победы. *Коалиционной* игрой называется игра, в которой игроки могут вступать в соглашения, образовывать коалиции. Например, коалиционной будет военная игра (ситуация), в которой противники могут вступать в переговоры с целью достигнуть компромиссного решения возникшей ситуации. В кооперативной игре коалиции наперед определены.

По характеру выигрышей они делятся на: игры с нулевой суммой и игры с ненулевой суммой. Игра с *нулевой суммой* будет тогда, когда сумма выигрышей всех игроков в каждой ее партии равна нулю, т. е. в игре с нулевой суммой общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками в зависимости от получающихся исходов. Так, многие экономические и военные ситуации можно рассматривать как игры с нулевой суммой.

В частности игра двух игроков с нулевой суммой называется *антагонистической*, так как цели игроков в ней прямо противоположные: выигрыш одного игрока происходит только за счет проигрыша другого.

Примером игры с *ненулевой суммой* могут быть торговые взаимоотношения между странами. В результате применения своих стратегий все страны могут быть в выигрыше. Всякая игра, в которой надо вносить взнос некоторому лицу за право принимать участие в ней, является игрой с ненулевой суммой. Действительно, в этом случае всегда в выигрыше получается некоторое лицо, которое не принимает участия в игре, а получает взнос от игроков, теряющих свой капитал за счет этих взносов. Другим примером служит лотерея: в ней организатор всегда имеет выигрыш, а участники игры — лица, купившие лотерейные билеты, — в сумме получают выигрыш меньше, чем они внесли.

Игры с ненулевой суммой решаются сложнее, так как они содержат все трудности, присущие играм с нулевой суммой и еще дополнительные трудности, связанные с возможностью получения дополнительного выигрыша. В принципе игру с ненулевой суммой можно свести к некоторой искусственной игре с нулевой суммой, введя дополнительного фиктивного игрока, получающего сумму выигрыша, дополняющего до нуля. Однако в этом случае увеличивается количество игроков, и этот дополнительный игрок не является равноценным. Поэтому такой подход не улучшает дела.

По виду функций выигрышей игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра — это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаются выигрыши первого игрока в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии первого игрока, столбец — номеру применяемой стратегии второго игрока; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш первого игрока, соответствующий применяемым стратегиям). Выигрыш второго игрока равен проигрышу первого.

Для матричных игр создана достаточно хорошая теория и разработаны практически приемлемые методы решения. Так, доказано, что любая матричная игра имеет решение и она легко может быть сведена к задаче линейного программирования, а затем решена с помощью известных методов, например, симплекс-метода.

Биматричная игра — это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии первого игрока, столбец — стратегии второго игрока, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш первого игрока, во второй матрице — выигрыш второго игрока). Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается такая игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий (естественно считается, что стратегии выражены числами из определенного отрезка). Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения. Простым примером непрерывной игры двух игроков является следующая: первый игрок выбирает число x из отрезка $[0, 1]$, и второй игрок выбирает число y из отрезка $[0, 1]$, после чего первый игрок выигрывает $x - y^2$, а второй проигрывает столько же. Очевидно функция $x - y^2$ является непрерывной и поэтому игра также считается непрерывной. Согласно теореме существования решения такая игра имеет решение.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется *выпуклой*. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определенного числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

Если функция выигрышей может быть представлена в виде суммы произведений функций от одного аргумента, то такая игра называется *сепарабельной* (разделимой). С помощью определенных преобразований ее решение сводится к решению игры с билинейной функцией выигрышей и к определению неподвижной точки при специальном отображении множеств элементов, соответствующих стратегиям.

Игры типа *дуэлей* характеризуются моментом выбора хода и вероятностями получения выигрышей в зависимости от времени, прошедшего от начала игры до момента выбора. Например, существуют интерпретации таких игр в экономических ситуациях: каждая фирма делает вклад своего капитала в определенный момент времени с целью овладения рынком сбыта. Чем раньше она сделает свой вклад, тем меньшая вероятность овладеть рынком, но, делая свой вклад слишком поздно, она теряет рынок сбыта. Функция выигрышей игроков в играх типа дуэлей принимает специальный вид: она непрерывна при разных значениях моментов времени, когда игроки делают ходы, и она разрывна при совпадении моментов хода игроков. Так что нет гарантий существования решений для игр типа дуэлей. Существуют определенные методы решения таких игр.

По количеству ходов игры делятся на одношаговые и многошаговые. *Одношаговые* игры заканчиваются после одного хода каждого игрока. Например, матричная игра является одношаговой, так как при этом каждый игрок делает только один ход и потом происходит распределение выигрышей.

Многошаговые игры делятся на позиционные, стохастические, дифференциальные, типа дуэлей и др.

В *позиционных* играх может быть несколько игроков, каждый из которых может последовательно во времени делать несколько ходов. Выигрыши определяются в зависимости от исходов игры (применяемых стратегий). Такие игры с помощью определенных способов сводятся к матричным играм и могут решаться присущими им методами.

Если в игре производятся ходы, приводящие к выбору определенных позиций, причем имеется определенная вероятность возврата на предшествующую позицию, то такая игра является *стохастической*.

Если в многошаговой игре допускается делать ходы непрерывно и подчинять поведение игроков некоторым условиям, описываемым дифференциальными уравнениями, то такие игры являются *дифференциальными*. Например, в играх типа погони каждый объект может двигаться, подчиняясь определенным условиям, описываемым обыкновенными дифференциальными уравнениями. Цель одного объекта — достичь определенной области, цель другого — не допустить первого до этой области. Выигрыш оценивается определенным числом (функцией).

В зависимости от состояния информации различают игры с полной информацией и с неполной информацией. Если на каждом ходе игры каждому игроку известно, какие выборы были сделаны игроками раньше, то это игра *с полной* информацией.

Примерами таких игр являются шашки, шахматы. Если в игре не все известно о предыдущих выборах, то это игра *с неполной* информацией.

Доказано, что всякая игра с полной информацией имеет решение в виде седловой точки в чистых стратегиях. Например, для игры в шахматы это значит, что для каждого игрока имеется такая стратегия, придерживаясь которой, игрок либо выигрывает, либо сведет партию в ничью. Сложность заключается в отыскании такой стратегии. Существуют и другие виды игр, которые здесь не рассматриваются. Возможны и некоторые другие принципы классификации игр.

Контрольные вопросы и задания к главе 1

1. Что такое участники игры и игроки?
2. Что называется стратегией игрока?
3. Что такое ход в игре?
4. Что такое выигрыши и как они измеряются в игре?
5. Какие основные принципы закладываются при классификации игр?
6. Приведите примеры игр согласно изложенной классификации.

ГЛАВА 2. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ ДВУХ ИГРОКОВ С НУЛЕВОЙ СУММОЙ

2.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ, ПРИМЕРЫ И РЕШЕНИЯ МАТРИЧНЫХ ИГР В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1, 2, \ldots, m$, второй имеет n стратегий $j = 1, 2, \ldots, n$. Каждой паре стратегий (i, j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш первого игрока за счет второго игрока, если первый игрок применит свою i-ю стратегию, а второй — свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: первый игрок выбирает свою i-ю стратегию ($i = 1, 2, \ldots, m$), второй — свою j-ю стратегию ($j = 1, 2, \ldots, n$), после чего первый игрок получает выигрыш a_{ij} за счет второго игрока (если $a_{ij} < 0$, то это значит, что первый игрок платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ часто называется чистой стратегией.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой далее будет называться просто матричной игрой. Очевидно матричная игра относится к антагонистическим играм. Из ее определения следует, что для задания матричной игры достаточно задать матрицу $A = (a_{ij})$ порядка $m \times n$ выигрышей первого игрока.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору первым игроком i-й строки, а вторым игроком j-го столбца и получения первым игроком (за счет второго) выигрыша a_{ij}, находящегося в матрице A на пересечении i-й строки и j-го столбца.

Для формализации реальной конфликтной ситуации в виде матричной игры надо выделить и перенумеровать чистые стратегии каждого игрока и составить матрицу выигрышей.

Следующий этап — это определение оптимальных стратегий и выигрышей игроков.

Рассмотрим сначала несколько простых примеров формализаций конфликтных ситуаций.

Пример 2. 1. Игра с двумя пальцами. Два человека одновременно показывают один или два пальца и называют цифру один или два, которая по их мнению означает количество пальцев, показываемое вторым человеком. После того, как пальцы показаны и названы числа, происходит распределение выигрышей по следующим правилам: если оба угадали, сколько пальцев показал каждый человек, то фиксируется ничья — выигрыш нуль у каждого человека; если оба не уга-