

Еленьский Щепан

**По следам Пифагора.
Занимательная математика**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 82-053.2
ББК 74.27
Е50

Еленьский Щепан
Е50 По следам Пифагора. Занимательная математика / Еленьский Щепан – М.: Книга по Требованию, 2012. – 488 с.

ISBN 978-5-458-25452-6

В книге собраны интереснейшие математические и геометрические задачи. И называется она "По следам Пифагора" в честь великого математика древней Греции. Вслед за ним были другие корифеи науки: Евклид, Птоломей, Диофант, но у истоков исследования этих вопросов стоял Пифагор.

ISBN 978-5-458-25452-6

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2012

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2012

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

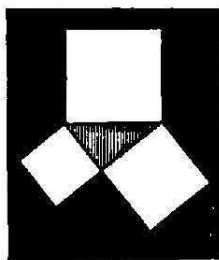
Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

воряли бы условию: $a^2 + b^2 = c^2$, Пифагор нашел формулы, которые в современной символике могут быть выражены так:

$$a = 2n + 1; \quad b = 2n(n + 1); \quad c = 2n^2 + 2n + 1,$$

где n означает произвольное целое число. Оказалось, что всякий треугольник с такими сторонами является прямоугольным треугольником.

Теперь прямоугольные треугольники со сторонами, выраженными натуральными числами, мы называем пифагорейскими треугольниками.



Пифагору приписывается открытие теоремы, согласно которой квадрат, построенный на гипотенузе прямоугольного треугольника, равен сумме квадратов, построенных на его катетах. Это так называемая теорема Пифагора.

Вначале считали, что стороны каждого прямоугольного треугольника можно выразить такими натуральными числами a , b , c , которые будут удовлетворять формуле $a^2 + b^2 = c^2$. Дальнейшие исследования математиков пифагорейской школы показали, что это не так.

Например, равнобедренный прямоугольный треугольник (составляющий половину квадрата) не является пифагорейским треугольником, потому что нельзя найти такие три натуральных числа a , b , c , которые удовлетворили бы условию

$$a^2 + a^2 = c^2, \quad \text{или} \quad 2a^2 = c^2.$$

Для пифагорейцев это было ужасным открытием: вера в то, что все явления во Вселенной можно объяснить с помощью натуральных чисел, была подорвана.

Открытие, что мнр чисел противоположен мнру геометрических построений, произвело такое большое впечатление, что сторонники пифагорейской школы сохраняли это открытие в тайне и в дальнейших работах геометрические исследования всячески отделяли от арифметических. Это сильно тормозило развитие греческой арифметики, но в то же время способствовало быстрому развитию геометрии.

Странными путями шло развитие отдельных отраслей точных наук в древней Греции.

Геометрия, развитие которой неразрывно связано с великими именами Евклида, Архимеда, Аполлония (IV, III и II века до н. э.), первой достигает большого совершенства. Затем, уже во II веке нашей эры, благодаря великим успехам Птолемея наступил расцвет астрономии. Наконец, в конце III века, Диофант закладывает основы систематизированной арифметики.

После трех корифеев науки: Евклида, Птолемея, Диофанта—остались фундаментальные труды: «Начала», «Альмагест», «Арифметика», каждый из которых делится на тринадцать книг.

Однако у источника этого великого потока мысли лежат исследования Пифагора. Чтобы воздать должное его заслугам, эту книгу по занимательной математике мы назвали «По следам Пифагора».

Инж. Щ. Е л е н ь с к и й

Перевод с польского
Г. Ф. Боярской, Б. В. Боярского
и А. А. Якушева

Часть первая

I. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ АНЕКДОТЫ И АНЕКДОТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Общие замечания

Математических анекдотов существует очень много, а анекдотическим задачам просто нет конца. Чем же следует руководствоваться при их выборе? Главным образом принципом наибольшего разнообразия.

Среди приведенных здесь задач и математических анекдотов читатель найдет самые разнотипные: задачи на деление, задачи, в которых говорится о расстановке, разливании чего-либо, о переправах, маневрах и т. д.; задачи из самых различных эпох: возникшие тысячи, сотни и десятки лет назад; задачи китайские, индийские, греческие, арабские, русские, французские и т. д.; задачи великих математиков: Леонардо Фибоначчи, Исаака Ньютона, и др., а также задачи неизвестных авторов, дошедшие до нас по традиции. А по тематике почти каждая задача своеобразна.

Все задачи легкие, доступные каждому, кто хоть немного знаком с элементарной арифметикой, алгеброй и геометрией. А те читатели, память которых не сохранила этих знаний, смогут воспользоваться большинством приведенных здесь задач, освежая в памяти в форме развлечения давно усвоенные математические истины.

Для многих задач полностью приведены решения, для некоторых даны только ответы, а для других не даны и ответы: это задачи, самостоятельное решение которых (по аналогии с предыдущими) может принести читателю не только пользу, но и доставить истинное удовольствие.

1. Имущество араба

Это одна из старейших, вероятно арабских, задач неизвестного автора. Некий араб оставил в наследство трем своим сыновьям стадо верблюдов, причем старшему сыну завещал половину стада, среднему — третью часть, а самому младшему — девятую часть наследства. Однако в стаде оказалось 17 верблюдов.

Разделить наследство было трудно, поэтому наследники обратились за советом к судье, известному своей мудростью во всей округе. Судья решил так: нужно одолжить одного верблюда и приступить к разделу, имея 18 верблюдов. Братья сделали, как советовал судья. Тогда старшему досталось 9 верблюдов, среднему 6, а младшему 2, взятого верблюда вернули хозяину. Братья остались очень довольны мудрым решением кадия, так как каждый из них получил больше, чем завещал отец, а именно: один на $\frac{1}{2}$ больше, другой на $\frac{1}{3}$, а третий на $\frac{1}{9}$ верблюда.

Этот любопытный результат кажется парадоксальным. Однако по сумме трех частей, на которые отец велел сыновьям разделить наследство $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{17}{18}$, мы убеждаемся, что если бы раздел имущества был выполнен точно по завещанию, то $\frac{1}{18}$ наследства не была бы разделена. Вот в чем источник тех «излишков», которые неожиданно, к своей радости, получили наследники.

2. Как поставить точное время

У меня временно нет карманных часов, они сданы в починку часовому мастеру, а настенные остановились. Я отправляюсь к своему знакомому, часы которого, как мне известно, всегда идут безукоризненно. Побыв у знакомого некоторое время, я возвращаюсь домой и точно ставлю на часах время. Каким же образом я мог это сделать, если предварительно не знал, сколько времени занимает дорога от моего дома до дома знакомого?

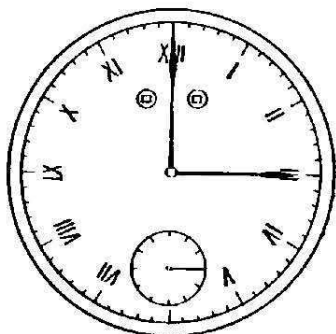


Рис. 1. Время a : завожу часы и выхожу из дому

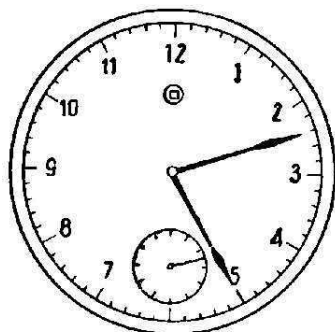


Рис. 2. Время b : я пришел к знакомому

Задача сводится к тому, что необходимо установить точное время, вернувшись домой. Уходя из дому, я пускаю в ход свои часы, ставлю какое-нибудь время; обозначим его буквой a (рис. 1). Придя к знакомому, сразу же записываю время, которое показывают его часы; обозначим это время буквой b (рис. 2).

Поговорив со знакомым, я отправляюсь домой, но перед самым уходом замечаю время на его часах и записываю его; пусть это будет время c (рис. 3). Вернувшись домой, я проверяю, какое время показывают мои часы, поставленные наудачу; обозначим это время через d

(рис. 4). Когда я шел домой, я продумал план действий, поэтому через минуту после моего возвращения стенные

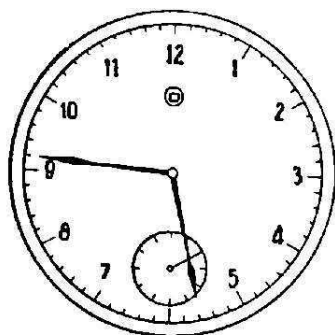


Рис. 3. Время c : через минуту я отправляюсь домой

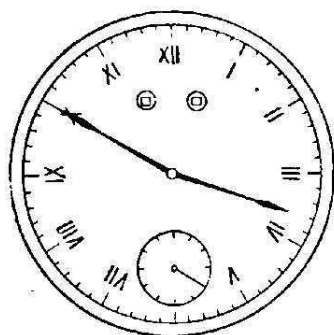


Рис. 4. Время d : момент возвращения домой

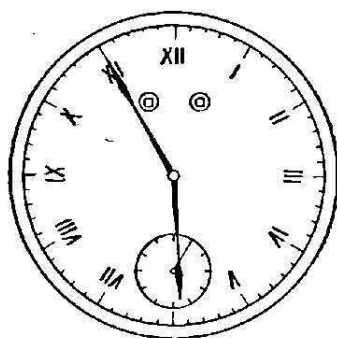


Рис. 5. Время e : через минуту после моего возвращения домой мои часы уже идут точно

часы уже показывали правильное время; это было время e (рис. 5).

А вот вычисления:

Разность $d - a$ показывает, сколько времени я отсутствовал: $d - a = 3 \text{ час. } 50 \text{ мин.} - 3 \text{ час. } 00 \text{ мин.} = 50 \text{ мин.}$

Разность $c - b$ показывает, сколько времени я провел у знакомого: $c - b = 5$ час. 46 мин. — 5 час. 12 мин. = 34 мин.

Разность $(d - a) - (c - b)$ показывает, сколько времени затрачено на дорогу туда и обратно: $(d - a) - (c - b) = 50$ мин. — 34 мин. = 16 мин.

В обе стороны я старался идти равномерным шагом, следовательно, могу предположить, что на обратную дорогу затрачена половина этого времени:

$$\frac{(d - a) - (c - b)}{2} = 8 \text{ мин.}$$

Прибавив это время ко времени c , в сумме я получу правильное время в момент моего возвращения домой:

$$5 \text{ час. 46 мин.} + 8 \text{ мин.} = 5 \text{ час. 54 мин.}$$

Добавляю еще минуту, ушедшую на вычисления, и получаю точное время.

3. Как разделить циферблат часов

А. Разделить циферблат часов прямой линией на две части так, чтобы суммы чисел в обеих частях были одинаковые. Чему будет равна эта сумма?

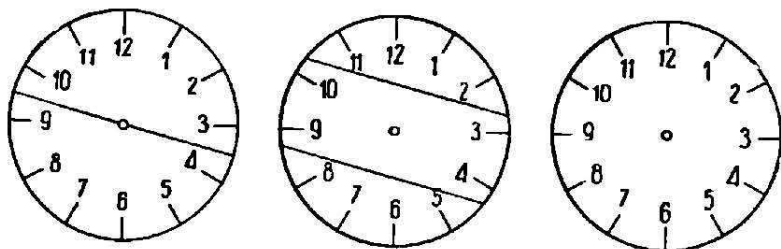


Рис. 6

Б. Разделить циферблат часов на три части двумя прямыми линиями так, чтобы суммы чисел в этих частях были равны между собой.

В. Разделить циферблат часов на шесть таких частей.
 На рисунке 6 приводим решение двух первых задач.
 Третью задачу предлагаем читателю решить самостоятельно.

4. Древний парадокс Зенона в новом виде

Ровно в полночь или в полдень обе стрелки часов стоят под цифрой 12. Часом позже часовая стрелка будет указывать на цифру 1, а минутная — на 12. Когда минутная стрелка дойдет до цифры 1, часовая продвинется вперед на $\frac{5}{12}$ минутного деления; когда же минутная стрелка дойдет до этой точки, где находилась часовая (через $5\frac{5}{12}$ минуты после начала часа), часовая стрелка снова передвинется дальше — и так до бесконечности. Итак, минутная стрелка «в принципе» и «теоретически» не должна не только опережать, но даже догонять часовую стрелку.

Как объяснить этот парадокс?

В этом соревновании стрелок, как и в соревновании Ахиллеса с черепахой, весь секрет заключается в том, что последовательное перемещение минутной стрелки дает бесконечно убывающую геометрическую прогрессию, а именно $5 + 5 \cdot \frac{1}{12} + 5 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{12}\right)^3 + \dots$

Первый член этой прогрессии $a = 5$, частное $q = \frac{1}{12}$. Так как для суммы бесконечно убывающей геометрической прогрессии известна следующая формула: $S = \frac{a}{1-q}$, то $S = \frac{5}{1 - \frac{1}{12}} = \frac{60}{11} = 5\frac{5}{11}$, а следовательно, в 1 час $5\frac{5}{11}$ мин.

стрелки встретятся впервые в этот день, считая от полудня или от полуночи.

А вот еще одно небольшое подтверждение этого рассуждения.