

М. Веннинджер

Модели многогранников

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 51
ББК 22.1
М11

М11 **М. Веннинджер**
Модели многогранников / М. Веннинджер – М.: Книга по Требованию, 2024. –
234 с.

ISBN 978-5-518-16197-9

ISBN 978-5-518-16197-9

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2024

© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2024

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первозданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.



Серия Книжный Ренессанс

www.samizday.ru/reprint

От автора

Эта книга знакомит вас с описаниями 75 известных в настоящее время однородных многогранников и большого числа их звездчатых форм. Приведенные в ней краткие математические сведения позволяют четко выявить отношения, в которых находятся между собой различные тела. Но основу книги составляют инструкции, пользуясь которыми вы сможете самостоятельно строить модели многогранников.

В конце книги приводятся ссылки на математическую литературу, относящуюся к рассмотренной теме. Возможно, ранее вас не слишком увлекала геометрия, да и теперь вы не склонны считать этот предмет особо притягательным. Если это так, то вряд ли специальные книги пробудят в вас интерес к геометрии. Читателю же нашей книги вовсе не обязательно знать математическую теорию, которая изучает и классифицирует многогранники. Однако полностью избежать математики, особенно там, где речь идет о терминологии и обозначениях, ему не удастся.

Создавая эту книгу, я стремился дать читателю простые, удобные и не слишком умозрительные указания, достаточные для построения моделей многогранников. Приходится лишь удивляться, сколь поучительно это занятие и как много оно дает. Раз начав, вы и не заметите, как вас затягивает все глубже. Вы почувствуете красоту различных форм, и она будет сродни той красоте, которую находит математик в мире дорогих его сердцу абстракций.

Возможно, число моделей, описанных в предлагаемой вашему вниманию книге, покажется вам чрезмерным, а кое-какие из них — крайне сложными. И тогда вы спросите себя: «А зачем я хочу их построить?» Быть может, ответ на этот вопрос подскажет вам такая притча. Альпиниста как-то спросили: «Почему тебя так тянет Маттерхорн¹?» «Но ведь это гора!» — ответил альпинист.

Возможно, при виде наших моделей кто-нибудь спросит: «Какая от них польза?» На это позволительно ответить так: «А разве все красивое полезно?» Впрочем, нетрудно усмотреть известную пользу, которую приносят модели в качестве декоративных украшений. ими хорошо украсить комнату или праздничный стол. А как красивы блестящие звезды на елке! На страницах этой книги вас ждет изобилие декоративных форм — возможность выбора обеспечена.

Рассматривая многогранные формы, характерные для космических устройств, вы обнаружите приложения, имеющие более серьезное прикладное значение. Наконец, в книге можно найти множество примеров, позволяющих судить о применении многогранников в архитектуре и строительстве, особенно если обратить внимание на конструкции сложных «геодезических» куполов и перекрытий. Впрочем, многие из представленных здесь многогранников ранее никогда не использовались. Видимо, это объясняется тем, что они почти никому не известны.

Все модели, описанные в книге и показанные на фотографиях, мною изготовлены. Быть может, вам интересно знать, как давно я этим занимаюсь? Впервые я обратился к этой теме в 1958 году. На следующий год я уже смастерил первые модели — их вы можете увидеть в первой части книги. Основным источником информации для меня служила книга «Математические развлечения» Кокстера и Болла [15]. В 1959—1961 годах я воспроизвел все модели, описанные

¹ Маттерхорн — одна из самых трудных и опасных для восхождения вершин Альп. —
Здесь и далее примечания редакции.

в книге Канди и Роллетта «Математические модели» [19], после чего взялся за «Пятьдесят пять икосэдров» Кокстера, Дюваля, Флэзера и Петри [17]. При этом мне удалось разработать весьма удобную технологию изготовления моделей. Те из них, что украшают ныне заднюю стену класса, где я преподаю математику, сделаны в 1961—1963 годах. В среднем каждая модель отнимала у меня около восьми часов; еще три-четыре часа я тратил на подготовку исходного материала. По завершении этой работы я обратился к профессору Кокстеру с просьбой прислать мне экземпляр его статьи «Однородные многогранники» [18]. Кокстер был столь любезен, что выслал мне надписанный экземпляр, один из трех еще остававшихся у него. В этой работе содержится детальное изложение математических вопросов теории однородных многогранников; однако, имея целью конструирование моделей, я сосредоточил свое внимание не на теоретической ее части, а на собранных в конце статьи чертежах, изготовленных Дж. Миллером. Мне хотелось понять устройство этих многогранников, а для этого следовало определить, как они выглядят «с лица». Соответствующие чертежи представлены теперь в настоящей книге. Я также изучал приложенные к «Однородным многогранникам» и выполненные М. Лонге-Хиггинс фотографии проволочных моделей. Однако на этих фотографиях показывалось одновременно несколько совмещенных моделей — а это совсем не так удобно для практического использования, как, скажем, включенные в эту книгу фотографии.

Время, которое я затратил на изготовление моделей невыпуклых однородных многогранников, в существенной степени зависело от характера модели. Так, на простейшие из них требовалось не более трех-четырех часов, в среднем же приходилось затрачивать восемь-десять часов, а некоторые сложные модели занимали двадцать-тридцать часов. Две модели отняли у меня свыше сотни часов каждая. Теперь, когда работа завершена, я, пожалуй, соглашусь с тем, что ее объем поразил и меня. Но китайская пословица гласит: «Если ты собираешься пройти тысячу ли, начни с того, что сделай первый шаг». За первым шагом последует другой, и вскоре красота открывшихся взору путника видов заставит его забыть о трудностях пути.

М. Веннинджер

Предисловие

Человек проявляет интерес к многогранникам на протяжении всей своей сознательной деятельности — от двухлетнего ребенка, играющего деревянными кубиками, до зрелого математика, наслаждающегося чтением книги Бранко Грюнбаума «Выпуклые многогранники» [11]. Некоторые из правильных и полуправильных тел встречаются в природе в виде кристаллов, другие — в виде вирусов (которые можно рассмотреть с помощью электронного микроскопа). Пчелы строили шестиугольные соты задолго до появления человека, а в истории цивилизации создание многогранных тел (подобных пирамидам) наряду с другими видами пластических искусств уходит в глубь веков. Пять правильных тел изучали Тезтет, Платон, Евклид, Гипсикл и Папп.

Значительная часть этой книги посвящена *однородным* многогранникам, грани которых — правильные многоугольники — вблизи любой вершины расположены в одном порядке. (Такой многогранник называется *правильным*, если все ограничивающие его многоугольники одинаковы.) Согласно теореме Евклида, применимой ко всем выпуклым многогранным углам, в любом из них сумма плоских углов при вершине меньше 360° . Изготовив самостоятельно несколько моделей, читатель заметит, что разность между 360° и этой суммой для одних тел может оказаться значительной (так, у куба, который имеет 8 многогранных углов, для каждого угла рассматриваемая разность составляет 90°), а для других, у которых многогранных углов больше, разность окажется гораздо меньшей (так, для курносого¹ додекаэдра, имеющего 60 углов, она равна всего 12°). Подобные наблюдения привели Рене Декарта (1596—1650) к открытию и доказательству теоремы, утверждающей, что сумма всех таких разностей (математики называют их *угловыми дефектами*) неизменно равна 720° ².

Приблизительно в это же время Иоганн Кеплер (1571—1630) написал этюд «О снежинке», в котором высказал такое замечание: «Среди правильных тел самое первое, начало и родитель остальных — куб, а его, если позволительно так сказать, супруга — октаэдр, ибо у октаэдра столько углов, сколь у куба граней». Кеплер первым опубликовал полный список тринадцати архимедовых тел и дал им те названия, под которыми они известны поныне. (Труд самого Архимеда утрачен; как полагают, его рукопись погибла во время знаменитого пожара Александрийской библиотеки, столь едко описанного в песне Бернарда Шоу «Цезарь и Клеопатра».) Кеплеру же принадлежит заслуга в постановке проблемы перечисления *изозоноэдров* (выпуклых многогранников, грани которых суть равные ромбы); он также внес первый вклад в ее решение, открыв *ромбододекаэдр* и *триаконтаэдр*. Однако с позиций этой книги, пожалуй, наиболее существенный вклад Кеплера в теорию многогранников заключался в предложении рассматривать *невыпуклые* многогранники со звездчатыми гранями, подобными пентаграмме (см. рис. 21). По всей вероятности, Кеплер не подозревал о существовании более ранней работы Томаса Бредвердайна (1290—1349) (ставшего архиепископом Кентерберийским³ в

¹ В отечественной литературе соответствующие многогранники часто называются «плосконосными», однако нам кажется более правильным переводить английский термин *snub* как «курносый».

² Это наблюдение привело его также к установлению известного соотношения между числами вершин, ребер и граней выпуклого многогранника, сегодня обычно называемого *теоремой Эйлера* (см. стр. 10).

³ Главой англиканской церкви.

последний месяц своей жизни), посвященной звездчатым многоугольникам.

В знаменитом соборе в Солсбери столько интересных реликвий, что лишь немногие посетители бросят взгляд на надгробие Томаса Горджеса, усопшего в 1610 году. А между тем резьба на могильном камне содержит изображения додекаэдра, трех икосаэдров и двух кубооктаэдров. На камне вырезаны скелетные каркасы этих тел в манере, близкой к использованной Леонардо да Винчи при построении моделей однородных многогранников с каркасом из прутьев.

Несколькими милями к юго-западу расположена деревушка Уимборн Сент-Джилс, где в 1627 году был похоронен Энтони Эшли. Его надгробие украшает усеченный икосаэдр, причем изображен не каркас, а сам многогранник, подобный модели 9 этой книги.

Со времен Декарта многие великие математики также уделяли внимание нашей теме. Эйлер открыл и доказал знаменитую формулу

$$B - P + G = 2,$$

связывающую числа вершин, ребер и граней любого выпуклого многогранника¹. Гаусс применил неправильную сферическую пентаграмму (его *pentagramma mirificum*) к объяснению правил Навье из сферической тригонометрии. Коши доказал, что всякий выпуклый многогранник с жесткими гранями, шарнирно соединенными в ребрах, остается тем не менее твердым телом. Гамильтон придумал *икосаэдральную игру*². Фон Штаудт дал новое доказательство формулы Эйлера. Шлефли распространил этот результат на случай *n* измерений. Большое влияние имела книга Клейна «Лекции об икосаэдре»³. Е. С. Федоров продолжил исследование Кеплера по проблеме изосоноэдров, обнаружив весьма необычный, как бы сплюснутый ромбоикосаэдр. И наконец, совсем недавно, в 1960 году, Билински завершил перечисление этих тел открытием еще одного ромбододекаэдра, причем этот последний можно поместить в ящик с измерениями 1, τ и τ^2 (где через τ обозначено число $(\sqrt{5} + 1)/2$, выражающее знаменитую «божественную пропорцию», или «золотое сечение»).

Автор этой книги, заражая своим энтузиазмом читателя, дает ему ясные и четкие указания о том, как изготовить модели различных многогранников. Объяснения проиллюстрированы фотографиями моделей из собрания автора — возможно, наиболее полного в настоящее время. Но фотографии не в состоянии передать всего великолепия самих моделей. Наиболее сложные «курносые» модели не только крайне трудны в изготовлении, но и весьма декоративны. Это ли не превосходный пример родства истины и красоты!

Г. С. М. Кокстер

¹ Эта формула доказывается в большом числе научных и научно-популярных сочинений, среди которых, наряду с учебниками [1] и [2], статей [3], пособиями [4], [8] и монографией [5], уместно упомянуть следующие: Д. Поля, Математическое открытие, М., изд-во «Наука», 1970, гл. 15; И. Лакатос, Доказательства и опровержения, М., изд-во «Наука», 1967.

² См. § 5 гл. II рассчитанной на учащихся средних школ книги О. Оре, Графы и их применение, М., изд-во «Мир», 1965.

³ Klein F., Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, Leipzig, Teubner, 1884; последнее (английское) издание: Klein F., The Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree, N. Y., Dover Publ., 1956. В этой книге Феликс Клейн использует специфические свойства симметрии икосаэдра для доказательства *неразрешимости в радикалах уравнений степени $n \geq 5$* (то есть того, чтобы установить отсутствие общей формулы, выражающей корни уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0$, где $n \geq 5$, через его коэффициенты!). Коротко об этом рассказывается и в книге Клейн Ф., Элементарная математика с точки зрения высшей, т. I, М. — Л., ОНТИ, 1935, стр. 182—237.

ВВЕДЕНИЕ

Однородные многогранники

При первом же знакомстве с этой темой у вас возникает естественный вопрос: что такое многогранник? Вы можете припомнить, что собственно геометрию определяют иногда (не вполне точно) как науку о пространстве и пространственных фигурах — двумерных в планиметрии и трехмерных в стереометрии. Возможно, вам также знакомо понятие множества. Если использовать теоретико-множественный язык, то фигуру на плоскости можно бы было описать как множество отрезков прямых, ограничивающих часть плоскости. Такая плоская фигура называется *многоугольником*. Из этого следует, что *многогранник* можно определить как множество многоугольников, ограничивающих часть трехмерного пространства.

Все термины, которыми мы будем пользоваться в нашей книге, пришли к нам от древних греков. Влияние знаменитого греческого мыслителя Платона сказалося и на «Началах» Евклида. В этой книге, которая на протяжении веков была единственным учебником геометрии, дано описание «идеальных» линий и «идеальных» фигур. Самая идеальная линия — прямая и самый идеальный многоугольник — правильный многоугольник, иными словами, многоугольник, *имеющий равные стороны и равные углы*. Простейшим правильным многоугольником можно считать равносторонний треугольник, поскольку он имеет наименьшее число сторон, которое может ограничивать часть плоскости. Интересно, что «Начала» Евклида открываются описанием построения правильного треугольника и заканчиваются изучением пяти правильных многогранных тел! Каждый из этих пяти многогранников имеет гранями правильные многоугольники одного типа. В наше время они известны под именем пяти *платоновых тел*. *Тетраэдр*, гранями которого являются четыре равносторонних треугольника, можно считать трехмерным аналогом плос-

кого правильного треугольника, поскольку он имеет меньше всего граней, отделяющих часть трехмерного пространства.

Общую картину интересующих нас правильных многоугольников наряду с равносторонним (правильным) треугольником составляют: квадрат (четыре стороны), пентагон (пять сторон), гексагон (шесть сторон), октагон (восемь сторон) и декагон (десять сторон); при этом, разумеется, все стороны и все углы каждого из них должны быть равны между собой. Как только вы приступите к построению моделей, описанных в этой книге, вам не составит особого труда научиться точно вычерчивать эти фигуры; к тому же вы познакомитесь с важнейшими их свойствами. В частности, вам важно будет знать величины внутренних углов многоугольников в градусах. Не все многоугольники вы найдете на гранях правильных тел: этими гранями служат лишь три из них. *Гексаэдр* (шесть граней), обычно называемый *кубом*, имеет квадратные грани; грани *октаэдра* (восемь граней) — равносторонние треугольники; все грани *додекаэдра* (двенадцать граней) — пентагоны; наконец, гранями *икосаэдра* являются двадцать равносторонних треугольников. «Начала» Евклида завершаются доказательством того, что существуют пять и только пять правильных многогранников.

Чтобы прийти к идее этого доказательства, вам стоит немного поэкспериментировать с картонными многоугольниками. Подобно тому как две стороны многоугольника соединяются в вершине, так и любые две грани многогранника соединяются общей стороной (или пересекаются вдоль общей стороны — что то же самое). Эти стороны принято называть *ребрами* многогранника. Каждое ребро является общей стороной двух и только двух многоугольных *граней*. Сами ребра сходятся в точках, именуемых *вершинами* многогранника.

В тетраэдре в каждой вершине сходятся три ребра, иными словами, каждая вершина окружена тремя треугольниками. Если развернуть эти треугольники на плоскость, можно подсчитать, сколько градусов содержит полученный при этом их общий угол. Поскольку внутренний угол равностороннего треугольника равен 60° , три таких угла дадут в сумме $3 \times 60^\circ = 180^\circ$. Если мы приложим к нему еще один равносторонний треугольник, то получим в сумме 240° . Но в таком случае мы придем к развертке вершины октаэдра. Добавление еще одного треугольника дает 300° , и мы получаем развертку вершины икосаэдра. Наконец, добавление шестого треугольника дает полный угол в 360° — и мы сразу убеждаемся, что он не может соответствовать никакой вершине многогранника¹.

Перейдем к квадратам. Естественно, что наименьшее их число равно трем. Три раза по 90° дают 270° ; так получается вершина куба. Добавляя еще один квадрат, мы снова приходим к полному углу в 360° — и останавливаемся. Для пятиугольников минимальное число граней — три — дает нам вершину додекаэдра; если же мы возьмем более трех пентаграмм, то суммарный угол даже превзойдет 360° . Для шестиугольников (гексагонов) уже и минимальное их число — три — слишком велико: три раза по 120° сразу дают 360° . Поэтому правильного многогранника с гексагональными гранями не существует. Тем более не подходят правильные многоугольники с числом сторон, большим шести. Таким образом, мы убеждаемся, что может существовать лишь пять правильных многогранников.

Известно еще множество тел, получивших название *архимедовых*, или *полуправильных* многогранников. У них также все многогранные углы равны и все грани — правильные многоугольники, но нескольких разных типов. Существует 13 полуправильных многогранников², открытие которых приписывается Архимеду, впервые перечислившему их в не дошедшей до нас рукописи. Ссылки на эту работу имеются в рукописях математика Паппа,

который жил в III в. н. э. Кеплер первым из современных математиков разработал полную теорию этих тел.

Множество архимедовых тел можно разбить на несколько групп. Первую из них составят пять многогранников, которые получаются из платоновых тел в результате их *усечения*. Усеченное тело есть не что иное, как тело с отрезанной верхушкой. *Усечением* называется удаление некоторых частей тел, а в нашем случае — удаление всех частей, расположенных около вершин, вместе с самими вершинами. Для платоновых тел это можно сделать таким образом, что и получающиеся новые грани, и остающиеся части старых будут правильными многоугольниками. К примеру, тетраэдр можно усечь так, что его четыре треугольные грани превратятся в четыре гексагональные, а к ним добавятся четыре правильные треугольные грани. Так могут быть получены пять архимедовых тел: *усеченный тетраэдр*, *усеченный гексаэдр* (куб), *усеченный октаэдр*, *усеченный додекаэдр* и *усеченный икосаэдр*.

Другую группу составляют всего два тела, именуемых также *квазиправильными* многогранниками. Частица «квази» подчеркивает, что грани этих многогранников представляют собой правильные многоугольники всего двух типов, причем каждая грань одного типа окружена многоугольниками другого типа. Эти два тела носят названия *кубооктаэдр* и *икосододекаэдр*. Подробнее на них мы остановимся на стр. 35 и 36.

Два последующих многогранника называются *ромбокубооктаэдром* и *ромбоикосододекаэдром*. Иногда их называют также «малым ромбокубооктаэдром» и «малым ромбоикосододекаэдром» в отличие от *большого ромбокубооктаэдра* и *большого ромбоикосододекаэдра*. Если процесс усечения применить к двум квазиправильным телам — кубооктаэдру и икосододекаэдру, то новые полученные грани будут в лучшем случае прямоугольниками, но не квадратами. Однако дальнейшие модификации могут превратить эти прямоугольники в квадраты. Вот почему некоторые авторы называют большой ромбокубооктаэдр и большой ромбоикосододекаэдр «усеченным кубооктаэдром» и «усеченным икосододекаэдром» соответственно. В на-

¹ Сумма плоских углов любого выпуклого многогранного угла всегда меньше 360° .

² Или 14 (см. стр. 37).

шей книге мы предпочитаем называть их *ромбоусеченным кубооктаэдром* и *ромбоусеченным икосододекаэдром*. Приставка «ромбо» указывает на особый способ получения квадратных граней, который был применен для построения этих двух тел из двух квазиправильных многогранников. Это дает нам право опустить определение «малые» перед названиями двух ранее введенных тел.

Наконец существуют две так называемые «курносые» модификации — одна для куба, другая — для додекаэдра. Для каждой из них характерно несколько повернутое положение граней, что дает возможность построить два различных варианта одного и того же «курносого» многогранника (каждый из них представляет собой как бы зеркальное отражение другого). Такие варианты, отличающиеся друг от друга, как правая рука отличается от левой, называются *энантиоморфными*.

Если вы достаточно упрямы и склонны к систематическим занятиям, то ради собственного удовольствия, прибегая к тем же рассуждениям, которые мы применяли для платоновых тел, можете доказать, что число архимедовых тел равно 13¹. При этом следует исходить из теоремы стереометрии, утверждающей, что сумма плоских углов выпуклого многогранного угла меньше 360°. Испробовав все возможные комбинации правильных многоугольников, удовлетворяющие этой теореме, вы придете к разверткам вершин в точности тринадцати архимедовых тел и двух бесконечных семейств — семейства *призм* (с квадратными боковыми гранями) и семейства *скошенных призм*² (с боковыми гранями в виде правильных треугольников)³.

Объединение описанных выше множеств платоновых и архимедовых тел

вкупе с бесконечными семействами призм и скошенных призм образует множество тел, называемых *выпуклыми однородными многогранниками*. *Выпуклость* многоугольника означает, что ни один его внутренний угол не превосходит 180°. Аналогично *выпуклость* многогранника сводится к тому, что ни один из его внутренних двугранных углов (образованных соседними гранями) не превосходит 180°. Свойство, по-смыслу противоположное выпуклости, иногда называют *вогнутостью*. Многогранники с полостями, впадинами или выступающими пиками будут невыпуклыми, то есть вогнутыми. Слово *однородные* в применении к рассмотренным выше многогранникам означает, что все их грани суть правильные многоугольники и все многогранные углы равны. В однородных многогранниках каждую вершину окружают многоугольники в одном и том же порядке. Так, например, для ромбоикосододекаэдра порядок следования граней вокруг вершин таков: треугольник, квадрат, пятиугольник и другой квадрат. Этот порядок сохраняется для любой вершины.

В дальнейшем вам довольно часто будет попадаться термин *энантиоморфный*. Он всего-навсего выражает свойство быть «правым» или «левым» экземпляром, подобно двум перчаткам одной пары или предмету и его отражению в зеркале. Если выбрать какой-либо порядок цветов и раскрасить грани, примыкающие к некоторой вершине в этом порядке по часовой стрелке, то энантиоморфной раскраской будет обратная — в том же порядке против часовой стрелки.

Для обозначения цветов мы воспользуемся следующими сокращениями: Ж — желтый, С — синий, О — оранжевый, К — красный, З — зеленый, Б — белый, Ч — черный.

Несомненно, все новые термины, равно как и классификация многогранников, станут для вас понятнее и осмысленнее после того, как вы самостоятельно изготовите модели выпуклых однородных многогранников, собранные в первой части книги.

¹ Точнее, 13 равно числу типов вершин таких многогранников. Ср. со сказанным на стр. 37

² Иногда их называют *антипризмами*.

³ Желających подробнее ознакомиться с этим вопросом можно отослать к книге [2] и статье [3]; см. также названную на стр. 18 книгу L i n e s L., Solid Geometry.

Математическая классификация

(при первом чтении этот раздел можно опустить)

Любой однородный многогранник можно поместить внутри сферы таким образом, что его оси симметрии пройдут через центр сферы. Спроектировав затем из центра на поверхность сферы ребра многогранника, мы получим сеть, состоящую из дуг больших окружностей сферы. Эта сеть разбивает сферу на сферические многоугольники, каждый из которых соответствует одной грани многогранника. Плоскости симметрии многогранника добавят к разбиению новые дуги, так что если исходный многогранник, к примеру, был платоновым телом, то с учетом новых дуг поверхность сферы будет разделена на сферические треугольники — по четыре для каждого ребра.

Эти сферические треугольники получили название *треугольников Мёбиуса*, по имени впервые рассмотревшего их математика (1849). Мёбиус же первым применил идею этих треугольников к устройству многогранного калейдоскопа, который составлен из трех зеркал, образующих трехгранный угол. Внося в такой калейдоскоп какое-либо тело, изображающее материальную точку, мы, глядя на нее и ее отражения в двух зеркалах, увидим вершины соответствующего многогранника. Другой, возможно, более простой иллюстрацией треугольников Мёбиуса является соответствующая сеть линий, нанесенных мелом на черном глобусе, на котором хорошо видны проведенные линии¹. При этом определенные точки пересечения больших кругов сферы будут соответствовать вершинам многогранника. Полученная решетчатая сеть сферических треугольников покрывает глобус однократно. Все треугольники сети *конгруэнтны*, то есть равны между собой.

Каждый из этих треугольников можно обозначить символом (pqr) , где p , q и r — натуральные числа, соответственно равные знаменателям дробей π/p , π/q и π/r , выражающих радианные меры углов треугольника.

¹ Такие глобусы выпускаются в Англии как учебные пособия для классов занятий географией и астрономией.

В нашем случае p , q и r могут принимать лишь целые значения 2, 3, 4 или 5. Если позволить p , q и r принимать дробные значения, то для определенных наборов дробей мы снова получим сеть треугольников с соответствующими углами. Эти треугольники носят имя Г. А. Шварца, который первым указал все возможные здесь случаи (1873). Было показано, что множество *треугольников Шварца* также покрывает глобус, но не однократно, а некоторое конечное число раз, так что оно в определенном смысле эквивалентно множеству треугольников Мёбиуса. Поэтому треугольники Шварца можно классифицировать как тетраэдральные, октаэдральные или икосаэдральные в зависимости от того, с какими треугольниками Мёбиуса они соотносятся (см. [15, 16, 18]).

Эти идеи можно сделать наглядными, используя подходящие модели. Прежде всего вы можете изготовить многогранный калейдоскоп из трех зеркал, вырезанных в форме кругового сектора. Радиус секторов следует взять довольно большим — порядка 30 см или больше; центральные углы секторов должны содержать:

для тетраэдрального калейдоскопа
54°44', 54°44', 70°32';
для октаэдрального калейдоскопа
35°16', 45°, 54°44';
для икосаэдрального калейдоскопа
20°54', 31°43', 37°23'.

Хотя такие калейдоскопы достаточно трудны в изготовлении, игра с ними доставляет истинное удовольствие.

Столь же (а быть может, и в большей мере) поучительно изготовить модели этих сферических треугольников из плотной бумаги или картона. Присоединяя один к другому требуемое число таких треугольников, вы получите модель сферы в виде множества пересекающихся ее больших кругов. Можно, конечно, раскрасить большие круги по-разному, но это слишком усложнит работу.

Проще всего начать с тетраэдрального треугольника. Заготовка для вы-

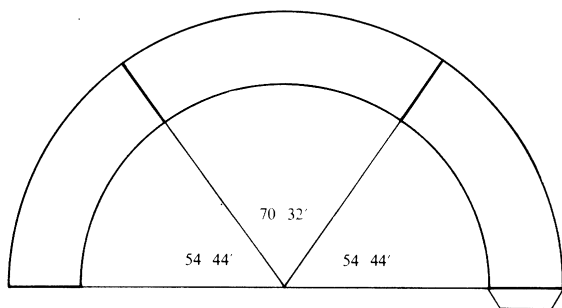


Рис. 1.

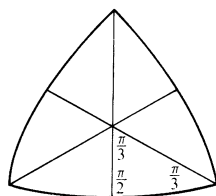


Рис. 2.

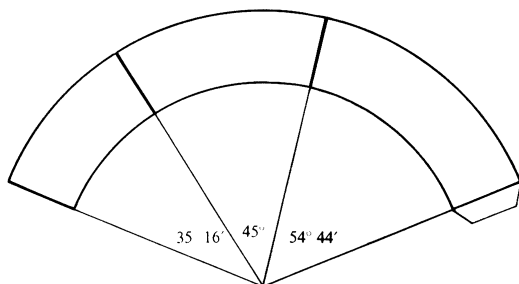


Рис. 3.

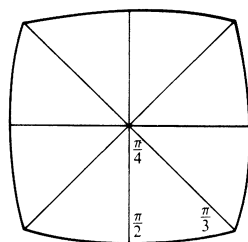


Рис. 4.

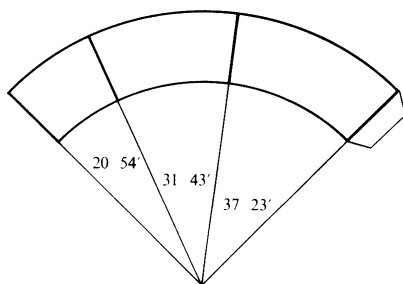


Рис. 5.

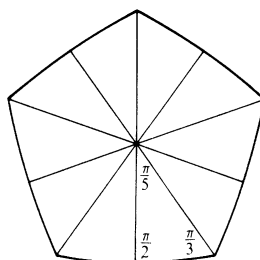


Рис. 6.

резания показана на рис. 1. Перегните заготовку по радиальным линиям и придайте ей форму сферического треугольника. Модель скрепляется клеем всего в одном месте при помощи наклейки, видной на рисунке. Надо сделать 24 одинаковые модели и склеить их плоскими частями таким образом, чтобы наклейки были не видны. Эту работу можно выполнять по частям. Одну такую часть составляют шесть сферических треугольников, склеенных между собой так, как показано на рис. 2. Их углы равны $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/3$. Четыре части образуют модель сферы.

Для октаэдральных треугольников последовательность действий аналогична; исходная заготовка показана на рис. 3. Вам потребуется 48 октаэдральных треугольников, образующих два энантиоморфных множества по 24 в каждом. Можно взять заготовки любого подходящего для вас размера. Можно также по желанию делать кольцо шире или уже. Можно даже оставить всю внутренность секторов, ничего не вырезая, и тогда на модели сферы будет точно указан ее центр. При склеивании частей модели начинает обнаруживаться феномен двойственности октаэдра и куба, поскольку каждая из этих частей может быть составлена из восьми сферических треугольников, расположенных в порядке, показанном на рис. 4. Их углы равны $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/4$. Шесть таких частей образуют модель сферы.

Икосаэдральные треугольники более трудоемки в изготовлении из-за большого числа заготовок, но последовательность действий остается той же. Как нам кажется, целесообразно приложить усилия, ибо результат весьма поучителен: на этой модели по сравнению с предыдущими очень явно прослеживается ее внутреннее строение. Вам потребуется 120 заготовок (рис. 5),

образующих два энантиоморфных множества по 60 заготовок в каждом. На сей раз части будут пятиугольными, содержащими по десять сферических треугольников (рис. 6). Их углы будут равны $\pi/2$, $\pi/3$ и $\pi/5$. Двенадцать таких частей образуют модель сферы.

Существует еще один способ изготовления моделей, иллюстрирующих треугольники Мёбиуса. Он сводится к построению модели такого многогранника с плоскими треугольными гранями, вершины которого совпадали бы с вершинами сферических треугольников. Если стороны сферического треугольника равны p , q и r (точнее, p , q и r суть центральные углы сферы, опирающиеся на эти дуги), то соответствующие стороны плоского треугольника должны находиться в отношении, равном

$$\sin \frac{p}{2} : \sin \frac{q}{2} : \sin \frac{r}{2}.$$

Соответствующие треугольники для трех разобранных выше случаев показаны на рис. 7—9. Разумеется, в каждом таком случае нужное число плоских треугольников равно числу сферических треугольников. Эти модели можно клеить, придерживаясь той же схемы разбиения на части, что и разобранные выше. Числа, проставленные на рисунках, дают приближенные значения линейных размеров соответствующих плоских треугольников. В качестве линейного масштаба можно взять 1 см; в этом случае вы придете к вполне удовлетворительным результатам.

Сделав некоторые треугольники белыми, а остальные раскрасив в другие цвета, вы добьетесь красивого цветового эффекта. На рис. 10—12 показаны нужные части; внизу приведены таблицы их раскраски.

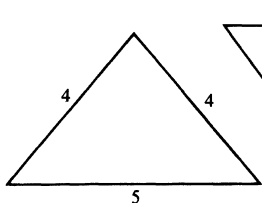


Рис. 7.

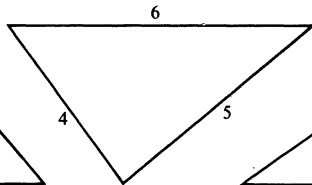


Рис. 8.

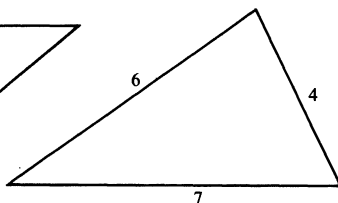


Рис. 9.