

**Ф.Р. Мультон**

**Введение в небесную  
механику**

**Москва  
«Книга по Требованию»**

УДК 52  
ББК 22.6  
Ф11

Ф11      **Ф.Р. Мультон**  
Введение в небесную механику / Ф.Р. Мультон – М.: Книга по Требованию,  
2013. – 478 с.

**ISBN 978-5-458-25564-6**

«Введение в небесную механику» Мультона – первая книга, появляющаяся на русском языке по небесной механике. Поэтому несмотря на некоторые ее недостатки она является ценным пособием как для студентов и аспирантов, избирающих своей специальностью астрономию, так и для всех прочих лиц, желающих ознакомиться с основами науки о движении небесных тел в простой и достаточно элементарной форме. Действительно, книга Мультона дает хорошее представление о главнейших проблемах и методах классической небесной механики и не требует от читателя никаких специальных знаний, кроме знакомства с элементами математического анализа и механики. Большое количество разнообразных задач поможет вдумчивому читателю лучше уяснить предлагаемый материал и может дать хорошие навыки для самостоятельной работы. Однако на книгу Мультона нельзя смотреть как на курс, достаточно обширный и достаточно выявляющий принципиальную сущность затрагиваемых вопросов. Книга Мультона является только введением в современную науку о движении небесных тел, только фундаментом, первым ключом к ясному пониманию целей и методов небесной механики. Не все вопросы освещены Мультоном достаточно подробно, а многое и совершенно не затронуто.

**ISBN 978-5-458-25564-6**

© Издание на русском языке, оформление

«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,

«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, кляксы, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Необходимость второго издания этой книги дала повод для ее полного пересмотра. Общий план книги тот же, как и в первом издании, так как оказалось, что он удовлетворяет действительной потребности не только в этой стране, для студентов которой книга вначале была написана, но также и в Европе. Несмотря на весь соблазн ее элементарный характер сохранен, и она не сильно расширена. Сделано очень много улучшений, отчасти по совету ряда астрономов и математиков, и мы надеемся, что она более достойна одобрений, которые были до сего времени получены.

Наиболее важное изменение заключается в рассмотрении методов определения орбит. Этот метод логически следует за задачей двух тел и носит более элементарный характер, чем задача трех тел и теория возмущений. Поэтому он помещен в VI главе. Содержание также сильно изменено. Приведены методы и Лапласа и Гаусса, на которых более или менее основаны все другие методы общего применения. Мы не придерживались стандартных методов изложения, так как хотя они и удобны для практических применений, но не отличаются математической ясностью. Кроме того, нет недостатка в прекрасных работах, дающих подробности в оригинальных формах и примерах вычисления. Другие важные изменения и добавления сделаны в главах, касающихся задачи двух тел, задачи трех тел и геометрического рассмотрения возмущений.

Я с удовольствием выражают особенную признательность за содействие моим коллегам проф. Макмиллану (W. MacMillan) и Л. Хопкинсу (L. A. Hopkins) за повторное чтение корректур и за важные советы и указания многих недостатков, которые иначе остались бы незамеченными. Если эта книга имеет достоинства по форме, то они в значительной степени обязаны упомянутым лицам.

Чикаго, январь 1914 г.

Ф. Мультон

## ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

В этой книге скорее сделана попытка дать в некоторой степени удовлетворительное изложение многих частей небесной механики, чем дать исчерпывающее изложение какой-нибудь ее специальной части. Мы стремились построить изложение так, чтобы иметь логическую последовательность, постепенно усложняя работу, и придать различным вопросам выпуклость, соответствующую их научной и образовательной важности. Коротко говоря, мы стремились создать такую книгу, чтобы всякий имеющий необходимую математическую подготовку мог получить из книги в сравнительно короткое время и наиболее легким образом достаточно широкое и точное понятие о всем предмете.

При выполнении плана этой работы было необходимо дать представление о задаче трех тел. Это только одна из знаменитых задач небесной механики, но за последнее время она получила особый интерес благодаря исследованиям Гилла, Пуанкаре и Дарвина. Теория абсолютных возмущений является центральным предметом математической астрономии, и такая книга, как эта, явилась бы неполной, если бы в ней не было удалено достаточно места для этой теории. Одна глава посвящена геометрическому рассмотрению возмущений. Хотя этот метод почти не пригоден для вычислений, все же он дает ясное понятие о природе задачи и очень ценен для начинающих. Основные принципы аналитических методов даны с значительной полнотой, но многие детали в развитии формул опущены, чтобы размер книги соответствовал той цели, для которой она предназначена. Теории орбит не было придано чрезмерно видного положения, которое она заняла в этой стране, несомненно, под влиянием великолепной работы Ватсона (Watson) об этом предмете.

Метод изложения состоял в формулировании всех проблем заранее а в случае длинных преобразований в обрисовании тех шагов, которые надо сделать. Выражение «порядок малых величин» не употреблялось за исключением, если оно применялось к степенным рядам с явными параметрами, таким образом придавая работе всю определенность и простоту, характерную для действий со степенными рядами. Это особенно выражено в главе о возмущениях. Было обращено внимание на то, чтобы подчеркнуть все места, где введены предположения или применены методы,

которые нельзя достаточно оправдать, потому что улучшения могут быть сделаны лишь при ясном представлении слабых мест. Частные ссылки в тексте и библиография в конце глав, хотя ни в какой мере не исчерпывающие, достаточны, чтобы в дальнейшем направить изучающего к главным источникам.

Эта книга выросла из курса лекций, которые автор в продолжение последних шести лет ежегодно читал в Чикагском университете. Эти лекции предназначались для студентов старших курсов. Их слушали студенты-астрономы, многие изучающие главным образом математику и некоторые хотя специализировавшиеся в совершенно другом направлении, но желавшие получить понятие о процессе, при помощи которого астрономы интерпретируют и предсказывают небесные явления. Таким образом они многим дали понятие о методах исследования и результатах, полученных в небесной механике, и подготовили некоторых к подробному изучению различных отраслей новейших исследований. Цель работы, ее объем и методы изложения, повидимому, вполне оправданы этим опытом.

А. Лэн (Lunn) тщательно и с большим вниманием прочитал всю рукопись. Его многочисленные поправки и советы сильно содействовали точности и способу изложения во многих местах. Проф. Ормонд Стон (Ormond Stone) прочитал корректуры первых четырех глав и шестой. Его критика и советы как опытного исследователя и учителя неоценимы. В. Биль (W. Beal) с большим вниманием прочитал корректуры всей книги, и благодаря ему сделаны многие поправки. Автор выражает искреннюю благодарность всем этим лицам за ту готовность, с которой они посвятили так много своего времени для этой работы.

Чикаго, июль 1902 г.

Ф. Мультон

## О ГЛАВЛЕНИЕ

	<i>Стр.</i>
Предисловие к русскому переводу . . . . .	5
Предисловие автора ко второму изданию . . . . .	7
Предисловие автора к первому изданию . . . . .	8
<b>ГЛАВА I. ОСНОВНЫЕ ПОЛОЖЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ . . . . .</b>	<b>17</b>
1. Элементы и законы (17) — 2. Трактуемые проблемы (17) — 3. Перечисление основных элементов (18) — 4. Перечисление положений и законов (18) — 5. Происхождение законов движения (18) — 6. Замечания о первом законе движения (19) — 7. Замечания о втором законе движения (18) — 8. Замечания к третьему закону движения (20).	
<b>Определения и общие уравнения . . . . .</b>	<b>22</b>
9. Прямолинейное движение, скорость (22) — 10. Ускорение в прямолинейном движении (22) — 11. Скорость в криволинейном движении (23) — 12. Ускорение в криволинейном движении (24) — 13. Составляющие скорости вдоль и перпендикулярно к радиусу-вектору (25) — 14. Составляющие ускорения (26) — 15. Приложение к точке, равномерно движущейся по кругу (27) — 16. Секториальная скорость (27) — 17. Приложение к движению по эллипсу (29).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>29</b>
18. Центр массы <i>и</i> равных материальных точек (30) — 19. Центр массы неравных материальных точек (31) — 20. Центр тяжести (33) — 21. Центр массы сплошного тела (34) — 22. Плоскости и оси симметрии (36) — 23. Приложение к неоднородному кубу (36) — 24. Приложение к октанту шара (37).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>39</b>
<b>Исторический очерк от древних времен до Ньютона . . . . .</b>	<b>40</b>
25. Два деления истории (40) — 26. Формальная астрономия (40) — 27. Динамическая астрономия (42).	
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>43</b>
<b>ГЛАВА II. ПРЯМОЛИНЕЙНОЕ ДВИЖЕНИЕ . . . . .</b>	<b>44</b>
28. Задачи небесной механики (44) — 29. Дифференциальное уравнение движения падающей точки (44) — 30. Случай постоянной силы (45) — 31. Сила притяжения изменяется прямо пропорционально расстоянию (46).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>47</b>
32. Решение линейных уравнений при помощи показательных функций (48) — 33. Сила притяжения, изменяющаяся обратно пропорционально квадрату расстояния (50) — 34. Высота проекции (52) — 35. Скорость из бесконечности (52) — 36. Приложение к рассеиванию атмосфер (53) — 37. Сила пропорциональна скорости (55) — 38. Сила пропорциональна квадрату скорости (58).	

	<i>Стр.</i>
<b>Задачи . . . . .</b>	60
39. Параболическое движение (61).	
<b>Задачи . . . . .</b>	63
<b>Тепловая энергия Солнца . . . . .</b>	63
40. Работа и энергия (63) — 41. Вычисление работы (64) — 42. Температура метеоров (65) — 43. Метеоритная теория солнечного тепла (66) — 44. Контракционная теория Гельмгольца (66).	
<b>Задачи . . . . .</b>	70
Исторический очерк и библиография . . . . .	71
<b>ГЛАВА III. ЦЕНТРАЛЬНЫЕ СИЛЫ . . . . .</b>	72
45. Центральная сила (72) — 46. Закон площадей (72) — 47. Аналитическое доказательство закона площадей (74) — 48. Обратная теорема площадей (73) — 49. Законы угловой и линейной скоростей (76).	
<b>Совместные дифференциальные уравнения . . . . .</b>	76
50. Порядок системы совместных дифференциальных уравнений (76) — 51. Понижение порядка (78).	
<b>Задачи . . . . .</b>	79
52. Интеграл живых сил (79).	
<b>Примеры, где <math>f</math> есть функция одних координат . . . . .</b>	80
53. Сила изменяется прямо пропорционально расстоянию (80) — 54. Дифференциальное уравнение орбиты (81) — 55. Закон тяготения Ньютона (83) — 56. Примеры нахождения закона силы (85).	
<b>Универсальность закона Ньютона . . . . .</b>	85
57. Орбиты двойных звезд (85) — 58. Закон силы в двойных звездах (86) — 59. Геометрическая интерпретация второго закона (86) — 60. Примеры движений по коническим сечениям (88).	
<b>Задачи . . . . .</b>	89
<b>Определение орбиты из закона силы . . . . .</b>	90
61. Сила прямо пропорциональна расстоянию (90) — 62. Сила изменяется обратно пропорционально расстоянию (91) — 63. Сила изменяется обратно пропорционально пятой степени расстояния (92).	
<b>Задачи . . . . .</b>	94
Исторический очерк и библиография . . . . .	95
<b>ГЛАВА IV. ПОТЕНЦИАЛ И ПРИТЯЖЕНИЯ ТЕЛ . . . . .</b>	97
64. Введение (97) — 65. Телесные углы (97) — 66. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на точку, находящуюся внутри него (98) — 67. Притяжение тонкого однородного эллипсоидального слоя на точку внутри него (99) — 68. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на внешнюю точку. Метод Ньютона (99) — 69. Замечания о методе	

Стр.

Ньютона (101) — 70. Притяжение тонкого однородного сферического слоя на внешнюю точку. Метод Томсона и Тэта (102) — 71. Притяжения на точку однородного сферического слоя (103).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 104

72. Общие выражения для составляющих притяжения и для потенциала, когда притягиваемая точка не является частью притягивающей массы (104) — 73. Случай, когда притягиваемая точка является частью притягивающей массы (105) — 74. Поверхности уровня (108) — 75. Потенциал и притяжение тонкого однородного круглого диска на точку, лежащую на его оси (109) — 76. Потенциал и притяжение тонкого однородного сферического слоя на внутреннюю и внешнюю точки (109) — 77. Второй метод вычисления притяжения однородного тела (111).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 112

78. Потенциал и притяжение сплошного однородного сжатого сфроида на удаленную точку с единицей массы (113) — 79. Потенциал и притяжение сплошного однородного эллипсоида на точку с единицей массы внутри него (116).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 120

80. Притяжение сплошного однородного эллипсоида на внешнюю точку. Метод Айвори (120) — 81. Притяжение сфероидов (125) — 82. Притяжения на поверхности сфероидов (126).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 129

*Исторический очерк и библиография . . . . .* 130

**ГЛАВА V. ЗАДАЧА О ДВУХ ТЕЛАХ . . . . .** 132

83. Уравнения движения (132) — 84. Движение центра массы (132) — 85. Уравнения относительного движения (134) — 86. Интегралы площадей (135) — 87. Плоская задача (137) — 88. Выражение элементов орбиты через постоянные интегрирования (139) — 89. Свойства движения (140) — 90. Выбор единиц и определение постоянной  $k$  (142).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 143

91. Определение положения тела, двигающегося по параболической орбите (144) — 92. Уравнение, связывающее два радиуса и хорду. Уравнение Эйлера (146) — 93. Определение положения тела, двигающегося по эллиптической орбите (148) — 94. Геометрический вывод уравнения Кеплера (149) — 95. Решение уравнения Кеплера (149) — 96. Дифференциальные поправки (150) — 97. Графическое решение уравнения Кеплера (151) — 98. Перечисление формул (153) — 99. Разложение  $E$  в ряд (153) — 100. Разложение  $r$  и  $v$  в ряды (156) — 101. Прямое вычисление полярных координат (159) — 102. Определение положения тела, двигающегося по гиперболической орбите (163) — 103. Определение положения тела, двигающегося по эллиптической или гиперболической орбите, когда  $e$  почти равно единице (164).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 167

104. Гелиоцентрическое положение в системе эклиптики (168) — 105. Переход начала координат в центр Земли (170) — 106. Переход к геоцентрическим экваториальным координатам (171) — 107. Прямое вычисление геоцентрических экваториальных координат (172).

**ЗАДАЧИ . . . . .** 174

*Исторический очерк и библиография . . . . .* 174

Стр.

<b>ГЛАВА VI. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ОРБИТ . . . . .</b>	<b>175</b>
108. Общие соображения (175) — 109. Промежуточные элементы (175) — 110. Подготовка наблюдений (177) — 111. Очерк метода Лапласа определения орбит (178) — 112. Очерк метода Гаусса определения орбит (181).	
<b>Метод Лапласа определения орбит . . . . .</b>	<b>184</b>
113. Определение первой и второй производных угловых координат из трех наблюдений (184) — 114. Определение производных из более чем трех наблюдений (180) — 115. Приближения в определении значений $\lambda, \mu, \nu$ и их производных (187) — 116. Выбор начала времени (188) — 117. Приближения в случае четырех наблюдений (189) — 118. Основные уравнения (191) — 119. Уравнения для определения $r$ и $\rho$ (192) — 120. Условия для единственности решения (194) — 121. Употребление четвертого наблюдения в случае двойного решения (197) — 122. Пределы $t$ и $M$ (197) — 123. Дифференциальные поправки (198) — 124. Исследование детерминанта $D$ (200) — 125. Приведение детерминантов $D_1$ и $D_2$ (202) — 126. Поправки за aberrационное время (203) — 127. Разложение $x, y$ и $z$ в ряды (205) — 129. Вычисление высших производных $\lambda, \mu, \nu$ (2.6) — 129. Улучшение значений $x, y, z, x', y', z'$ (207) — 130. Видоизменения Гарцера и Лейшнера (208).	
<b>Метод Гаусса определения орбит . . . . .</b>	<b>209</b>
131. Уравнение для $\rho_2$ (209) — 132. Уравнения для $\rho_1$ и $\rho_3$ (212) — 133. Улучшение решения (212) — 134. Метод Гаусса для вычисления отношения площадей треугольников (213) — 135. Первое уравнение Гаусса (214) — 136. Второе уравнение Гаусса (215) — 137. Решение уравнений (48) и (101) (216) — 139. Определение элементов $a, e$ и $\omega$ (218) — 130. Второй метод определения $a, e$ и $\omega$ (219) — 140. Вычисление времени прохождения через перигелий (222) — 141. Прямой вывод уравнений, определяющих орбиты (223) — 142. Формулы для вычисления приближенной орбиты (225).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>230</b>
<b>Исторический очерк и библиография . . . . .</b>	<b>231</b>
<b>ГЛАВА VII. ОБЩИЕ ИНТЕГРАЛЫ ЗАДАЧИ О ТЕЛАХ . . . . .</b>	<b>233</b>
143. Дифференциальные уравнения движения (233) — 144. Шесть интегралов движения центра массы (234) — 145. Три интеграла площадей (237) — 146. Интеграл энергии (239) — 147. Вопрос о новых интегралах (240).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>241</b>
148. Перенесение начала в Солнце (241) — 149. Динамическое значение уравнений (243) — 150. Порядок системы уравнений (244).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>245</b>
<b>Исторический очерк и библиография . . . . .</b>	<b>246</b>
<b>ГЛАВА VIII. ЗАДАЧА О ТРЕХ ТЕЛАХ . . . . .</b>	<b>248</b>
151. Специальные случаи задачи о трех телах (248).	
<b>Движение бесконечно малого тела . . . . .</b>	<b>249</b>
152. Дифференциальные уравнения движения (249) — 153. Интеграл Чебаки (251) — 154. Поверхности нулевой относительной скорости (252) —	

Стр.

155. Приближенные формы поверхностей (253) — 155. Области действительной и минимой скоростей (256) — 157. Метод вычисления поверхностей (257) — 158. Двойные точки поверхностей и частные решения задачи о трех телах (259).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>263</b>
159. Критерий Тиссерана для установления существенности комет (264) — 160. Устойчивость частных решений (266) — 161. Применение критерия устойчивости к первой группе частных решений (268) — 162. Частные значения постоянных интегрирования (270) — 163. Применение к противостоянию (Gegenschwung) (272) — 164. Применение критерия устойчивости к второй группе частных решений (273).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>274</b>
<b>Случай трех конечных тел . . . . .</b>	<b>275</b>
165. Условия для круговых орбит (275) — 166. Решения в виде разносторонних треугольников (277) — 167. Прямолинейные решения (277) — 168. Динамические свойства решений (278) — 169. Решение в форме конических сечений (279).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>283</b>
<b>Исторический очерк и библиография . . . . .</b>	<b>284</b>
<b>ГЛАВА IX. ВОЗМУЩЕНИЯ. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СООБРАЖЕНИЯ . . . . .</b>	<b>286</b>
170. Значение возмущений (286) — 171. Вариация координат (286) — 172. Вариация элемент в (286) — 173. Определение элементов из графического построения (288) — 174. Разложение возмущающей силы (289).	
<b>Действия составляющих возмущающей силы . . . . .</b>	<b>289</b>
175. Возмущающие действия ортогональной составляющей (289) — 176. Действия тангенциальной составляющей на большую ось (290) — 177. Действия тангенциальной составляющей на линию апсид (291) — 178. Действия тангенциальной составляющей на эксцентриситет (291) — 179. Действия нормальной составляющей на большую ось (292) — 180. Действия нормальной составляющей на линию апсид (292) — 181. Действия нормальной составляющей на эксцентриситет (293) — 182. Таблица результатов (294) — 183. Возмущающие действия сопротивляющейся среды (294) — 184. Возмущения, возникающие от сплюснутости центрального тела (295).	
<b>Задачи . . . . .</b>	<b>296</b>
<b>Теория Луны . . . . .</b>	<b>298</b>
185. Геометрическое рассмотрение возмущающих действий третьего тела (298) — 186. Аналогический вывод возмущающих влияний третьего тела (298) — 187. Возмущение узла (302) — 188. Возмущения наклонности (303) — 189. Прецессия равноденствий. Нутация (303) — 190. Разложение возмущающего ускорения в плоскости движения (304) — 191. Возмущения большой оси (305) — 192. Возмущения периода (306) — 193. Годичное уравнение (306) — 194. Вековое ускорение среднего движения Луны (306) — 195. Вариация (308) — 195. Параллактическое неравенство (309) — 197. Движение линии апсид (309) — 198. Вторичные действия (312) — 199. Возмущения эксце (тригонета) (312) — 200. Энекция (314) — 201. Метод Гаусса вычисления вековых вариаций (315) — 202. Долгопериодические неравенства (316).	

	<i>Стр.</i>
<b>ЗАДАЧИ . . . . .</b>	316
<i>Исторический очерк и библиография . . . . .</i>	317
<b>ГЛАВА X. ВОЗМУЩЕНИЯ. АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД . . . . .</b>	320
<b>203. Вводные замечания (320) — 204. Поясняющий пример (321) —</b>	
<b>205. Уравнения в задаче трех тел (325) — 206. Преобразования переменных (326) — 207. Метод решения (329) — 208. Определение постоянных интегрирования (332) — 209. Члены первого порядка (333) —</b>	
<b>210. Члены второго порядка (335).</b>	
<b>ЗАДАЧИ . . . . .</b>	337
<b>211. Выбор элементов (337) — 212. Скобки Лагранжа (338) — 213. Свойства скобок Лагранжа (338) — 214. Переход к обыкновенным элементам (340) — 215. Метод прямого вычисления скобок Лагранжа (341) —</b>	
<b>216. Вычисление <math>[\omega, \Omega], [\Omega, i], [i, \omega]</math> (345) — 217. Вычисление <math>[K, P]</math> (345) —</b>	
<b>218. Вычисление <math>[a, e], [e, \dot{e}], [\dot{e}, a]</math> (346) — 219. Переход от <math>\Omega, \omega</math> и <math>a</math> к <math>\Omega, \pi</math> и <math>e</math> (349) — 220. Введение прямоугольных составляющих возмущающего ускорения (350).</b>	
<b>ЗАДАЧИ . . . . .</b>	352
<b>221. Разложение нестурбационной функции (353) — 222. а) Разложение <math>R_{1,2}</math> по взаимной наклонности (354) — 223. б) Разложение коэффициентов по степеням <math>e_1</math> и <math>e_2</math> (356) — 224. с) Разложение в ряды Фурье (357) —</b>	
<b>225. Периодические вариации (361) — 226. Вариации долгого периода (362) — 227. Вековые вариации (363) — 228. Члены второго порядка по отношению к массам (364) — 229. Метод Лагранжа для определения вековых вариаций (365) — 230. Вычисление возмущений с помощью механических квадратур (370) — 231. Общие размышления (372).</b>	
<b>ЗАДАЧИ . . . . .</b>	374
<i>Исторический очерк и библиография . . . . .</i>	374
<b>ДОБАВЛЕНИЯ</b>	
<b>ДОБАВЛЕНИЕ I. КАНОНИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ</b>	
<b>Уравнения Лагранжа . . . . .</b>	377
<b>1. Общая форма уравнений небесной механики (377) — 2. Обобщенные координаты (378) — 3. Уравнения Лагранжа (379) — 4. Выражение для живой силы в обобщенных координатах (383) — 5. Случай, когда силы имеют силовую функцию (384) — 6. Вывод уравнений Лагранжа из принципа Гамильтона (384) — 7. Преобразование уравнений движения к полярным координатам (385).</b>	
<b>Канонические уравнения и их свойства . . . . .</b>	387
<b>8. Канонические переменные (387) — 9. Канонические уравнения (387) —</b>	
<b>10. Выражение для <math>H</math> в функции канонических переменных (390) —</b>	
<b>11. Случай, когда <math>H</math> не содержит явно времени (391) — 12. Преобразование канонических уравнений (392) — 13. Теорема Якоби (396) —</b>	
<b>14. Формулировка Пуанкаре теоремы Якоби (397).</b>	
<b>Уравнение Гамильтона-Якоби . . . . .</b>	398
<b>15. Уравнение Гамильтона-Якоби (398) — 16. Теорема Гамильтона-Якоби (398) — 17. Случай, когда <math>H</math> не содержит времени (400) —</b>	
<b>18. Обратная теорема (402) — 19. Интегрирование уравнения Гамиль-</b>	

	Стр
тона-Якоби (405) — <b>20.</b> Случай интегрируемости Лиувилля (405) — <b>21.</b> Случай интегрируемости Н. Д. Моисеева (407) — <b>22.</b> Случай интегрируемости Штеккеля (410) — <b>23.</b> Исследования Бургатти (412) — <b>24.</b> Метод вариации произвольных постоянных (413) — <b>25.</b> Случай, когда $H$ не содержит времени (415).	
<b>Задача о двух телах . . . . .</b>	<b>416</b>
<b>26.</b> Канонические уравнения задачи о двух телах (416) — <b>27.</b> Интегрирование уравнения Гамильтона-Якоби (419) — <b>28.</b> Канонические элементы для эллиптической орбиты (421).	
<b>Задача о трех телах . . . . .</b>	<b>425</b>
<b>29.</b> Канонические уравнения задачи о трех телах (425) — <b>30.</b> Алгебраические интегралы задачи о трех телах (426) — <b>31.</b> Уравнения движения в относительных координатах Якоби (427) — <b>32.</b> Вариация произвольных постоянных (431) — <b>33.</b> Канонические элементы Делоиз (434) — <b>34.</b> Другие системы канонических элементов (438).	
<b>Специальные случаи задачи о трех телах . . . . .</b>	<b>441</b>
<b>35.</b> Задача о двух неподвижных центрах (441) — <b>36.</b> Ограничена задача о трех телах (443).	
<b>ДОБАВЛЕНИЕ II. ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ . . . . .</b>	<b>446</b>
<b>Постановка вопроса . . . . .</b>	<b>446</b>
<b>1.</b> Общее определение устойчивости (446) — <b>2.</b> Примеры устойчивых и неустойчивых решений дифференциальных уравнений (449) — <b>3.</b> Дифференциальные уравнения возмущенного движения (452) — <b>4.</b> Интегрирование уравнений возмущенного движения (455).	
<b>Общие теоремы об устойчивости . . . . .</b>	<b>459</b>
<b>5.</b> Исследование устойчивости невозмущенного движения (459) — <b>6.</b> Критерий устойчивости (462) — <b>7.</b> Критерий неустойчивости (465).	
<b>Уравнения с постоянными коэффициентами . . . . .</b>	<b>468</b>
<b>8.</b> Уравнения в вариациях (468) — <b>9.</b> Случай, когда уравнения возмущенного движения имеют каноническую форму (469) — <b>10.</b> Некоторые вспомогательные предложения (472) — <b>11.</b> Определение устойчивости по корням характеристического уравнения системы в вариациях (475) — <b>12.</b> Исследование сомнительного случая (479).	
<b>Основная литература по устойчивости движения . . . . .</b>	<b>480</b>