

Г.Н. Попов

**Как применялась и
применяется тригонометрия
на практике**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
Г11

Г11 **Г.Н. Попов**
Как применялась и применяется тригонометрия на практике / Г.Н. Попов – М.:
Книга по Требованию, 2013. – 88 с.

ISBN 978-5-458-27457-9

Издание 2 дополненное комиссией по учебникам при Главсоцвосе допущено для школ 2 ступени

ISBN 978-5-458-27457-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2013

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2013

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ГЛАВА ПЕРВАЯ.

Что такое тригонометрические величины и как ими пользуются в астрономии.

Приступающий к изучению тригонометрии обычно узнает от преподавателя, что с помощью этой науки можно „решать“ треугольники, т. е. по трем данным из пяти (два угла и три стороны) элементов треугольника можно найти остальные два.

История науки показывает нам, что человечество не сразу овладело этим искусством и потребность в решении такого рода задач возникла на почве затруднений практического характера в вопросах, связанных отчасти с астрономией, отчасти с измерениями на поверхности земли.

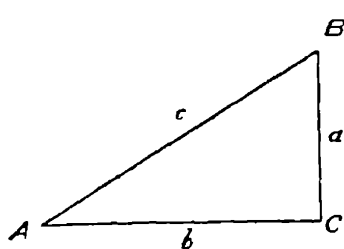
Прежде чем ознакомиться с содержанием этих вопросов в подробностях, напомним в двух словах о тех приемах, которыми принято пользоваться в тригонометрии.

Элементарная геометрия, как известно, дает нам два важных положения. Первое касается любого треугольника и гласит, что сумма его внутренних углов равна 180° . Другое, так называемая теорема Пифагора, касается только прямоугольных треугольников и утверждает, что квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.

Но знание углов треугольника еще не позволяет найти размер его сторон, точно так же, как, зная размеры гипотенузы и катетов прямоугольного треугольника, мы одними геометрическими приемами по этим данным не сумеем

определить его углы. Можно было бы, конечно, использовать для этой цели всем хорошо знакомый геометрический прибор, называемый транспортиром, но в вопросах практики такой прием часто оказывается мало удовлетворительным, так как дает значения углов в очень грубом приближении, что в некоторых случаях, особенно в астрономии, может повлечь большие погрешности в конечных результатах.

В этих случаях на помощь приходит тригонометрия, позволяющая вместо непосредственного измерения углов



Черт. 1.

определять их размеры вычислением. Для этой цели она вводит в рассмотрение особые величины, представляющие отношения сторон треугольника. Таких отношений несколько; каждое из них имеет свое название и может быть вычислено с какой угодно степенью точности.

Возьмем прямоугольный треугольник ABC , у которого гипотенуза $AB = c$, катет $AC = b$ и катет $BC = a$ (черт. 1). Тогда отношение катета a к гипотенузе c называется *синусом* угла A и обозначается сокращенно через $\sin A$, так что

$$\sin A = \frac{a}{c}, \quad (1)$$

следовательно

$$a = c \cdot \sin A,$$

т. е. катет равен произведению гипотенузы на синус угла, противолежащего определяемому катету. Таким образом, если величина синуса известна, то по данному размеру гипотенузы легко найти и катет a .

Отношение катета b к гипотенузе c называется *косинусом* угла A и обозначается сокращенно через $\cos A$,

так что

$$\cos A = \frac{b}{c}, \quad (2)$$

следовательно

$$b = c \cdot \cos A,$$

т. е. катет равен произведению гипотенузы на косинус угла, прилежащего к определяемому катету.

Легко видеть, что мы могли бы написать для угла B по аналогии

$$\sin B = \frac{b}{c}, \quad (3)$$

$$\cos B = \frac{a}{c}. \quad (4)$$

Сличая равенства (1) и (4) или (2) и (3), видим, что

$$\begin{aligned} \sin A &= \cos B, \\ \sin B &= \cos A, \end{aligned}$$

а так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то оказывается, что в прямоугольном треугольнике синус любого из острых углов есть в то же время косинус угла, дополняющего острый угол до прямого.

Можно наконец пользоваться и отношением катетов. Так, отношение катета a к катету b называется *тангенсом* угла A . Это отношение принято обозначать $\operatorname{tg} A$, так что

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}, \quad (5)$$

следовательно

$$a = b \cdot \operatorname{tg} A.$$

т. е. один катет равен произведению другого катета на тангенс угла, противолежащего определяемому.

Для угла B можно писать:

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}, \quad (6)$$

или

$$b = a \operatorname{tg} B.$$

Ясно, что, перемножив почленно равенства (5) и (6), найдем

$$\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B = 1,$$

откуда видно, что

$$\operatorname{tg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} B} \text{ и } \operatorname{tg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} A},$$

т. е. тангенс одного из острых углов есть величина, обратная тангенсу другого острого угла. Эта величина, обратная тангенсу, называется *котангенсом* того же угла и обозначается $\operatorname{ctg} A$ или $\operatorname{ctg} B$, так что

$$\operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A} \text{ или } \operatorname{ctg} B = \frac{1}{\operatorname{tg} B},$$

а так как $\angle A + \angle B = 90^\circ$, то оказывается, что

$$\operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B = \operatorname{tg} (90 - A)$$

или

$$\operatorname{ctg} B = \operatorname{tg} A = \operatorname{tg} (90 - B),$$

т. е. тангенс одного из острых углов треугольника равен котангенсу дополнительного угла (до 90°). Вот в сущности все, что надо читателю освежить в памяти для понимания дальнейшего изложения. Заметим, что есть возможность вычислить значения синусов, косинусов, тангенсов и котангенсов для любого угла и таким образом составить таблицы, с помощью которых по указанным выше формулам, зная катет и гипотенузу, или оба катета, можно, вычислив их отношение, подыскать в таблицах угол, выраженный в градусах и минутах (а в более точных таблицах и в секундах) и соответствующий этому отношению. В некоторых частных случаях такие отношения вычисляются крайне просто на основании чисто геометрических

соображений. Например известно, что если один острый угол прямоугольного треугольника равен 30° , меньший катет вдвое меньше гипотенузы, следовательно

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}.$$

Возведем почленно равенства (1) и (2) в квадрат:

$$\sin^2 A = \frac{a^2}{c^2}, \quad \cos^2 A = \frac{b^2}{c^2}$$

и сложим их

$$\sin^2 A + \cos^2 A = \frac{a^2 + b^2}{c^2}$$

но по теореме Пифагора $a^2 + b^2 = c^2$, следовательно

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1.$$

Мы получили весьма важное соотношение, позволяющее по синусу угла найти его косинус и обратно.

Действительно,

$$\cos^2 A = 1 - \sin^2 A.$$

Извлекая корень квадратный, получим:

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A}.$$

Применим это к случаю $A = 30^\circ$; так как $\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$, то

$$\sin^2 30^\circ = \frac{1}{4},$$

следовательно

$$\cos 30^\circ = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Если бы мы захотели узнать значение тангенса 30° , то легко видеть, что, деля почленно формулы (1) и (2), мы бы получили:

$$\frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{b};$$

но формула (5) дает нам

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b},$$

следовательно

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A},$$

т. е. тангенс угла есть отношение синуса этого угла к косинусу того же угла.

Так как

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \text{ а } \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2},$$

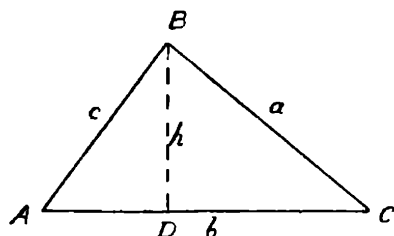
получим

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Нетрудно убедиться, что $\operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}$, как величина обратная тангенсу.

При составлении таблиц пользуются особыми формулами, на выводе которых мы здесь останавливаться не будем; заметим только, что математики на протяжении ряда веков стремились усовершенствовать приемы вычисления значений тригонометрических величин и достигли в этом полного успеха. В настоящее время мы распола-

гаем таблицами, которые позволяют знать значение синуса, косинуса, тангенса и котангенса любого угла с точностью до нескольких десятичных знаков, что превышает, во всяком случае, потребности практики.



Черт. 2.

Для понимания дальнейшего нам понадобится знание еще одного соотношения. Возьмем треугольник ABC (черт. 2) и из вершины угла B опустим перпендикуляр h на сторону b . Тогда по знакомым

уже нам правилам из прямоугольного треугольника ABD получим

$$h = c \cdot \sin A,$$

а из прямоугольного треугольника BDC аналогично будем иметь

$$h = a \cdot \sin C,$$

следовательно

$$a \cdot \sin C = c \cdot \sin A,$$

откуда

$$\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C},$$

т. е. стороны произвольного треугольника относятся как синусы противолежащих им углов.

Проследим исторически те вопросы, которые выдвинули на первый план рассмотрение вышеуказанных отношений.

Уже древние египтяне и вавилоняне положили основание наблюдательной астрономии, и вполне понятно, что при желании решить тот или иной астрономический вопрос они сталкивались с рядом затруднений, побуждавших мысль человеческую работать в этом направлении для получения мало-мальски удовлетворительных результатов.

Для примера мы остановимся на работах греческого астронома Аристарха Самосского, жившего в III веке до нашей эры. В те времена ни о какой тригонометрии еще и не помышляли, и поэтому при исследованиях поневоле приходилось ограничиваться соображениями чисто геометрического характера.

Аристарх пытался найти отношение диаметра Солнца к диаметру Луны и путем наблюдений убедился, что когда видна половина лунного диска, угол между Солнцем и Луной равен 87° . Но когда половина освещенной части Луны обращена к Земле, линии, соединяющие центр Луны с центрами Солнца и Земли, взаимно перпендикулярны.

под углом в $22\frac{1}{2}^\circ$ к TE . Тогда

ТАК КАК

TO

$$GE:EH > 15:2.$$

$$FE:GE > \frac{12}{5},$$
$$FE:GE > 36:15$$
$$GE:EH > 15:2,$$

следовательно

$$FE : EH > 18,$$

или

$$EH < \frac{1}{18} FE,$$

а так как $FE = TE$, то EH менее $\frac{1}{18} TE$ и $EH < \frac{1}{18} TH$.

Из подобия треугольников SLT и TEH следует, что

$$EH : TH = LT : ST,$$

откуда

$$LT < \frac{1}{18} ST.$$

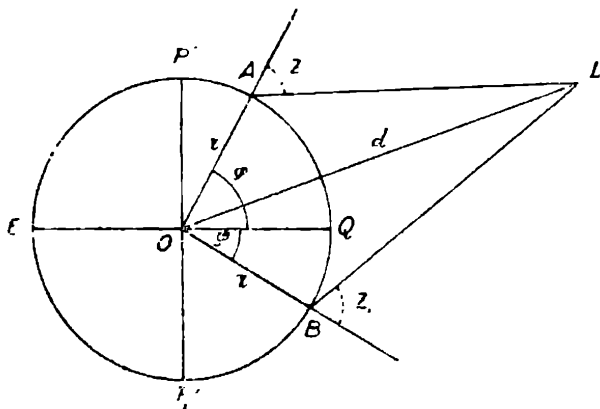
Аналогично Аристарх доказывает, что LT более $\frac{1}{20} ST$, и заключает отсюда, что расстояние Солнца от Земли превышает расстояние Луны от Земли не более чем в 20 раз и не менее чем в 18 раз.

Этот способ определения отношения лунного и солнечного расстояний есть первый по времени и удачный по замыслу шаг в области применения математики к астрономии.

Дело в том, что результат, полученный Аристархом, конечно не точен, но мысль, положенная им в основу его геометрических соображений, безусловно правильная, но Аристарх не располагал ни методами тригонометрии с одной стороны, ни инструментами для наблюдения — с другой.

Посмотрим теперь, как определяется расстояние Земли от Солнца или Луны в настоящее время. Двое наблюдателей выбирают места наблюдений A и B на одном и том же меридиане (черт. 4). Пусть L есть центр Луны и расстояние $OL = d$ есть искомое, причем точка O — центр Земли. Линия PP_1 есть ось Земли, EQ есть линия сечения плоскости меридиана с экватором.

$OA = OB = r$ — радиусу Земли. Наконец z и z_1 — углы, выражающие зенитные расстояния. Углы $\varphi = \angle AOQ$ и $\varphi_1 = \angle BOQ$ — географические широты, соответствующие местам наблюдения.



Черт. 4.

Из треугольников ALO и BLO имеем:

$$\sin ALO = \frac{r}{d} \sin (180 - z), \quad (7)$$

$$\sin BLO = \frac{r}{d} \cdot \sin (180 - z_1); \quad (8)$$

но так как

$$\sin (180 - z) = \sin z,$$

$$\sin (180 - z_1) = \sin z_1,$$

формулы (7) и (8) упрощаются:

$$\sin ALO = \frac{r}{d} \cdot \sin z,$$

$$\sin BLO = \frac{r}{d} \cdot \sin z_1.$$

Для Луны углы ALO и BLO каждый меньше одного градуса, поэтому без особой погрешности синусы этих углов можно заменить дугами, им соответствующими:

$$\sin ALO = l \cdot \sin 1'',$$

$$\sin BLO = l_1 \cdot \sin 1'',$$