

П.Л. Чебышев

**Об интегрировании помощью
логарифмов**

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
П11

П11 **П.Л. Чебышев**
Об интегрировании помощью логарифмов / П.Л. Чебышев – М.: Книга
по Требованию, 2023. – 65 с.

ISBN 978-5-458-56729-9

ISBN 978-5-458-56729-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

и предполагая всегда функции fx и Fx , Φx и $\Phi_1 x$ простыми между собою, относительно этого уравнения докажем следующие две теоремы, которые будут иметь место, какой бы степени дифференциал

$$\frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

ни был.

Теорема 1. Если в уравнении

$$(1) \quad \int \frac{fx}{Fx \theta x} \sqrt{\theta x} \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}} +$$

$$+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}$$

функция $\Phi_1 x$ делится на $x - a$, то $Fx \theta x$ делится на $(x - a)^2$.

Доказательство. Назовем через m и ω целые числа, означающие сколько производителей равных $x - a$ имеют функции $\Phi_1 x$, θx . В этом предположении, разлагая $\Phi_1 x$ и θx по восходящим степеням $x - a$, мы будем иметь

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi_1 x = \Phi_1(a + x - a) = b(x - a)^m + b_1(x - a)^{m+1} + \dots, \\ \theta x = \theta(a + x - a) = c(x - a)^\omega + c_1(x - a)^{\omega+1} + \dots, \end{cases}$$

где b , c будут конечные величины. Также будем иметь

$$\Phi x = \Phi(a + x - a) = h + h_1(x - a) + \dots,$$

где h всегда будет отлично от 0, ибо в противном случае $x - a$ было бы общим делителем $\Phi_1 x$ и Φx , а это невозможно, потому что функции $\Phi_1 x$ и Φx предполагаются простыми между собою.

Из найденных нами выражений $\Phi_1 x$, Φx , θx мы выводим

$$(3) \quad \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} = \frac{h}{b} \sqrt{c} (x - a)^{-m + \frac{\omega}{2}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{c} [2bch_1 - 2b_1ch + bc_1h]}{2b^2c} (x - a)^{-m + \frac{\omega}{2} + 1} + \dots$$

С другой стороны из свойств логарифмической функции следует, что разложение выражения

$$A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}$$

по восходящим степеням $x - a$ не может быть иначе как

$$G \log (x - a) + G_1 (x - a)^{\alpha_1} + G_2 (x - a)^{\alpha_2} + \dots,$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ суть числа положительные, $G, G_1, G_2, \dots$ количества конечные или 0. Внося отсюда значения

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x},$$

θx и

$$A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}$$

в уравнение (1) и полагая для сокращения

$$\sqrt{c} \frac{2bch_1 - 2b_1 ch + bc_1 h}{2b^2 c} = H$$

находим

$$\begin{aligned} & \int \frac{fx}{Fx \theta x} \sqrt{c(x-a)^{\omega} + c_1(x-a)^{\omega+1} + \dots} dx = \\ &= \frac{h}{b} \sqrt{c} (x-a)^{-m+\frac{\omega}{2}} + H (x-a)^{-m+\frac{\omega}{2}+1} + G \log (x-a) + \\ &+ G_1 (x-a)^{\alpha_1} + G_2 (x-a)^{\alpha_2} + \dots \end{aligned}$$

Но это уравнение, будучи продифференцировано относительно x , дает

$$\begin{aligned} & \frac{fx}{Fx \theta x} \sqrt{c(x-a)^{\omega} + c_1(x-a)^{\omega+1} + \dots} = \\ &= \frac{h \sqrt{c}}{b} \left(-m + \frac{\omega}{2} \right) (x-a)^{-m+\frac{\omega}{2}-1} + \\ &+ H \left(-m + \frac{\omega}{2} + 1 \right) (x-a)^{-m+\frac{\omega}{2}} + \dots + \\ &+ \frac{G}{x-a} + \alpha_1 G_1 (x-a)^{\alpha_1-1} + \alpha_2 G_2 (x-a)^{\alpha_2-1} + \dots, \end{aligned}$$

откуда выходит

$$(4) \quad \frac{Fx \theta x}{(x-a)^2} = \frac{fx \sqrt{c+c_1(x-a)+\dots(x-a)^{n-1}}}{\frac{h\sqrt{c}\left(-m+\frac{\omega}{2}\right)}{b} + N\left(-m+\frac{\omega}{2}+1\right)(x-a)+\dots+G(x-a)^{m-\frac{\omega}{2}}+a_1 G_1(x-a)^{m-\frac{\omega}{2}+a_1}+\dots}$$

Чтобы доказать помощью этого уравнения предложенную нами теорему, мы замечаем во 1), что m равно 1 или более 1; ибо иначе по уравнению (2), в противность положения, $\Phi_1 x$ не делилось бы на $x-a$, во 2), что ω должно быть не > 1 ; ибо в противном случае по (2) θx имела бы производителя кратного, что не должно иметь места по § 1. Но если $m=1$ или > 1 , $\omega \leq 1$, то $m-\frac{\omega}{2} > 0$ или > 0 ,

$$m-\frac{\omega}{2} > 0,$$

а в этом случае уравнение (4), где c, h, b конечные величины, в пределе для $x=a$ дает

$$\lim \left[\frac{Fx \theta x}{(x-a)^2} \right] = 0$$

или величине конечной.

Это же уравнение не может иметь места, если $Fx \theta x$ не делится на $x-a$. Итак $Fx \theta x$ делится на $x-a$, что и следовало доказать.

§ 4. Теорема 2. Если $Fx \theta x$ имеет n производителей равных $x-a$, где $n=2$ или > 2 , то в уравнении

$$\int \frac{fx}{Fx \theta x} \sqrt{\theta x} dx = \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1+q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1-q_1 \sqrt{\theta x}} +$$

$$+ A_2 \log \frac{p_2+q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2-q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r+q_r \sqrt{\theta x}}{p_r-q_r \sqrt{\theta x}}$$

алгебраический член

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

не может обратиться в 0 и знаменатель его должен иметь $n-1$ производителей равных $x-a$.

Доказательство. Если $F\theta x$ имеет n производителей равных $x - a$, а θx имеет ω таких же производителей, то разложение

$$\frac{fx}{F\theta x} \sqrt{\theta x}$$

по восходящим степеням $x - a$, как показали над

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

в § 3, будет такого вида:

$$\frac{fx}{F\theta x} \sqrt{\theta x} = N(x - a)^{-n + \frac{\omega}{2}} + N_1(x - a)^{-n + \frac{\omega}{2} + 1} + \dots, *$$

где N количество конечное, ω целое число, не превосходящее 1. Внося это выражение

$$\frac{fx}{F\theta x} \sqrt{\theta x}$$

и разложение

$$A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}},$$

показанное в § 3, мы из уравнения

$$\begin{aligned} \int \frac{fx}{F\theta x} \sqrt{\theta x} dx &= \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + \\ &+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}} \end{aligned}$$

выводим

$$\begin{aligned} &\int \left(N(x - a)^{-n + \frac{\omega}{2}} + N_1(x - a)^{-n + \frac{\omega}{2} + 1} + \dots \right) dx = \\ &= \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + G \log(x - a) + G_1(x - a)^{\alpha_1} + G_2(x - a)^{\alpha_2} + \dots, \end{aligned}$$

* Это уравнение получается в предположении неделимости fx на $x - a$, что здесь действительно имеет место. В самом деле, если бы fx делилось на $x - a$, то функции fx и $F\theta x$, в противность положения (§ 3), имели бы общего делителя, ибо необходимо $F\theta x$ имеет производителем $x - a$, иначе произведение $F\theta x$ на функцию θx , не имеющую кратных производителей (§ 1), не могло бы иметь $x - a$ кратным множителем, как предполагается в доказываемой теореме.

что, будучи продифференцировано по x , дает

$$\begin{aligned} & N(x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}} + N_1(x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}+1} + \dots = \\ & = \frac{d \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}}{dx} + \frac{G}{x-a} + \alpha_1 G_1(x-a)^{\alpha_1-1} + \alpha_2 G_2(x-a)^{\alpha_2-1} + \dots \end{aligned}$$

Но так как N количество конечное, $n=2$ или >2 , $\omega=1$ или <1 , $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ числа положительные, то это уравнение не может быть тождественным, если мы предположим, что

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

есть 0. Итак алгебраический член в уравнении

$$\begin{aligned} \int \frac{fx}{Fx-\theta x} \sqrt{\theta x} dx &= \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1+q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1-q_1 \sqrt{\theta x}} + \\ &+ A_2 \log \frac{p_2+q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2-q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r+q_r \sqrt{\theta x}}{p_r-q_r \sqrt{\theta x}} \end{aligned}$$

не может быть равен 0, в чем и заключается первая часть предложенной теоремы.

Для доказательства второй части этой теоремы, мы замечаем, что выведенное нами уравнение

$$\begin{aligned} & N(x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}} + N_1(x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}+1} + \dots = \\ & = \frac{d \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}}{dx} + \frac{G}{x-a} + \alpha_1 G_1(x-a)^{\alpha_1-1} + \alpha_2 G_2(x-a)^{\alpha_2-1} + \dots, \end{aligned}$$

по причине $N \neq 0$, $n \geq 2$, $\omega \leq 1$, $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0, \dots$, не может быть тождественно, если в разложении

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

по восходящим степеням $x-a$ первый член не есть

$$\frac{N}{-n+\frac{\omega}{2}+1} (x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}+1}$$

Но по § 3 выражение этого члена есть

$$\frac{h}{b} \sqrt{c} (x-a)^{-m+\frac{\omega}{2}},$$

где m есть число производителей $\Phi_1 x$ равных $x-a$; а это выражение не иначе может быть тождественно с

$$\frac{N}{-n+\frac{\omega}{2}+1} (x-a)^{-n+\frac{\omega}{2}+1},$$

как при равенстве

$$-m+\frac{\omega}{2} = -n+\frac{\omega}{2}+1.$$

Из этого же равенства выходит $m=n-1$, в чем и заключается вторая часть теоремы.

§ 5. Из доказанных нами теорем относительно уравнения

$$\begin{aligned} \int \frac{fx}{Fx \theta x} \sqrt{\theta x} dx &= \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + \\ &+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}, \end{aligned}$$

тождественного уравнению

$$\begin{aligned} \int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} &= \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + \\ &+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}, \end{aligned}$$

обнаруживается, что в состав $\Phi_1 x$ одни кратные производители $Fx \theta x$ и что в $\Phi_1 x$ степени их кратности единицею ниже, чем в $Fx \theta x$. А отсюда следует, что понизив на 1 степени всех различных производителей $Fx \theta x$, получим $\Phi_1 x$. Но в теории равных корней доказано, что таким образом составляется общий наибольший делитель

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}.$$

Следовательно, относительно $\Phi_1 x$ можем сделать такое заключение.

Правило I. *Знаменатель алгебраического члена в выражении интеграла*

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

через функции алгебраическую и логарифмическую есть наибольший общий делитель

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}.$$

§ 6. Теперь приступим к дальнейшему исследованию алгебраического члена в выражении интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}.$$

По сделанному нами предположению (§ 2), функция

$$\frac{fx}{Fx} \frac{1}{\sqrt{\theta x}}$$

степени — 2; а потому разлагая

$$\frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

по нисходящим степеням x и интегрируя каждый член, мы для выражения интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

будем иметь ряд, не содержащий положительных степеней x . Также не включает в себе положительных степеней x ряд, в который разлагается по нисходящим степеням x выражение

$$A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} + A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}.$$

Вследствие же этого равенство

$$\int \frac{fx}{Fx \sqrt{\theta x}} = \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} +$$

$$+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}$$

может иметь место только в том случае, когда степень

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

не превосходит 0. Но степень выражения

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

может не превосходить 0 только в том случае, когда степень $\sqrt{\theta x}$ не превосходит степени $\Phi_1 x$, а $\Phi_1 x$ по правилу I (§ 5) есть общий наибольший делитель

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}.$$

Отсюда следует такое заключение:

Правило II. В выражении через функции алгебраическую и логарифмическую интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx \sqrt{\theta x}},$$

где

$$\frac{fx}{Fx} \frac{1}{\sqrt{\theta x}}$$

степени — 2, алгебраический член может находиться только в том случае, когда степень общего наибольшего делителя

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}$$

не менее степени $\sqrt{\theta x}$.

§ 7. Прежде чем приступим к определению числителя алгебраического члена в выражении интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}},$$

мы покажем теперь один обширный класс интегралов, не приводящихся к функциям алгебраической и логарифмической. Общая форма этих интегралов есть

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}},$$

где

$$\frac{fx}{Fx} \frac{1}{\sqrt{\theta x}}$$

степени — 2, а функции

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}$$

имеют общим наибольшим делителем функцию x , которой степень менее степени $\sqrt{\theta x}$. Из предложенных нами теорем обнаруживается весьма просто невозможность привести эти интегралы к функциям алгебраической и логарифмической. В самом деле, если функции

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx}$$

имеют общим делителем какую-нибудь функцию x , то $Fx \theta x$ имеет кратных производителей, а в этом случае по теореме 2 выражение интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

не возможно без алгебраического члена. Но с другой стороны это выражение не может заключать алгебраического члена по правилу II, ибо степень общего наибольшего делителя

$$Fx \theta x \text{ и } \frac{d Fx \theta x}{dx},$$

по положению, менее степени $\sqrt{\theta x}$. Следовательно выражение интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}$$

в сделанных нами предположениях никоим образом не может быть приведено к функциям алгебраической и логарифмической. К этому классу интегралов принадлежат например интегралы

$$\int \frac{(x-a)(x-b)}{(x-c)^2} \frac{dx}{\sqrt{(x-e)(x-f)(x-g)(x-h)}},$$

$$\int \frac{x-a}{x-c} \frac{dx}{\sqrt{(x-e)(x-f)(x-g)}},$$

когда a и b не равны c, e, f, g, h суть величины все различные между собою.

§ 8. Приступим теперь к определению числителя алгебраического члена в выражении интеграла

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}}.$$

Мы видели (§ 6), что степень

$$\frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x}$$

не должна превосходить 0, а для этого степень Φx не должна быть более степени $\frac{\Phi_1 x}{\sqrt{\theta x}}$. Поэтому, означив через n степень $\frac{\Phi_1 x}{\sqrt{\theta x}}$, мы в n будем иметь высший предел степени Φx и, следовательно, Φx представляется формулою

$$l_n x^n + l_{n-1} x^{n-1} + \dots + l_1 x + l_0,$$

где $l_n, l_{n-1}, \dots, l_1, l_0$ постоянные количества. Значение этих количеств определяется помощью следующей теоремы.

Теорема 3. Если в уравнении

$$\int \frac{fx}{Fx} \frac{dx}{\sqrt{\theta x}} = \frac{\Phi x}{\Phi_1 x} \sqrt{\theta x} + A_1 \log \frac{p_1 + q_1 \sqrt{\theta x}}{p_1 - q_1 \sqrt{\theta x}} +$$

$$+ A_2 \log \frac{p_2 + q_2 \sqrt{\theta x}}{p_2 - q_2 \sqrt{\theta x}} + \dots + A_r \log \frac{p_r + q_r \sqrt{\theta x}}{p_r - q_r \sqrt{\theta x}}$$