

Р. Беллман

Динамическое программирование

**Москва
«Книга по Требованию»**

УДК 004
ББК 32.81
Р11

Р11 **Р. Беллман**
Динамическое программирование / Р. Беллман – М.: Книга по Требованию, 2023. – 400 с.

ISBN 978-5-458-29091-3

Теория динамического программирования родилась из ряда технико-экономических задач, таких, как задача о наиболее эффективном использовании оборудования или задача о наиболее выгодной политике закупок.

ISBN 978-5-458-29091-3

© Издание на русском языке, оформление
«YOYO Media», 2023
© Издание на русском языке, оцифровка,
«Книга по Требованию», 2023

Эта книга является репринтом оригинала, который мы создали специально для Вас, используя запатентованные технологии производства репринтных книг и печати по требованию.

Сначала мы отсканировали каждую страницу оригинала этой редкой книги на профессиональном оборудовании. Затем с помощью специально разработанных программ мы произвели очистку изображения от пятен, клякс, перегибов и попытались отбелить и выровнять каждую страницу книги. К сожалению, некоторые страницы нельзя вернуть в изначальное состояние, и если их было трудно читать в оригинале, то даже при цифровой реставрации их невозможно улучшить.

Разумеется, автоматизированная программная обработка репринтных книг – не самое лучшее решение для восстановления текста в его первоизданном виде, однако, наша цель – вернуть читателю точную копию книги, которой может быть несколько веков.

Поэтому мы предупреждаем о возможных погрешностях восстановленного репринтного издания. В издании могут отсутствовать одна или несколько страниц текста, могут встретиться невыводимые пятна и кляксы, надписи на полях или подчеркивания в тексте, нечитаемые фрагменты текста или загибы страниц. Покупать или не покупать подобные издания – решать Вам, мы же делаем все возможное, чтобы редкие и ценные книги, еще недавно утраченные и несправедливо забытые, вновь стали доступными для всех читателей.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

В самых разнообразных областях теоретической и практической деятельности часто оказывается целесообразным принимать решения не сразу, а постепенно, шаг за шагом. Принятие решения, таким образом, рассматривается не как единичный акт, а как процесс, состоящий из нескольких этапов.

Такой подход использовался уже довольно давно при исследовании некоторых частных вопросов. Наиболее полно эта идея была воплощена А. Вальдом в его теории секвенциального статистического анализа. Систематизация примеров подобного рода исследований показывает, что многие из них с успехом могут быть обслужены некоторым единообразным математическим аппаратом. Таким аппаратом оказывается созданная в значительной мере трудами Р. Беллмана и его учеников теория динамического программирования.

Предметом динамического программирования является изучение многошаговых решений, в том или ином смысле оптимальных. Классические методы нахождения экстремумов функций многих переменных здесь часто оказываются неприменимыми ввиду большого числа параметров, от которых зависит решение. Лежащий же в основе динамического программирования принцип оптимальности часто может быть реализован в виде такого функционального уравнения, решение которого более доступно методам современной математики (в том числе вычислительной математики), чем решение соответствующих уравнений в условиях классической постановки задачи. На таком пути обнаруживается и новый подход к решению обычных задач вариационного исчисления.

Оптимизационные задачи встречаются почти во всех отраслях науки, техники и хозяйства. С ними приходится иметь дело в промышленной технологии, в организации производства, в экономическом планировании, в различных вопросах физики, биологии и военного дела. Поэтому круг приложений динамического программирования исключительно широк.

Возможности применения методов динамического программирования для решения задач, возникающих в физике, экономике, биологии и т. д., отнюдь не означают, что динамическое программирование является частью одной из этих дисциплин. Теория динамического программирования, подобно, например, математической физике, есть часть математики, и в этом отношении она принципиально не отличается от других математических теорий. При этом, разумеется, не следует

забывать, что вопрос о правомерности использования идей и аппарата динамического программирования при решении той или иной конкретной прикладной задачи должен каждый раз решаться с учетом специфики соответствующей науки.

Предлагаемая вниманию советского читателя монография представляет собой первый том задуманного автором труда и содержит изложение основных вопросов динамического программирования. В этой книге автор сознательно ограничивается сравнительно элементарными задачами, предполагая затронуть более глубокие проблемы во втором томе. С методической точки зрения такое разделение вполне оправдано, так как большое количество новых идей и понятий, осложненное рассмотрением математических тонкостей, нанесло бы большой ущерб доступности книги и сузило бы круг ее возможных читателей. Заметим тут же, что в разных главах книги преследуются различные цели. Так, если главы III и IV (наиболее интересная для математика часть книги) посвящены весьма общим вопросам, то глава VII — это подробный анализ решения некоторой конкретной задачи. Остальные главы занимают промежуточное положение.

Почти к каждой главе прилагается большое число упражнений и проблемных задач различного интереса и различной трудности (всего книга содержит 370 задач). Формулировка некоторых из них (например, задачи 29 гл. I) в нарочито легкомысленном виде лишний раз подчеркивает разнообразие приложений динамического программирования.

Перевод книги выполнили: И. М. Андреева (главы I и II), А. А. Корбут (Введение, главы IV, V и §§ 13—25 главы IX), И. В. Романовский (главы VIII, X, XI) и И. Н. Соколова (главы III, VI, VII и §§ 1—12 главы IX). В отношении экономической терминологии текст просмотрел В. А. Маш.

Н. Н. Воробьев

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

Цель настоящей книги состоит в том, чтобы дать введение в математическую теорию многошаговых процессов решения. Так как с этими процессами связан довольно громоздкий набор понятий, то для наименования нашего предмета мы ввели специальный термин „динамическое программирование“. В действительности, как мы увидим далее, специфика этих процессов заключается не только в особой терминологии. Скорее, она заключается в определенной идейной общности, которая дает гибкий и современный математический аппарат для рассмотрения многих новых и интересных задач как внутри самой этой молодой дисциплины, так и в различных разделах классического анализа. Прежде чем углубиться в эту тему, опишем вкратце, что понимается под многошаговым процессом решения.

Рассмотрим некоторую физическую систему S , состояние которой в любой момент времени t описывается вектором p . Если мы настроены оптимистически, то мы можем представлять себе, что компоненты этого вектора — вполне определенные величины, такие, как декартовы координаты, или координаты вместе с проекциями моментов, или, скажем, объем и температура, или, наконец, применительно к экономической системе, предложение и спрос, либо запасы и производственные мощности. Находясь же в пессимистическом расположении духа, мы можем предполагать, что компоненты вектора p являются распределениями вероятностей для таких величин, как координаты и моменты или, быть может, моментами распределения.

С течением времени эта система подвергается изменениям либо детерминированного, либо стохастического характера. Математически это означает, что описывающие систему переменные подвергаются некоторым преобразованиям. Пусть теперь, в отличие от сказанного выше, мы имеем процесс, в котором в каждый момент времени мы должны выбирать преобразования, которым можно подвергнуть систему. Процесс такого типа мы называем *процессом решения*, причем в этой терминологии понятия решения и преобразования считаются эквивалентными. Если нам нужно принять одно решение, то мы называем процесс одношаговым; если следует принять некоторую последовательность решений, то мы пользуемся термином *многошаговый процесс решения*.

Это различие, разумеется, не является вполне четким. Так, выбор точки в трехмерном пространстве можно рассматривать либо как одношаговый процесс, в котором мы выбираем тройку (x, y, z) , либо же как многошаговый процесс, где последовательно выбирается сначала x , затем y и наконец z .

Имеется целый ряд многошаговых процессов, которые нам хорошо знакомы. Пожалуй, наиболее известными являются процессы, встречающиеся в карточных играх, например, система торгов в договорном бридже или система „повышение против повышения“ в покере с его тонкими оттенками блефа¹⁾. В более серьезных вопросах мы постоянно сталкиваемся с многошаговыми процессами решения в нашей экономической жизни в связи с программами капиталовложений и политикой страхования. Другими примерами, взятыми из области науки, могут служить управляемые процессы и планирование экспериментов.

Мы хотим подчеркнуть то обстоятельство, что в современной жизни — в экономических, промышленных, научных и даже политических ее областях — мы со всех сторон окружены многошаговыми процессами решения. Некоторые из них мы изучаем, основываясь на нашем опыте, некоторые пытаемся решить „на пальцах“; некоторые же процессы настолько сложны, что нам остается лишь попытаться угадать решение и смиренно уповать на удачу.

К огорчению экономистов, промышленников и инженеров, за последние годы в экономике, промышленности и технике возникли столь обширные по своей значимости и объему задачи, что их уже нельзя решать изолированно, как в прежние спокойные времена. Громадное расширение круга задач было достигнуто лишь в результате крайней систематизации усилий.

Несмотря на то, что эти задачи возникают в самых разнообразных областях, они обладают одной общей чертой — все они исключительно трудны. Возникают ли они при изучении оптимального управления запасами или при анализе балансов затрат и выпуска целого комплекса взаимозависимых отраслей, в составлении графика обслуживания пациентов в медицинской клинике или при обслуживании самолетов на аэродроме, при изучении задач организации тыла или задач о капиталовложениях, в управлении сервомеханизмами или в последовательном (секвенциальном) статистическом анализе — всюду они обладают определенными общими неприятными чертами, выводящими нас за рамки стандартных математических теорий.

Следовательно, для того чтобы принять вызов со стороны этих новых задач, необходимо создать новые методы, а для математика ничто не может быть более привлекательным. Для этой породы

¹⁾ Читатель, незнакомый с этими играми, может представить себе, например, систему торгов в преферансе или карточную игру „веришь — не веришь“. — *Прим. перев.*

людей вообще характерно, что ее представители никогда не бывают так счастливы, как при встрече с задачами, которые не могут быть решены — по крайней мере немедленно. Давно минули те дни, когда иные всерьез беспокоились, не иссякнет ли родник математической изобретательности, и тем не менее, испытываешь великое наслаждение, когда перед тобой внезапно открываются обширные непокорные джунгли трудных и важных задач, подобных тем, которые возникают в теории многошаговых процессов решения.

Бегло очертив этот круг вопросов, посмотрим, каким компасом мы будем пользоваться, прокладывая путь в эту новую область. Традиционный подход можно назвать «методом перечисления». Каждое решение можно мыслить себе как выбор определенного числа переменных, определяющих преобразование, которое следует применить; каждая последовательность таких выборов, или, как мы будем говорить, *поведение*, представляет собой выбор большего числа переменных. Беря огулом все эти варианты выбора, мы «сводим» нашу задачу к классической задаче определения максимума некоторой заданной функции. Эта функция, возникающая в ходе измерения некоторого количественного свойства системы, и является основой для вычисления поведений.

В этот момент математик очень легко может потерять интерес к задаче и предоставить остальное вычислительной машине. Максимизация достаточно хорошо ведущей себя функции представляется сравнительно простой задачей: стоит только взять частные производные и решить получающуюся систему уравнений для максимизирующей точки.

Однако здесь приходится считаться с некоторыми осложняющими дело обстоятельствами. Прежде всего, эффективное аналитическое решение систем, состоящих из большого числа даже простых уравнений (например, линейных уравнений), является весьма нелегким делом. Омрачая наши перспективы еще более, напомним, что численное решение даже таких систем обычно наталкивается на целый ряд трудностей — как технических, так и принципиальных. Следовательно, когда число переменных велико, определение этого максимума отнюдь не является шаблонным.

Все это дает нам право говорить о «проклятии многомерности». И хотя это проклятие много лет тяготело над головами физиков и астрономов, все же не следует терять надежду на получение вопреки ему важных результатов.

К сожалению, указанная трудность далеко не единственна. Другая характерная черта этих задач, как мы увидим на последующих страницах, заключается в том, что классический анализ не всегда достаточен для наших целей вследствие того упрямого факта, что весьма часто решение является граничной точкой области изменения переменных. Это обстоятельство отражает тот факт, что многие процессы решения включают определенные характеристики типа «все

или ничего". Тогда очень часто мы приходим к определению максимума функции посредством комбинирования аналитических методов и методов „поиска и охоты“.

Каковы бы ни были трудности, возникающие в условиях детерминированного варианта (выше мы молчаливо предполагали, что имеем дело именно с ним), эти трудности умножаются в стохастическом варианте, когда исход решения (т.е. преобразования) является случайной величиной. Здесь любые поисковые или перечислительные методы неизбежно обречены на неудачу ввиду чудовищного увеличения числа комбинаций случаев с ростом числа самих случаев.

Предположим, однако, что мы благополучно обошли все эти трудности и достигли некоей вычислительной нирваны. Но математик при этом еще не имеет права снимать с себя ответственность, ибо *нельзя считать, что наша задача решена в математическом смысле, пока не выяснена структура оптимального поведения.*

Довольно интересно, что это понятие математического решения совпадает с обычным понятием решения в физическом, экономическом или техническом смысле. Для внесения полной ясности в этот пункт — а он чрезвычайно важен, поскольку по многим причинам это *raison d'être*¹⁾ математической физики, математической экономики и многих аналогичных областей, расположенных на стыке двух наук, — сделаем краткий экскурс в философию математических моделей.

Цель ученого состоит в познании явлений окружающего мира, которые он наблюдает. Для того чтобы доказать, что он действительно познает эти явления, он должен уметь предсказывать их ход, а для этого, в свою очередь, требуются количественные измерения. Качественное предсказание, например, предсказание наступления затмения, землетрясения или экономической депрессии где-то в недалеком будущем не столь удовлетворительно, как аналогичное предсказание, связанное с датой и временем, и возможно поддержанное предложением пари²⁾.

Чтобы делать удовлетворительные количественные предсказания, необходимо иметь аппарат для получения числа, а это в свою очередь требует наличия математической модели. Представляется разумным предположить, что чем точнее эта математическая модель отражает реальный мир, тем точнее оказывается предсказание.

Однако здесь имеется оборотная сторона медали. Действительный мир чрезвычайно сложен, и поистине, чем больше его изучаешь, тем больше преисполняешься удивлением по поводу того, что при объяснении происходящих сложных явлений в основном приходится иметь дело с „оценками порядка величины“, и гораздо реже — с со-

¹⁾ Разумное основание, смысл (фр.). — *Прим. перев.*

²⁾ При заключении пари о наступлении некоторого события соотношение ставок является количественной оценкой уверенности в правильности прогноза об этом событии. — *Прим. ред.*

вершенно незыблемыми „законами природы“. Если мы попытаемся включить в нашу математическую модель слишком много черт действительности, то мы захлебнемся в сложных уравнениях, содержащих неизвестные параметры и неизвестные функции. Определение этих функций приведет к еще более сложным уравнениям с еще большим числом неизвестных параметров и функций и т. д. Вот уж поистине сказка про белого бычка. Если, наоборот, оробев от столь мрачных перспектив, мы построим слишком упрощенную модель, то мы вскоре обнаружим, что она не предсказывает дальнейший ход явлений настолько, чтобы удовлетворить нашим требованиям.

Следовательно, Ученый, подобно Паломнику, должен идти прямой и узкой тропой между Западнями Переупрощения и Болотом Переусложнения¹⁾.

Отдавая себе отчет в том, что никакая математическая модель не может дать исчерпывающего описания действительности, мы должны в наших попытках познания реального мира примириться с необходимостью использования последовательности моделей все большей и большей сложности. Если в решениях некоторой последовательности моделей наблюдается известное сходство их строения, то мы можем считать, что в нашем распоряжении имеется некоторое приближение к тому, что обычно называют „законом природы“.

Следовательно, с телеологической²⁾ точки зрения конкретное численное решение любой конкретной системы уравнений имеет гораздо меньшую важность, чем понимание природы этого решения, иначе говоря, влияния физических свойств системы на вид решения.

Посмотрим теперь, каким образом эта идея приводит нас к новой трактовке процессов решения, а также ряда других процессов анализа, которые обычно не рассматриваются как процессы решения. В традиционной трактовке мы рассматриваем весь многошаговый процесс решения — ценой громадного увеличения размерности задачи — по существу как некоторый единый шаг. Так, если мы имеем N -шаговый процесс, в котором на каждом шаге следует принять M решений, то классический подход имеет дело с MN -мерным одношаговым процессом. Основной вопрос, стоящий перед нами, заключается в следующем: как избежать этого нарастания размерности, которое подавляет исследование и сильно препятствует вычислениям?

¹⁾ Пародия на символические высказывания в романе „Странствования паломника“ английского писателя XVII века Дж. Беньяна. — *Прим. ред.*

²⁾ Телеология — идеалистическое учение, согласно которому всякое развитие является реализацией некоторой заранее predetermined цели. Направленная против причинного объяснения мира, телеология является попыткой перенесения закономерностей, присущих лишь некоторым формам деятельности человека, на весь реальный мир.

Тем не менее замечание автора справедливо и не нуждается для своего обоснования в привлечении каких бы то ни было идеалистических теорий (в том числе и „телеологической точки зрения“). — *Прим. перев.*

Для ответа на этот вопрос обратимся к высказанному ранее положению о том, что существенна именно *структура* поведения. Каков точный смысл этого утверждения? Оно означает, что мы желаем знать характеристики системы, определяющие решения, которые надлежит принимать на каждом конкретном шаге процесса. Иначе говоря, вместо определения оптимальной последовательности решений в условиях некоторого *фиксированного* состояния системы мы желаем определить оптимальные решения, которые следует принимать в каждом состоянии системы. Только в этом случае мы можем считать, что действительно понимаем внутреннюю структуру решения.

Математическое преимущество такой постановки вопроса заключается, во-первых, в том, что она уменьшает размерность процесса до присущего ему уровня, именно, до размерности решения, с которым мы сталкиваемся на любом конкретном шаге. Это делает задачу более легко поддающейся аналитической обработке и значительно упрощает ее в вычислительном отношении. Во-вторых, как мы увидим, принимаемый подход приводит нас к некоторому типу приближения, именно, к „приближению в пространстве поведений“, обладающему одним существенным математическим свойством — монотонности сходимости, — и хорошо приспособленному к приложениям. Принципиальное преимущество рассуждений в терминах поведений также весьма велико. Этот подход дает нам возможность ставить и рассматривать такие задачи, которые не поддаются плодотворному изучению любыми другими методами. Если бы мы должны были высказать предположение о том, какое направление исследований сулит наибольшие успехи теории многомерных процессов в будущем, мы без колебаний избрали бы указанное направление.

Темой настоящей книги являются приложения этого понятия решения к целому ряду процессов разных типов, которые мы будем обсуждать ниже.

Название книги принято на основании следующих соображений. Пользуясь популярной ныне терминологией, можно сказать, что рассматриваемые нами задачи являются задачами программирования¹⁾. При этом прилагательное „динамический“ указывает на то, что мы интересуемся процессами, в которых существенную роль играет время и в которых порядок выполнения операций может оказаться решающим. Кроме того, существенной чертой нашего подхода будет интерпретация многих статических процессов как динамических процессов с искусственно введенным временем.

Обратимся теперь к обзору содержания книги.

В первой главе мы рассматриваем многошаговый детерминированный процесс распределения ресурсов, который является прототипом

¹⁾ То есть задачами принятия решений. — *Прим. ред.*

общего класса задач, встречающихся в различных вопросах организации тыла, в многошаговых процессах инвестирования, в изучении оптимальной политики закупок и при рассмотрении многих других экономических процессов. С математической точки зрения эта задача сводится к многомерным задачам максимизации и, в конечном счете, к вариационному исчислению.

Сначала мы рассмотрим процесс общепринятым способом и отметим возникающие при рассмотрении даже самых простых процессов этого типа затруднения, связанные с размерностью. Затем мы изложим основной метод всей теории, заключающейся в превращении исходной задачи максимизации в задачу решения некоторого функционального уравнения.

Функциональные уравнения, которые встречаются нам на этом пути, являются уравнениями совершенно нового типа и существенно отличаются от всех функциональных уравнений, рассматриваемых в классическом анализе. То уравнение, относительно которого будут проведены рассуждения в этой главе, имеет вид

$$(1) \quad f(x) = \max_{0 \leq y \leq \infty} [g(y) + h(x - y) + f(ay + b(x - y))],$$

где g и h — заданные функции, a и b — известные постоянные, удовлетворяющие условию $0 \leq a, b < 1$.

Доказав теорему существования и единственности, мы установим несколько простых свойств оптимального поведения, которые можно вывести из простых функциональных свойств функций g и h . В частности, мы приведем явные решения этого уравнения для некоторых частных видов функций g и h .

Преимущество этих решений заключается в том, что их можно использовать для получения аппроксимаций к решениям более сложных уравнений и, что еще более важно, для получения аппроксимаций к соответствующим оптимальным поведениям. Идея аппроксимации приводит нас к весьма важному понятию приближения в пространстве поведений, используемому в теоретических и в практических рассмотрениях, а также при изучении вопроса об устойчивости функции f при изменениях g и h .

Во второй главе мы рассматриваем многошаговый процесс решения стохастического типа в терминах золотодобывающего предприятия, оснащенного не очень надежной машиной для добычи золота. Здесь нам приходится иметь дело с уравнением

$$(2) \quad f(x, y) = \max \left[\begin{array}{l} A: p_1 [r_1 x + f((1 - r_1)x, y)], \\ B: p_2 [r_2 y + f(x, (1 - r_2)y)] \end{array} \right].$$

Кроме проведения исследования, аналогичного тому, которое было сделано в гл. I, мы находим фактическое решение этого уравнения и некоторых его обобщений. Решение имеет весьма простую

и интуитивно ясную форму и приводит к важной идее „областей решения“.

Мы покажем, однако, что ряд других обобщений уже не имеет такой простой структуры и ставит еще не решенные задачи. Попытка получить приближенные решения этих задач для частной области пространства параметров приведет нас к непрерывным вариантам, которые рассматриваются в гл. VIII.

Глава III посвящена синтезу этих процессов, кажущихся на первый взгляд столь различными. В этой главе мы исследуем общие черты двух процессов, рассмотренных в предыдущих главах, и переходим после этого к формулировке общих вариантов этих процессов. На этом пути мы приходим к функциональному уравнению

$$(3) \quad f(p) = \max_q [g(p, q) + h(p, q)f(T(p, q))],$$

частными случаями которого являются как оба предыдущих уравнения, так и целый ряд других уравнений более общего типа.

В этой же главе мы сформулируем в явном виде „принцип оптимальности“, математическая перефразировка которого дает в случае любого конкретного процесса функциональное уравнение, управляющее этим процессом. Более подробно обсуждается также понятие о приближении в пространстве поведений.

В следующей, четвертой главе устанавливается ряд теорем существования и единственности для некоторых часто встречающихся классов уравнений, имеющих указанный выше вид. Наши доказательства основываются на простой лемме, позволяющей сравнивать два решения уравнения (3). Хотя все эти уравнения имеют резко выраженный нелинейный характер, они в некоторых отношениях представляют собой естественное обобщение линейных уравнений. Уже по одной этой причине, не говоря уже об их приложениях, эти уравнения заслуживают изучения.

В главе V мы рассматриваем функциональное уравнение, выведенное на основе задачи, представляющей в настоящее время большой экономический интерес, — задачи об „оптимальном управлении запасами“. Здесь мы показываем, что различные методы, рассмотренные в предыдущих главах, дают решения в некоторых интересных частных случаях. В частности, мы убедимся, что метод последовательных приближений является эффективным аналитическим аппаратом для обнаружения свойств решения и поведений, а не просто набившим оскомину методом доказательства теорем существования и единственности. Существует много различных вариантов задачи об оптимальном управлении запасами; мы ограничимся рассмотрением математической модели, впервые предложенной Эрроу, Харрисом и Маршаком и изучавшейся также Дворецким, Кифером и Вольфовитцем.