П.С. Порецкий

О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики

Москва
«Книга по Требованию»

УДК 93
ББК 63.3
П11

П.С. Порецкий
П11 О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики / П.С. Порецкий – М.: Книга по Требованию, 2021. – 157 с.

ISBN 978-5-458-12848-3

О способах решения логических равенств и об обратном способе математической логики : [Опыт построения полной и общедоступной математической теории умозаключений над качеств. формами] : Два сообщ., чит. 27 февр. и 23 марта 1882 г. в заседаниях Физ.-мат. се

ISBN 978-5-458-12848-3

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Об отношении математической логики к математике и логике.

Математическая логика по предмету своему есть логика, а по методу математика. Что она есть *логика*, с этим согласится каждый, если мы скажем, что главнейшая, может быть даже и *единственная*[1]), её задача заключается в построении теории умозаключений. А что её метод вполне аналогичен *математическому* методу *алгебры* и ни в каком отношении ему не уступает, это конечно, требует доказательства. Так как ни в настоящей нашей статье, ни во введении к ней, мы нигде прямо не проводим параллели между методами алгебры и математич. логики, то здесь, в предисловии, будет уместно коснуться этого вопроса, одинаково интересного как для логиков, так и для математиков[2]).

Если *формы*, изучаемые алгеброй, суть *количественная*, то, наоборот, те формы, с которыми имеет дело логика, суть *качественная,* т.е. *существенно* отличны от первых. Это различие от ближайших пред-

[1] Буль обрабатывает по методу матем. Логики, кроме теории умозаключений, ещё след. теории: 1) теорию вероятностей, 2) теорию статистических отношений и 3) теорию отношений причин к следствиям. — Джевонс утверждает (см. «Основы науки», стр. 168), что «логический алфавит (т.е. основная формула математ. логики) дает нам возможность произвести полный анализ всякой численной задачи» и отсылает читателя к особой своей статье, где он будто бы вполне это доказывает. – Шредер также полагает, что теория умозаключений составляет только второстепенное (untergeordnete) применение начал математ. логики, не указывая впрочем никаких других её применений. – Со своей стороны, мы, уделив часть своего досуга изучению математ. логики, сосредоточили все свое внимание на разработке теории умозаключений, остальные же вопросы, осуждаемые Булем и Джевонсом, оставили без изучения. Таким образом, мы не имеем возможности высказывать своего мнения, которое ещё не определилось, относительно объема предмета матмат. логики и предпочитаем оставить этот вопрос совершенно открытым.

[2] Вопрос этот не затрагивался ни одним из авторов по математической логике. А потому все настоящее предисловие следует рассматривать, как наш собственный личный взгляд на этот предмет.

метов изучения алгебры и логики делает *невозможным* прямое перенесения, т.е. непосредственное применение, принципов и приёмов алгебры к предмету логики. Однако, *приспособления* этих приёмов (с полным сохранением всей их *точности*) к изучению качественных форм вполне возможно. И замечательно, что, для достижения этой цели, приходится не столько усложнять, сколько, наоборот, существенно *упрощать* приёмы алгебры, применяя их на почве логики.

Если в алгебре необходимо отличать *число* от *количества* и иметь *две системы символов:* численную и буквенную, то в логике аналогичной необходимости нет, и она может ограничиваться одною, и притом простейшею из них: системою *буквенных* символов. Дело в том, что всевозможные *категории* качества суть понятия, совершенно независимые одно от другого. А потому *формы*, обладающие *отдельными* категориями качеств, сами по себе не могут находиться ни в каком отношении друг к другу. Форма *каждой категории* качества требует *особого* символа, и при том совершенно независимого от прочих символов. Таковы и суть буквенные символы *a,b,c…*

Однако рядом с этим весьма существенным упрощением распространённого на логику алгебраического символизма (упрощением, выражающимся в возможности обходиться без) того, что отвечало бы системе численной нумерации), оказывается необходимым и некоторое его усложнение. По отношению к каждой категории качества (и даже к каждому отдельному виду различных категорий) надо различать *две формы*: форму, *обладающую* данным качеством, и форму им *не обладающую.* Если мы означим формы первого рода, отвечающие различным качествам, буквами *a,b,c…* то для форм второго рода должны избрать *те же* самые символа *a,b,c…* с присоединением к ним каких либо *значков*, т.е. напр. Символов a_1,b_1,c_1… Итак, каждая пара соответственных символов a и a_1 означает соответственно формы, обладающие и не обладающие одним и тем же некоторым определённым признаком. Таким образом, различие *признаков*, характеризующих формы, мы будем выражать в различии букв *a,b,c…,* различие же в *обладании* и *не обладании* признаками будем выражать в употреблении букв или без значка $_1$, или с присоединением этого значка.

Одним и тем же буквенными символами : a,a_1, b,b_1, и т.д. матем. Логика означает обладания или не обладание *всевозможными* качествами или признаками, будут ли качества простыми (напр. доброта, дешевизна и проч.) или составные, представляющие группы и даже целые системы качеств (каковы всевозможные реальные предметы: человек, дом и пр.). Итак, одни и те же символы: $a, a_1, b, b_1\ldots$ одинаково пригодны для обозначения не только абстрактных, но и конкретных качественных форм.

Доселе мы рассматривали формы обладания или не обладания *одним* каким-либо признакам. Переходим к формам *совместного* обладания несколькими признаками. Имея ряд символов $a, a_1, b, b_1\ldots$, выражающих присутствие или отсутствия некоторых определённых качеств, условимся означать качественные формы совместного обладания одним из этих качеств при отсутствии других посредством простого помещения рядом (безо всякого особого знака) соответственных первоначальных символов $a, a_1, b, b_1\ldots$ Таким образом, символ ab будет означать новую качественную форму, представляющую совместное обладание двумя признаками, и притом теми самыми, обладание которыми выражается соответственно в формах a и b. Формы a_1b и a,b_1 должны выражать обладание одним из этих качеств при отсутствии другого. Форма $a_1\ b_1$ будет означать отсутствие обоих этих качеств. Форма a_1bc_1d представляет обладания двумя определёнными признаками, соединённое с отсутствием других двух признаков. И т.д.

Вновь полученные качественные формы ab, a_1b, ab_1 и пр. можно рассматривать или ничем *не связанными* с прежними формами a, a_1b, b_1 и проч., или известным образом *происходящими* из этих последних. Это второе допущение и есть то, которое обуславливает для логики возможность не только символических обозначений, но и символических *операций* над формами качества. Таково начало символического метода логики, понимаемого в смысле некоторой *последовательности* известных символических *операций*.

Для возможности выводить качественные формы 2-ой категории (т.е. $,ab, ab_1$ и проч.) из первоначальных форм ($a, a_1, b, b_1\ldots$), достаточно допустить, что обладание или не обладание одним признаком (или одними признаками) *отнюдь не исключаются* обладания или не обладания какими бы то ни было другими признаками. При таком допущении, формы a и a_1 означают *простое констатирование фактов присутствия и отсутствия* некоторого определённого признака, причём вопрос о всех прочих качествах этих форм остаётся без рассмотрения. Это и есть допущение, которое устанавливает *зависимость* между качественными формами. В самом деле, при сказанном допущении, всякая качественная форма 2-ой из указанной категорий, коль скоро символическое её изображение содержит, в ряду прочих букв, какую бы то ни было букву *a,* является подчинённою первичной форме *a*, т.е. её простым *подклассом*. Напр., если *a* и *b* две первичные качественные формы «белое» и «крупное», то, допуская, что эти формы не исключат никаких других признаков, легко понять, что производная качественная форма *ab* т.е. «белое-крупное» (напр. «белый, крупный» цветок) является *частью* как «белого», так и «крупного», и притом именно *общею частью* того и другого,

Подобным-же образом, более сложная форма ab_1cd_1 (т.е. например белое, некрупное, ценное и бесполезное), на основании сказанного допущения, окажется частью (подклассом) каждой из 4-х первичных форм a,b_1,c и d_1, и притом именно *общею частью* всех этих форм. Тоже и вообще. Такова зависимость между первичными и производными качественными формами.

Не формулируя пока этой зависимости более определённым и точным образом, заметим, что помянутое допущение (т.е. допущение, что *a* означает *не исключительное* обладание известным признаком) обусловливает также подчинённость всевозможных *конкретных* форм, обладающих одним и тем же определённым качеством (напр. белый дом, белая бумага, белое знамя), чисто *абстрактной* форме обладания этим качеством (форма «белое»), т.е. устанавливает связь между конкретными и абстрактными качественными формами.

Чтобы точным образом выразить наше согласие делать помянутое выше допущение, совершенно достаточно условиться каждый качественный символ (первой или 2-й категории, т.е. напр. *a* и ab_1c) читать с прибавлением слова «все». Таким образом, если *a* означает всё белое, *b* всё крупное, *c* всё ценное, то напр. ab_1c должно представлять всё такое белое, которое ценно, но не крупное, т.е. обнимать собою не только все *предметы*, имеющие эту характеристику, но и все чисто абстрактные формы, имеющею эту характеристику.

Обращаемся к точному формулированию *зависимости* производных форм (ab, ab_1 и проч.) от первичных (a,a_1, b,u_1 и проч.). Мы видели, что, напр., форма *ab* есть *подкласс*, как форма *a*, так и формы b, и в тоже время выражает всё, что есть общего между этими двумя формами. А потому форму *ab* можно производить: во-первых, из формы *a* посредством выделения из неё всего того, что обладает признаком, характеризующим форму *b,* и, во-вторых, из формы *b* посредством отобрания от неё всего того, что есть *a*. (Например «белое-крупное» может быть производимо, как из «белого», так и из «крупного»). Отсюда непосредственно заключаем, что, во-первых, простое помещение рядом двух (и более) букв *a* и *b*, безо всякого знака, следует рассматривать, как вполне определённую логическую *операцию*, состоящую в выборе из состава одного класса всего того, что относится к составу другого, или других классов, и во-вторых, операция эта должна обладать тем свойством, которое называется в алгебре перестановочностью (коммутативностью), и в силу которого форма *ab* должна быть вполне тождественна с формою *ba*. Легко показать также, что рассматриваемая операция обладает ещё и свойством *собирательности* (ассоциативности), т.е. форма *(ab)c* тождественна с формами *(ac)b, (ba)c, (bc)a, (ca)b и (cb)a.*

Для краткости и точности суждений нам необходимо избрать какое-нибудь определенное *название* для этой операции. Условимся хотя бы на время называть эту операцию *реализированием* качественных форм (на том основании, что применения одной этой операции вполне достаточно для превращения абстрактных качественных форм в формы *реальные*). Таким образом, форма *ab* есть реализирование формы *a* с помощью формы *b*, и обратно, или, ещё короче, это есть взаимное реализирование форм *a* и *b*. Сущность этой операции состоит в упомянутом выше *выборе*, а её существенные свойства перестановочность и собирательность. Наконец символический *знак* этой операции есть *точка*, поставленная или подразумеваемая между взаимно реализуемыми классами.

Дальнейшие свойства операции реализирования должны зависеть от её отношения к другим возможным логическим операциям. Какие же другие операции возможны в логике? Конечно, прежде всего должна существовать операция, *обратная* установленному выше реализированию качественных форм, т.е. операция перехода от подклассов к классам.

Имея две формы *a* и *b* можно представить новую качественную форму, происходящую от *слияния* форм *a* и *b*, такого слияния, при котором *часть* этой новой формы содержит все, что есть *a*, другая же часть, и притом остальная, обнимает все, что относится к *b*. Имея в виду впоследствии доказать, что эта новая операция *слияния* (так сказать, чисто механического, но отнюдь не химического) вполне противоположна операции реализирования качественных форм, условимся (на время) называть эту новую операцию *абстрагированием* форм a и b. Символическим знаком этой операции мы изберем (на время) *знак вопросительный*, т.е. *?* Таким образом, новая качественная форма, представляющая характеризованное выше слияние форм a и b, символически изобразится так: $a?b$. Легко понять, что, например, более сложная форма $a?b_1?c?d_1$ должна представлять качественную форму, состоящую из *четырех* отдельных частей, каждая из которых в отдельности есть: a, b_1, c и d_1, т.е. к этой форме относится: 1) все, что есть a, 2) все, что не есть b, и т.д. (А вот реальный пример: упраздняются чины *прапорщика, ротмистра и подполковника*)

Не трудно объяснить, что операция абстрагирования форм также обладает свойством перестановочности. В самом деле, характеризованное выше слияние a с b или, наоборот, b с a, должно нас приводить к одним и тем же итогам. А потому символ $a?b$ должен означать совершенно тоже, что и символ $b?a$. Свойство собирательности также принадлежит к числу свойств абстрагирования, п.ч. символ $a?b?c$ совершенно равнозначен с каждым из символов $a?c?b$, $b?a?c$, $b?c?a$, $c?a?b$ и $c?b?a$.

А теперь *сопоставим* между собой операции реализирования и абстрагирования качественных форм. С этою целью мы принимаем одну из этих операций к *продукту* применения другой.

Возьмем форму $a?b$ (продукт абстрагирования простых форм a и b) и сопряжем ее с помощью реализирования с простою формою c. Продукт этого сопряжения символически изобразится так: $(a?b)c$, где скобки поставлены только для отграничения формы $a?b$; отсутствие же всякого знака между этой формой и формою c есть указание (т.е. как бы знак) необходимости взаимного реализования форм $(a?b)$ и с. Требуется *развить*, т.е. исследовать значение помянутого сложного продукта $(a?b)c$. Мы предполагаем доказать, что этот продукт совершенно равнозначен с качественною формою $ac?bc$, т.е. оправдать равенство:

$$(a?b)c=ac?bc.$$

Для определенности мы допустим, что a есть (все) белое, b (все) крупное, c (все) ценное. Заключения, сделанные на этом частном примере, будут иметь *общее* значение, п.ч. те же суждения могут быть применены и ко всевозможным другим примерам. Понятно, что ac означает белое-ценное, bc означает крупное-ценное, а потому символ $ac?bc$ должен означить все то, что частью есть белое-ценное, частью же относится к крупному-ценному. Таково значение правой части предположенного равенства. В левой части символ *a?b* означает все, что частью бело, частью же крупно. И понятно, что мы должны получить: 1) все белое-ценное и 2) все крупное-ценное, т.е. как раз то, что означает правая часть равенства.

Отсюда видим, что операция реализирования качественных форм *распределительна* (дистрибютивна) по отношению к операции абстрагирования, т.е. первая относится ко второй совершенно так же, как в алгебре умножение относится к сложению. Аналогия указанных логических операций со сложением и умножением в алгебре ещё более увеличивается тем обстоятельством, что каждая из этих 2-х операций перестановочна и собирательна.

Наконец, известно, что сложение и умножение в алгебре обладают еще одним свойством, а именно, каждое из них имеет свой *модуль*, т.е. такое количество, которое, будучи сопряжено с помощью этой операции с произвольным количеством *a*, не изменяет этого последнего. Модули сложения и умножения в алгебре суть соответственно *0* и *1*, для которых, при всяком а, имеем:

$$a+0=a,\ a\times 1=a.$$

Нетрудно определить модели реализирования и абстрагирования качественных форм. Условимся назвать качественную форму, не имеющую *никакого содержания*, т.е. обнимающую только то, что не существует, немыслимо, или невозможно (например «белое-не-белое» и пр.) *логическим нулем*, а противоположную предыдущей качественную форму, содержащую в себе в смысле подклассов *всевозможные* качественные формы (т.е. например как все белое, так и все не-белое), называть *миром* качественных форм есть *0*, т.е. *нуль*, а символ второй пусть будет 1, т.е. *единица*. (Ниже мы приведем ещё одно соображение в пользу предпочтения символа 1 перед символом ∞ для изображения *мира* качественных форм). Легко понять, что качественные формы *0* и *1* и суть *модули* абстрагирования и реализирования соответственно, т.е. верны равенства:

$$a?0=a,\ a1=a.$$

Подводя итоги, мы можем резюмировать результаты сопоставления основных операций логики и алгебры в следующей таблице:

в логике:	(a?b)c=ac?bc
a?b=b?a	a?0=a
ab=ba	a1=a

в алгебре:	(a+b)c=ac+bc
a+b=b+a	a+0=a
ab=ba	a * 1=a

Отсюда мы вправе сделать следующее заключение. В логике операция, означаемая знаком *?*, должна быть подчинена всем правилам алгебраического сложения; другая же операция, знак которой состоит в неупотреблении никакого знака, должна быть подчинена законам алгебраического умножения с тем непременным условием, чтобы символ *1* означал весь мир качественных форм.

Легко понять, что *абстрагирование* качественных форм само по себе (т.е. помимо указанных *процессуальных* свойств) совершенно аналогично *сложению* количеств, п.ч. *слияние* качественных форм, выражаемое символом *a?b*, вполне однородно с тем внешним или механическим слиянием, которое мы имеем в алгебраической сумме $a+b$. Вот причины, по которым абстрагирование можно называть *сложением* классов[3] (т.е. качественных форм), а его знак *?* можно замещать знаком + и употреблять его совершенно на тех же правах, что и в алгебре.

Понятно, что вторую логическую операцию (реализирование классов), законы которой тождественны с законами алгебраические умножения, можно называть *умножением классов.*

Относительно логического умножения все известные нам авторы по математической логике единогласно утверждают, что умножение это, будучи подчинено всем законам алгебраического умножения, не представляет никакой аналогии с сим последним. В противоположность этому мнению, мы позволяем себе утверждать, что эти операции вполне аналогичны, т.е. по крайней мере настолько, что обе они легко подводятся под следующее общее им обеим определение: умножение есть такая операция, при которой произведение выводится из одного сомножителя, совершенно так, как другой сомножитель (понимаемый в смысле произведения всех прочих сомножителей, кроме первого) выводится из единицы. Чтобы под это определение подходило логическое умножение, совершенно достаточно потребовать, чтобы в логике единица означала весь мир классов. В самом деле, форма *ab* так точно получается из *a*, как *b* выводится из единицы, а именно: посредством выбора всего, что относится к *b*.

[3] Отныне, для краткости, мы будем называть качественные формы классами.

Кроме указанного выше *общего сходства* логических операций сложения и умножения с соответственными операциями алгебры, существует между теми и другими некоторое *частное отличие*. Так, если в алгебре $a+a=2a$ и $a.a=a^2$, то в логике $a+a=a$ и $aa=a$. (п.ч., напр., белое и белое есть белое, и общее между белым и белым есть белое). Однако, эти отличия (существенно упрощающие логические выкладки) отнюдь не умаляют достоинства логического сложения и умножения, п.ч. правила $a+a=a$ и $aa=a$ столь же точны и определены, как и правила $a+a=2a$ и $a.a=a^2$.

Мало того; в логике имеют место ещё следующие два специальных правила: 1) a+ab=a (все белое и все белое крупное суть все белое) и 2) a(a+b)=a (общее между белым, с одной стороны, и белым или крупным, с другой, есть белое). Эти правила обнимают предыдущие, п.ч., для b=1, формула a+ab=a переходит в формулу a+a=a, и, для b=0, формула a(a+b)=a сводится на формулу aa=a.

Существуют ещё некоторые специальные правила сокращенного логического умножения в известных случаях, с которыми читатель ознакомится из нашего введения, но которые не вносят в эту операцию ничего ни произвольного, ни неопределенного. А потому мы считаем себя вправе сделать следующее замечание: логические операции сложения и умножения обладают всеми достоинствами (точностью, строгостью, общностью и пр.) алгебраических операций.

Аналогия между назначением (определением) логических и алгебраических операций сложения и умножения, в особенности одинаковость их основных свойств и общих их правил, может даже внушить мысль, будто математическая логика есть простой отдел алгебры. Чтобы опровергнуть эту мысль, мы доведем до конца начатое нами сопоставление операций математической логики с операциями алгебры.

Тем, что изложено выше, вполне исчерпывается *сходство* логических операций с алгебраическими, а затем остаются одни *различия*. И притом весьма *существенные*.

Если в алгебре сложение и умножение представляют пару *прямых* операций, которой соответствует пара операций *обратных* (вычитание и деление), то в логике сложение и умножение суть *взаимно-обратные* операции, а потому *нет оснований* для рассматривания и употребления в логике операций вычитания и деления[4]). В самом деле, имея класс *a,* умножим его на *b*, т.е. построим класс *ab*, и спросим себя: *нельзя ли посредством сложения уничтожить предыдущую работу умножения*, т.е. восстановить *a*? Наш ответ таков: для этого достаточно сложить *ab* с *a*, ибо $ab+a=a$. Наоборот, прибавив к *a* класс *b*, т.е. имея *сумму* $a+b$, достаточно *умножить* ее на *a* для восстановления *a*, п.ч. $(a+b)a=a$. Таким образом, в логике сложение уничтожает работу умножения, и обратно, т.е. эти две операции суть *взаимно-обратные*.

Здесь же мы можем усмотреть и *другое* существенное *отличие* логических операций от алгебраических. А именно, самая *обратность* операций выражается в логике и алгебре *неодинаково*. В самом деле, в алгебре работы превращения *a* в $a+b$, и в *ab*, сделанные с помощью сложения *a* с количеством *b* и умножения его на количество *b*, разрушаются вычитанием количества *b* из суммы и делением на количестве *b* произведения. В логике, наоборот, работы сложения *a* с классом *b* и умножения его *на классе b* уничтожаются с помощью умножения суммы *не на b, но на a*, и сложения с произведением *не b, не a*.

Если, таким образом, как мы доказали, сложение и умножение в логике суть *вполне обратные операции*, то делается вполне излишним приспособлять к логике совершенно для нее не нужные операции вычитания и деления. (Ниже же мы увидим, что эти операции в известном отношении даже *опасны* для логики).

Кроме сложения и умножения, логика имеет ещё одну операцию, *совершенно отсутствующую в системе алгебраических операций*; это именно – отрицание классов. Выше мы видели, что для каждого класса *a*, означает форму *обладания* определенным качеством, существуют *противоположный* ему класс a_1, означающий форму не обладания тем же самым качеством. Понятно, что классы *a* и a_1 следует считать *зависящими* друг от друга, а стало быть операцию *перехода* от одного из них к другому следует рассматривать как *самостоятельную логическую операцию*. Условимся называть эту операцию *отрицанием классов*, и тем же термином *отрицание* будем называть также и продукты, ею доставляемые. Таким образом a_1 есть отрицание *a*, и обратно. По-

[4] Мысль об *обратности* этих двух логических операций принадлежит лично мне. Буль употреблял операцию вычитания; Шредер рассматривает в логике не только вычитание, но и деление; Джевонс не высказывался касательно отношения между умножением и умножением в логике.